БМО 1992

1. Нека $m,n\in\mathbb{N}$ и
$$A(m,n)=m^{3^{4n}+6}-m^{3^{4n}+4}-m^5+m^3.$$
Определи ги сите природни броеви n за кои $A(m,n)$ е делив со 1992 за секој $m\in\mathbb{N}$.

Решение. *Лема*. Нека a и b се заемно прости броеви и s е најмалиот природен број таков што $a^s\equiv 1(\bmod b)$. Ако n е природен број таков што $a^n\equiv 1(\bmod b)$, тогаш $s\,|\,n$. Бројот s го нарекуваме *степенов показател* на a по модул b.

Доказ. Нека $q,r\in\mathbb{N}$ се такви што $n=sq+r$, $0\le r<s$. Тогаш
$$1=a^n\equiv a^{qs+r}\equiv (a^s)^q a^r(\bmod b),$$
па од монималноста на s следува $r=0$, т.е. $s\,|\,n$. ■

Да забележиме дека $1992=2^3\cdot 3\cdot 83$ и
$$A(m,n)=m^3(m^2-1)(m^{3^{4n}+1}-1).$$
Лесно се докажува дека 24 е делител на $A(m,n)$. Имено, $m(m^2-1)$ е производ на три последователни броеви, па затоа $3\,|\,m(m^2-1)$, што значи $3\,|\,A(m,n)$. Ако m е парен број, тогаш $2^3\,|\,m^3$, т.е. $2^3\,|\,A(m,n)$. Ако m е непарен број, тогаш m^2-1 е производ на два последователни парни броеви, едниот од кои е делив со 4, па затоа $2^3\,|\,A(m,n)$. Броевите 2, 3 и 83 се заемно прости и значи $1992\,|\,A(m,n)$ ако и само ако $83\,|\,A(m,n)$. Нека n е таков што $83\,|\,A(m,n)$ за секој $m\in\mathbb{N}$. Во случајов имаме $83\,|\,A(2,n)=2^{3^{4n}+1}-1$. Ако s е степенов показател на 2 по модул 83, тогаш од лемата следува дека $s\,|\,3^{4n}+1$. Да го определиме s. Бидејќи $\mathrm{NZD}(2,83)=1$ од малата теорема на Ферма следува $2^{82}\equiv 1(\bmod 83)$, па значи $s\,|\,82$, т.е. $s\in\{1,2,41,82\}$. Но, $2^1\not\equiv 1(\bmod 83)$, $2^2\not\equiv 1(\bmod 83)$ и $2^{41}\equiv 1024^4\cdot 2\equiv 28^4\cdot 2\equiv 784^4\cdot 2\equiv 37^4\cdot 2\equiv 82(\bmod 83)$, односно $2^{41}\not\equiv 1(\bmod 83)$. Според тоа, $s=82$, па значи $82\,|\,3^{4n}+1$. Од друга страна $3^{4n}=81^n$ и $81\equiv -1(\bmod 82)$, па затоа $82\,|\,3^{4n}+1$ само ако n е непарен број. ќе докажеме дека последното е доволно, т.е. дека за секој непарен број важи $83\,|\,A(m,n)$. За $m=1$ имаме $83\,|\,0=A(1,n)$ и уште можеме да сметаме дека 83 не е делител на m. Но, 83 е прост број и затоа $\mathrm{NZD}(m,83)=1$. Повторно од

малата теорема на Ферма следува дека $m^{82} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 83)$. Сега, бидејќи n е непарен број добиваме

$$3^{4n} + 1 = 81^n + 1 = 82(81^{n-1} - 81^{n-2} + ... + 1) = 82K\ ,\ K \in \mathbb{N}\ .$$

Значи, $m^{3^{4n}+1} = m^{82K} = (m^{82})^K \equiv 1^K = 1 (\mathrm{mod}\, 83)$.

