Teme s natjecanja: Princip ekstrema

Anja Grgec[1], *Matko Ljulj*[2]

Uvod

Princip ekstrema jedan je od važnih alata u matematičkim dokazima. Koristi se najčešće u kombinatornim zadatcima u kojima uvođenje dodatne pretpostavke u vidu promatranja nekog ekstremnog objekta (najmanjeg ili najvećeg po nekom kriteriju) može dovesti do preciznih argumenata, pa onda i do kratkih i jednostavnih dokaza. Ovaj princip pomaže da precizno formuliramo argumente koji bi inače mogli ostati nejasni.

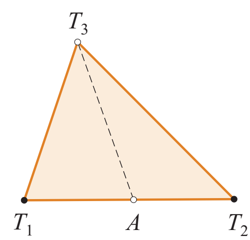
Princip ekstrema zaniva se na poznatim tvrdnjama: svaki konačni neprazni podskup realnih brojeva ima minimalni i maksimalni element, te svaki beskonačni podskup prirodnih brojeva ima minimalni element. Princip ekstrema najčešće se koristi u kombinatornim problemima, no njegova je primjena široka te obuhvaća i druga područja matematike kao što su geometrija, teorija grafova i teorija brojeva. U zadatcima gdje trebamo dokazati neku tvrdnju, ovaj se princip često kombinira s metodom kontradikcije: slijedeći argumente u rješenju dokazuje se da postoji neki drugi element koji je veći (odnosno manji) od prvog. Ovisno o specifičnostima problema, dokaz može uključivati i upotrebu Dirichletovog principa ili primjenu principa matematičke indukcije. Cilj ovog teksta je prikazati kako se princip ekstrema koristi kao alat matematičkog razmišljanja, istražujući njegovu primjenu u različitim područjima matematike uz primjere na natjecanjima.

Ovaj tekst temelji se na diplomskom radu *Princip ekstrema na matematičkim natjecanjima* koji je autorica obranila ujesen 2024. na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu pod mentorstvom autora. Sve slike korištene u svrhu prikaza rješenja zadataka izrađene su pomoću alata GeoGebra, [7].

Princip ekstrema u kombinatorici

Zadatak 2.1. (Korejska matematička olimpijada, 2003., [2].) *Neka su C i B konačni skupovi crnih i bijelih točaka u ravnini takvi da svaka dužina koja spaja dvije točke iste boje sadrži točku druge boje. Dokaži da oba skupa moraju ležati na jednom pravcu.*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji barem jedna točka koja ne leži na pravcu određenom s neke druge dvije točke. Tada su te tri točke vrhovi nekog trokuta površine različite od nula. Među svim takvim nedegeneriranim trokutima određenim točkama iz skupova C i B promotrimo onaj najmanje površine. Kako su C i B konačni skupovi, postoji konačno mnogo



Slika 1. Trokut najmanje površine.

[1] Autorica je nastavnica na Osnovnoj školi Trnovitica, Velika Trnovitica; e-pošta: `anja.grgec@gmail.com`

[2] Autor je docent na Zavodu za primijenjenu matematiku na PMF-u u Zagrebu; e-pošta: `matko.ljulj@math.hr`

takvih trokuta, pa onda i onaj najmanje površine. Po Dirichletovom principu u tom trokutu postoje dva vrha iste boje. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da su dva vrha tog trokuta crne boje. Neka su to točke T_1 i T_2, te neka je treći vrh T_3. Dužini $\overline{T_1T_2}$ krajnje točke su crne boje, pa prema pretpostavci zadatka, mora sadržavati točku iz skupa B. Nazovimo tu točku A. Međutim, oba trokuta T_1AT_3 i AT_2T_3 manje su površine od početnog trokuta za koji smo prepostavili da je najmanje površine, čime dobivamo kontradikciju. Dakle, početna pretpostavka je netočna, što povlači da sve točke iz skupova C i B moraju ležati na jednom pravcu.

Zadatak 2.2. (Mađarska matematička olimpijada, 2006., [2].) *Domaćin i njegova supruga na zabavu su pozvali n parova. Prilikom upoznavanja došlo je do rukovanja mnogih osoba, pri čemu se nitko nije rukovao sa svojim partnerom te se svaka od $2n+1$ osoba (ne brojeći domaćina) rukovala s različitim brojem ljudi. S koliko se ljudi rukovala domaćinova supruga?*

Rješenje. Ovaj problem riješit ćemo metodom matematičke indukcije. Neka za svaki prirodan broj n $P(n)$ označava broj ljudi s kojima se rukovala domaćinova supruga na zabavi na kojoj je bilo n parova. Dokazat ćemo da je $P(n) = n$.

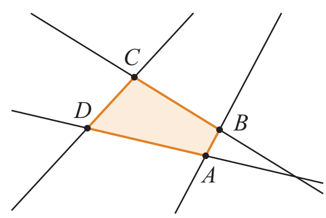
Za bazu matematičke indukcije imamo $n = 1$. Na zabavi se nalaze dva para. Gost, gošća i domaćinova supruga rukovali su se svaki s nijednom, jednom ili dvije osobe, u nekom redoslijedu. Osoba koja se rukovala s dvije osobe nije se rukovala jedino s osobom s nula rukovanja. Prema uvjetu zadatka, zaključujemo da se nije rukovala jedino sa svojim partnerom, pa osoba s nula i dva rukovanja čine par. Dakle, ostaje osoba s jednim rukovanjem, što je domaćinova supruga. Dakle, $P(1) = 1$.

Pretpostavimo sada da je $P(n) = n$, i odredimo $P(n+1)$. Na zabavi je, bez domaćina, prisutno $2(n+1)+1 = 2n+3$ osoba, a brojevi rukovanja su iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 2n+2\}$. Osoba s $2n+2$ rukovanja (nazovimo ju s X) rukovala se sa svima osim s osobom koja ima 0 rukovanja, pa je to nužno njezin partner (nazovimo ga Y). Uklanjanjem X i Y, ostaje zabava s n parova. Sve osobe osim X i Y rukovale su se s X, a nisu s Y, pa se uklanjanjem X i Y svaka od preostalih osoba rukovala s $0, 1, \ldots, 2n-1$ ili $2n$ osoba. Dakle, zadovoljeni su uvjeti pretpostavke indukcije. Prema njoj, domaćinova supruga se na toj skraćenoj zabavi rukovala s n ljudi. Dakle, u slučaju s $n+1$ parova, domaćica se rukovala s $n+1$ ljudi (uključujući X). Slijedi, $P(n+1) = n+1$.

Principom matematičke indukcije dokazali smo da se domaćinova supruga na zabavi s n pozvanih parova rukovala s n osoba.

Zadatak 2.3. (Steinerov problem, [3].) *Koji je najveći broj dijelova ravnine određen s n pravaca?*

Rješenje. Neka je P_n maksimalan broj dijelova ravnine podijeljene s n pravaca. Uvedimo pojam *najdublje točke* kao točku nekog dijela ravnine koja se nalazi najniže u tom dijelu. Preciznije, ako pravce stavimo u koordinatni sustav, najdublja točka nekog dijela ravnine je točka tog dijela s najmanjom y-koordinatom (radi preciznosti, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da nikoji od n pravaca nije paralelan s osi apscisa – inače sve pravce možemo rotirati). Svaki od dijelova ravnine je ili neograničen odozdo ili mu se najdublja točka nalazi na presjeku tih n pravaca, jer za svaku od točaka koja nije sjecište pravaca koji određuju taj dio ravnine postoji točka u njenoj okolini dublja od nje. To znači da je ta točka najniža u odnosu na sve druge točke presjeka pravaca. Na slici 2 točka A predstavlja najdublju točku četverokuta $ABCD$.



Slika 2. Najdublja točka dijela ravnine određenog točkama A, B, C i D je točka A.