2. Докажи дека за секој природен број n е исполнето неравенството

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2 .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува за броевите $1^2, 2^2, ..., n^2$ следува дека

$$\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}\ . \tag{1}$$

Од друга страна, ако го искористиме познатото равенство

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ,$$

и замениме во (1) добиваме

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}\ .$$

Но $(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1$, па ако последното неравенство го степенуваме на $n-$ степен добиваме

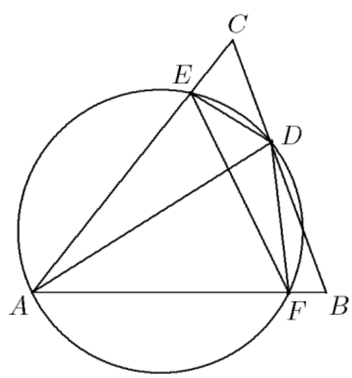
$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2 .$$

3. Даден е $\triangle ABC$ и точки D, E, F соодветно на неговите страни BC, CA, AB, различни од темињата на триаголникот. Докажи дека ако четириаголникот $AFDE$ е тетивен, тогаш

$$\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}} \leq \frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}\ .$$

Решение. *Прв начин*. Последователно имаме

$$\begin{aligned}\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} &= \frac{P_{ABD}+P_{ACD}}{P_{DEF}} = \frac{P_{ABD}}{P_{DEF}} + \frac{P_{ACD}}{P_{DEF}} \\ &= \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle FAD}{\overline{ED}\cdot\overline{EF}\sin\measuredangle DEF} + \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle EAD}{\overline{DF}\cdot\overline{EF}\sin\measuredangle DFE} \\ &= \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{ED}\cdot\overline{EF}} + \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}{\overline{DF}\cdot\overline{EF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}\right) \\ &\geq 2\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\sqrt{\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}},\end{aligned}$$



при што искористивме дека

$$\measuredangle FAD = \measuredangle DEF \text{ и } \measuredangle EAD = \measuredangle DFE\ ,$$

бидејќи четириаголникот $AFDE$ е тетивен.

Од друга страна $\measuredangle BAC + \measuredangle EDF = 180^\circ$, па затоа $\sin\measuredangle BAC = \sin\measuredangle EDF$, од што слеува

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle BAC}{\overline{DE}\cdot\overline{DF}\sin\measuredangle EDF} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{DE}\cdot\overline{DF}}.$$

Според тоа,

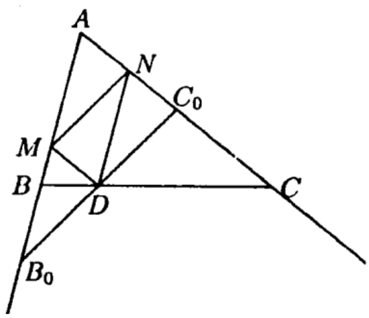
$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} \geq 2\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\sqrt{\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}},$$

и со квадрирање на последното неравенство го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако точката D е средина на BC.

Втор начин. Лема. Ако D е точка во внатрешноста на даден $\measuredangle BAC$, тогаш меѓу сите прави кои минуваат низ D и ги сечат краците на аголот, триаголник со минимална плоштина отсекува правата од која краците на аголот отсекуваат отсечка чија средина е D.

Доказ. Нека $DM \parallel AC$ $(M \in AB)$, $DN \parallel AB$ $(N \in AC)$ и $B_0C_0 \parallel MN$ $(B_0 \in AB, C_0 \in AC)$. Од конструкцијата следува дека D е средина на B_0C_0. Сега ќе докажеме дека

$$P_{B_0C_0A} \leq P_{ABC}.$$



Нека за определност земеме дека B е меѓу A и B_0. Бидејќи D е внатрешна точка за $\measuredangle BAC$, па затоа C_0 е меѓу A и C (цртеж десно). Затоа ако искористиме дека $\overline{DC_0} = \overline{DB_0} = \overline{MN}$ добиваме

$$\begin{aligned} P_{ABC} - P_{B_0C_0A} &= P_{DCC_0} - P_{DBB_0} \\ &= \tfrac{1}{2}(\overline{DC}\cdot\overline{DC_0} - \overline{DB}\cdot\overline{DB_0})\sin\measuredangle BDB_0 \\ &= \tfrac{1}{2}(\overline{DC} - \overline{DB})\overline{MN}\sin\measuredangle BDB_0. \end{aligned}$$