Primijetimo da je svaka točka presjeka najdublja točka točno jednog dijela ravnine. Kako je najdublja točka svakog odozdo ograničenog dijela ravnine neki presjek od n pravaca, te je svaki od presjeka n pravaca najdublja točka nekog dijela ravnine, uspostavili smo bijekciju između odozdo ograničenih dijelova ravnine i sjecišta n pravaca. Kako se n pravaca siječe u najviše $\binom{n}{2}$ točaka, zaključujemo da je to i najveći broj odozdo ograničenih dijelova ravnine, te se ostvaruju kada nikoja dva pravca nisu paralelna te se nikoja tri ne sijeku u istoj točki.

a) Dijelovi ravnine presječene s 4 pravca. *b) Presjek pravaca s pravcem h.*

Slika 3. Odozdo neograničeni dijelovi ravnine.

Da bismo prebrojali odozdo neograničene dijelove ravnine, uvest ćemo horizontalni pravac h na ravnini koji je paralelan s osi apscisa i nalazi se ispod svih sjecišta n pravaca. Na taj način pravac h prolazi samo kroz odozdo neograničene dijelove ravnine. Pravac h siječe n pravaca na ravnini.

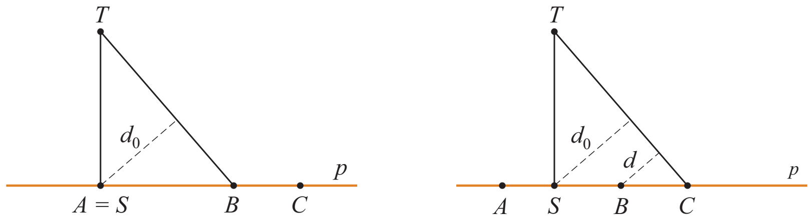
Svaki put kada pravac h siječe jedan od n pravaca, prolazi novim dijelom ravnine. Dakle, kako imamo najviše n sjecišta, pravac h prolazi kroz najviše $n+1$ dijelova ravnine, što još možemo napisati i kao $\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$. Konačno imamo formulu $P_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$. Jednakost se postiže za pravce u općem položaju (nikoja dva pravca nisu paralelna i nikoja tri se ne sijeku u istoj točki).

Zadatak 2.4. (Sylvestrov problem, [5].) *U ravnini je zadano konačno mnogo nekolinearnih točaka. Dokaži da postoji pravac koji sadrži točno dvije od zadanih točaka.*

Rješenje. Zadane točke određuju konačan broj pravaca i za svaki od njih postoji barem jedna točka koja mu ne pripada. Promotrimo sve moguće udaljenosti pravaca i točaka koje mu ne pripadaju, i poredajmo ih od najmanje do najveće: $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. Prema tome udaljenost d_1 je najmanja među svim mogućim udaljenostima između bilo kojeg pravca i točke koja mu ne pripada. Neka je to udaljenost između točke T i pravca p. Pokažimo da pravac p sadrži točno dvije od zadanih točaka u ravnini. Pretpostavimo suprotno, tj. da pravac p sadrži tri točke A, B i C. Povucimo pravac iz točke T okomit na pravac p. Točku sjecišta označimo sa S.

Prvo pretpostavimo da se točka S podudara s točkom A, tj. $S=A$. U tom slučaju vrijedi $|AT|=|ST|=d_1$. Povučemo li okomiti pravac iz točke A na pravac BT, dobit ćemo udaljenost d_0. Nova udaljenost d_0 manja je od udaljenosti d_1, jer je d_1 duljina dužine neke točke s pravca BT s točkom A, a d_0 je najmanja takva duljina, što je u kontradikciji s minimalnošću d_1. Isti zaključak dobijemo ako se točke B i S, ili točke C i S podudaraju.

Sada promotrimo slučaj u kojem se točka S ne podudara niti s jednom od točaka A, B i C. Prema Dirichletovom principu, postoje dvije točke koje leže s iste strane pravca p s obzirom na točku S, dok treća leži s druge strane. Bez smanjenja općenitosti, neka je točka A s lijeve strane pravca p s obzirom na točku S, a točke B i C s desne strane. Povučemo li okomice iz točaka S i B na pravac TC, dobit ćemo udaljenosti koje ćemo redom označiti s d_0 i d. Primijetimo da vrijedi $d_0 < d_1$, slično kao i ranije, a $d < d_0$ trivijalno primjenom Talesovog teorema na kut $\sphericalangle TCS$, što je opet kontradikcija s minimalnošću d_1. Dakle naša pretpostavka je kriva što znači da pravac p sadrži točno dvije točke.



a) Pravac p, prvi slučaj. *b) Pravac p, drugi slučaj.*

Slika 4. Slučajevi ovisni o presjeku pravca p i pravca kroz T okomitog na p.

Zadatak 2.5. (Školsko natjecanje 2019., 2. razred ŠS, A razina) *Između gradova prometuju jednosmjerne avionske linije. Za svaka dva grada A i B postoji točno jedna linija: ili iz A prema B, ili iz B prema A. Dokaži da postoji grad iz kojeg je moguće doći do bilo kojeg drugog grada s najviše jednim presjedanjem.*

Rješenje. Promotrimo sve gradove koji su povezani avionskim linijama. Od svih gradova odaberimo onaj koji je polazište najvećeg broja linija i imenujmo ga s A. Dokažimo da je to traženi grad.

Neka su gradovi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ svi u koje se može doći izravno iz grada A. Od preostalih gradova proizvoljno izaberimo neki i imenujmo ga s C. Na temelju našeg odabira, postoji izravna linija iz grada C u grad A, odnosno ne postoji izravna linija iz grada A u grad C, jer bi u suprotnom grad C morao biti jedan od gradova $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Pogledajmo situaciju u kojoj postoji izravna linija iz nekog grada B_i u grad C. U tom slučaju, možemo iz grada A doći do grada C tako da letimo najprije iz A u B_i, a zatim iz B_i u C, odnosno putem $A \to B_i \to C$. Pri tome bismo iz grada A do grada C mogli doći s jednim presjedanjem.

Kada bi sve linije iz grada C u gradove $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bile izravne, tada bi C bio direktno polazište za $n+1$ linija (jer postoji i linija iz C u A), što bi značilo da bi grad C bio polazište za veći broj linija nego iz grada A, što je suprotno pretpostavci. Dakle, postoji barem jedan grad B_i iz kojeg se može direktno doći u grad C. Budući da je grad C proizvoljno odabran, možemo zaključiti da je A grad iz kojeg je moguće doći do bilo kojeg drugog grada s najviše jednim presjedanjem.

Zadatak 2.6. (Hrvatska matematička olimpijada 2022.) *U grupi od n ($n \in \mathbb{N}$) ljudi, neki među njima su prijatelji, a neki nisu. Prijateljstva su uzajamna. Grupa je posjetila vidovnjaka. Svaka od n osoba rekla mu je koliko ima prijatelja u grupi. Vidovnjak je nakon toga rekao da za svaki par osoba iz grupe može sa sigurnošću odrediti jesu li prijatelji ili ne. Ako je vidovnjak rekao istinu, dokaži da u grupi ili postoji osoba koja je prijatelj sa svima ostalima ili postoji osoba koja nije prijatelj ni s kim.*

Rješenje. Promotrimo neku grupu prijatelja i njihovih međusobnih prijateljstava u kojoj ne postoji netko tko je prijatelj sa svima ili netko tko nije prijatelj ni s kim. Dokažimo da tada vidovnjak ne može odrediti svoju zadaću sa sigurnošću.

Reći ćemo da osobe A, B, C i D čine *posebnu četvorku* ako A i B te C i D nisu prijatelji, ali B i C te D i A jesu. Tvrdimo da ako u grupi postoji posebna četvorka, da tada vidovnjak ne može znati tko je točno s kime prijatelj. Naime, promotrimo istu grupu kao originalnu, ali u kojoj smo prijateljstva osoba B i C te D i A zamijenili s prijateljstvima osoba A i B te C i D. U tim dvjema grupama i dalje sve osobe imaju jednak broj prijatelja, no vidovnjak ne može sa sigurnošću reći o kojoj se od tih dviju grupa prijatelja radi.

Preostalo je dokazati da u našoj grupi prijatelja postoji posebna četvorka. Neka je A osoba koja je prijatelj s najviše ljudi. Kako po pretpostavci s početka rješenja da nijedna osoba nije prijatelj sa svima, postoji osoba B kojoj A nije prijatelj. Kako po pretpostavci s početka rješenja ne postoji osoba koja nije prijatelj ni s kime, B mora imati barem jednog prijatelja. Nazovimo ga s C. Pogledajmo sada sve prijatelje od A. Kada bi oni svi bili prijatelji s C, tada bi C imao više prijatelja od A (jer mu je i B prijatelj), pa bi dobili kontradikciju s time da je A prijatelj s najviše ljudi. Dakle, postoji prijatelj od A koji nije prijatelj s C. Nazovemo li tu osobu s D, dobili smo posebnu četvorku prijatelja A, B, C i D, i time dokazali tvrdnju zadatka.

Metoda beskonačnog spusta

Metodu beskonačnog spusta, poznatu i kao Fermatova metoda beskonačnog spusta, osmislio je Pierre de Fermat, poznati francuski matematičar 17. stoljeća, kao posebnu vrstu dokaza kontradikcijom. Ideja metode beskonačnog spusta može se opisati na sljedeći način: ako želimo dokazati da neka tvrdnja ne vrijedi za neki skup prirodnih brojeva $A \subseteq \mathbb{N}$, pretpostavimo suprotno tj. da vrijedi za neki element iz A i dodatno među svim takvima uzmemo najmanji $a_0 \in A$. Pronađemo li neki drugi element $a_1 \in A$ koji je manji od a_0 i za koji pod gornjom pretpostavkom također vrijedi tvrdnja, dobivamo kontradikciju. Ova metoda naziva se beskonačni spust jer nakon što smo pretpostavili da tvrdnja vrijedi za neki a_0, možemo pronaći neki a_1 manji od njega za koji tvrdnja također vrijedi, pa onda možemo pronaći neki manji element a_2, itd., nalazeći sve manje i manje elemente, beskonačno se spuštajući, što nije moguće. Za više informacija o metodi beskonačnog spusta, može se pogledati u [5, 6].

Beskonačni spust povezan je i s principom matematičke indukcije. Naime, želimo li dokazati da neka tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki prirodni broj n, umjesto matematičkom indukcijom, možemo pristupiti i ovako: nakon što dokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$, pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, te među svim takvima uzmimo najmanji. Nakon toga argumentima sličnim kao u koraku indukcije dokažemo da ta pretpostavka povlači da tvrdnja ne vrijedi niti za $n-1$, čime dobivamo kontradikciju s minimalnošću od n, pa tvrdnja uistinu vrijedi za sve prirodne brojeve.

Metoda beskonačnog spusta i princip ekstrema su slične po tome što je u obje metode ključ dokazivanja nalaženje kontradikcije u minimalnosti (ili maksimalnosti) elementa s nekim svojstvom. Vidjeli smo da su te dvije metode isprepletene i s matematičkom indukcijom, tako da je tanka granica između tih metoda sličnog načina razmišljanja. Ipak, ovakav koncept dokazivanja proglasit ćemo principom ekstrema najčešće u kombinatornim zadatcima, beskonačnim spustom u zadatcima iz teorije brojeva (najčešće u dokazivanju da diofantske jednadžbe nemaju više rješenja), dok matematička indukcija ostaje najprecizniji alat za dokazivanje tvrdnji, najčešće u algebarskim zadatcima.

Metoda beskonačnog spusta primijenjuje se u dokazu da je broj $\sqrt{2}$ iracionalan. S obzirom da je taj dokaz viđen već mnogo puta, tu metodu ćemo pokazati na jednom drugom primjeru.

Zadatak 3.1. (Kineska matematička olimpijada, 2003., [6].) *Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe* $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Rješenje. Za početak je korisno primijetiti da je trojka $(0, 0, 0)$ rješenje ove jednadžbe, te slutimo da jednadžba nema više rješenja. U jednadžbi primjećujemo da su brojevi $2y^3$ i

$4z^3$ parni, pa iz toga slijedi da i x^3 mora biti paran broj. Ako je x^3 paran, tada je i x paran broj. Stoga možemo x zapisati kao $x = 2x_1$, pri čemu je $x_1 \in \mathbb{Z}$. Vratimo li dobiveno u početnu jednadžbu dobivamo $(2x_1)^3 + 2y^3 = 4z^3$, odnosno

$$4x_1^3 + y^3 = 2z^3.$$

Slično kao u prošloj jednadžbi, članovi $4x_1^3$ i $2z^3$ su parni, pa onda i y^3 mora biti paran, odnosno $y = 2y_1$ za neki cijeli y_1. Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo $2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3$, pa kao ranije zaključujemo da je $z = 2z_1$ za neki cijeli broj z_1. Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo

$$x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3.$$

Dobili smo istu jednadžbu kao ranije, samo u drugim nepoznanicama. Primjećujemo da ovaj postupak možemo ponavljati unedogled, odnosno beskonačno se spuštati. Učinimo ove argumente preciznim.

Pretpostavimo da početna jednadžba $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ ima neko cjelobrojno rješenje različito od $(0, 0, 0)$. Među svima takvima uzmimo ono za koje je vrijednost $|x| + |y| + |z|$ najmanja moguća. Budući da ta vrijednost poprima vrijednosti u prirodnim brojevima, postoji neko rješenje (možda i njih više) kojoj je ta vrijednost najmanja moguća, makar jednadžba možda imala i beskonačno mnogo rješenja. Gornjim postupkom pronašli smo drugo rješenje (x_1, y_1, z_1) početne jednadžbe koje je s početnim povezano relacijama $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ i $z = 2z_1$. Zaključujemo da vrijedi

$$|x_1| + |y_1| + |z_1| = \frac{1}{2}(|x| + |y| + |z|) < |x| + |y| + |z|.$$

Dakle, rješenje (x_1, y_1, z_1) neko je drugo rješenje kojem je suma apsolutnih vrijednosti nepoznanica manja od najmanje takve vrijednosti, čime dobivamo kontradikciju s početnom pretpostavkom. Dakle, ova jednadžba nema rješenja pored već pronađenog $(0, 0, 0)$.

Paradoksalni primjer

Za kraj pogledajmo primjer neispravnog korištenja principa ekstrema. Analizirat ćemo sličan zadatak u dvije različite postavke: u kojem brojevi koji se pojavljuju dolaze iz skupa prirodnih brojeva (te u kojem slučaju tvrdnja zadatka vrijedi i može se valjano dokazati principom ekstrema), te u kojem ti brojevi dolaze iz skupa cijelih brojeva (te tvrdnja zadatka ne vrijedi).

Zadatak 4.1. ([4]) *Svakoj cjelobrojnoj točki brojevnog pravca pridružen je prirodan broj tako da je svaki broj jednak aritmetičkoj sredini svojih susjeda. Dokaži da su svi brojevi na pravcu jednaki.*

Rješenje. Iako se na pravcu nalazi beskonačno mnogo točaka, brojevi pridruženi tim točkama dolaze iz skupa prirodnih brojeva, pa zato postoji najmanji broj koji se na njemu pojavljuje. Neka je to $m \in \mathbb{N}$, te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je na brojevnom pravcu pridružen nuli.

Označimo brojeve pridružene točkama 1 i -1 s a i b redom. Iz uvjeta zadatka vrijedi $\frac{a+b}{2} = m$, a iz pretpostavke minimalnosti broja m nužno su oba broja a i b veći ili jednaki od m. To je moguće samo ako je $a = b = m$, odnosno ako su točkama 1 i -1 također pridruženi brojevi m.

Sada možemo nastaviti induktivno: tvrdimo da su za neki prirodni broj n svim točkama $-n, -(n-1), \ldots, (n-1), n$ pridružen isti broj m. Baza je gore potvrđena, a uz pretpostavku ta tvrdnja vrijedi za n, korak dokazujemo promatranjem točaka $(n-1)$, n i

$(n+1)$, te $-(n-1)$, $-n$ i $-(n+1)$: budući da dvije od tih triju točaka imaju pridruženu vrijednost, iz uvjeta zadatka slijedi da i treća točka ima vrijednost m.

Pogledajmo što bi se dogodilo kada bi točkama brojevnog pravca bili pridruženi cijeli, a ne prirodni brojevi. U tom slučaju ne bismo mogli garantirati da će svi brojevi biti jednaki. Naime, postoji kontraprimjer: svakoj točki brojevnog pravca n pridružimo upravo broj n. Gornji dokaz ne funkcionira u slučaju cijelih brojeva zato što u beskonačnom skupu cijelih brojeva ne mora postojati minimalni element, odnosno ne mora postojati najmanji broj među svim pridruženim točkama na brojevnom pravcu.

Zadatci

Većina zadataka može se pronaći u literaturi danoj na kraju, a svi su riješeni u [1].

1. Dan je neparan broj n veći od 1. Na polju se nalazi n osoba postavljenih tako da se svi nalaze na međusobno različitim udaljenostima. Svaka osoba drži vodeni pištolj i na dani znak *puca* u najbližu osobu. Dokaži da će barem jedna osoba ostati suha.

2. Koji je najveći broj dijelova prostora određenog s n ravnina?

3. Zadano je n točaka u ravnini takvih da su svake tri vrhovi trokuta čija je površina manja ili jednaka od 1. Dokaži da svih n točaka leže u trokutu čija je površina manja ili jednaka od 4.

4. Za prirodne brojeve raspoređene u krug kažemo da su u *cik-cak rasporedu* ako je svaki broj veći od oba svoja susjeda ili manji od oba svoja susjeda. Za par susjednih brojeva kažemo da je *dobar* ako, nakon njegovog uklanjanja, preostali brojevi ostaju u cik-cak rasporedu. Brojevi od 1 do 300 raspoređeni su u cik-cak rasporedu. Koliko iznosi najmanji mogući broj dobrih parova susjednih brojeva?

5. U tablici $n \times n$ napisani su svi brojevi od 1 do n^2. Dokažite da postoje dva susjedna polja koja se razlikuju za barem $n+1$. Polja smatramo susjednim ako dijele vrh.

6. U skupu realnih brojeva riješi sustav

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= z,\\ (y+z)^3 &= x,\\ (x+z)^3 &= y.\end{aligned}$$

7. Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $10x^3 + 20y^3 + 8xyz = 1999z^3$.

Literatura

[1] A. Grgec, *Princip ekstrema na matematičkim natjecanjima*, diplomski rad, PMF-MO, 2024.

[2] P. Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving*, John Wiley & Sons, Inc., 2006., 2. izdanje.

[3] A. Engel, *Problem-solving strategies*, Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] L. Milačić, *Princip ekstrema*, Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", 2020.

[5] L. Tat-Wing, *The Method of Infinite Descent*, Mathematical Excalibur, vol. 10, no. 4, 2005.

[6] *Fermat's Method of Infinite Descent*, Brilliant.org, `https://brilliant.org/wiki/general-diophantine-equations-fermats-method-of/`.

[7] *GeoGebra Team*, GeoGebra [Software], International GeoGebra Institute, 2024.