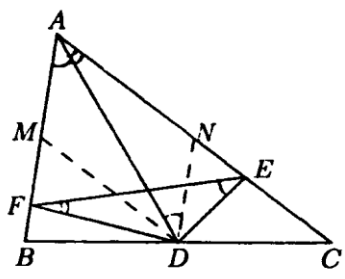
Од друга страна, од теоремата на Талес следува

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \geq \frac{\overline{NC_0}}{\overline{NA}} = 1,$$

па затоа $\overline{DC} \geq \overline{DB}$, односно $P_{ABC} \geq P_{B_0C_0A}$. ■

Од лемата следува дека доволно е да се разгледа парцијалниот случај кога D е средина на BC. Ќе докажеме дека во тој случај неравенството од условот преминува во равенство. Нека M и N соодветно се средините на AB и AC (цртеж десно). Имаме

$$\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{P_{DEF}}{\frac{1}{2}P_{AMDN}} = \frac{P_{DEF}}{P_{ADN}}.$$



Понатаму, четириаголникот $AFDE$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle DFE = \measuredangle DAE \text{ и } \measuredangle DEF = \measuredangle FAD.$$

Но, $\measuredangle FAD = \measuredangle ADN$ ($DN \parallel AB$), па затоа $\measuredangle DEF = \measuredangle ADN$. Тогаш од

$$P_{DEF} = \frac{\overline{EF}^2 \sin\measuredangle DFE \sin\measuredangle DEF}{2\sin(2\pi - \measuredangle DFE - \measuredangle DEF)} \text{ и } P_{ADN} = \frac{\overline{AD}^2 \sin\measuredangle DAE \sin\measuredangle ADN}{2\sin(2\pi - \measuredangle DAE - \measuredangle ADN)}$$

следува $\frac{P_{DEF}}{P_{ADN}} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}$, па затоа $\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}$.

4. За секој природен број $n \geq 3$ определи го најмалиот природен број $f(n)$ со следново својство: за секој избор на множество $A \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ со $f(n)$ елементи постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m е природен број и $M = \{m, m+1, ..., m+5\}$. Тогаш секое петелементно подмножество на M содржи три броја кои се по парови заемно прости.

Доказ. Постои непарен број a таков што $A = \{a, a+2, a+4\} \subset M$. Навистина, ако m е непарен број, тогаш $a = m$, а ако m е парен број, тогаш $a = m+1$. Елементите на $\{a, a+2, a+4\}$ се по парови заемно прости. Барем еден од броевите $a+1$ и $a+3$ не е делив со 3. Тој број да го означиме со b и да го разгледаме множеството $B = \{a, a+2,\ a+4, b\} \subset M$. Тогаш елементите на B се по парови заемно прости, а секое петелементно подмножество на M содржи три елементи од B . Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Да го разгледаме множеството $X \subset \{1, 2, 3, ..., n\}$ кое се состои од броевите деливи со 2 или со 3. Тогаш X го нема саканото својство, бидејќи во секое триелементно подмножество на X ќе има два броја со заеднички делител 2 или 3. Според тоа, секое множество со саканото својство има најмалку $|X|+1$ елемент, па затоа

$$f(n) \geq [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{3}] - [\tfrac{n}{6}] + 1.$$

Со индукција ќе докажеме дека за секој избор на множество $A \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ со

$$g(n) = [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{3}] - [\tfrac{n}{6}] + 1$$

елементи постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости. Да забележиме дека $g(n+6) = g(n) + 4$.

Случаите $n = 3, 4, 5$ се тривијални, а за $n = 6$ тврдењето следува од лемата. За $n = 7$ ја применуваме лемата кога $1, 7 \notin A$, а во спротивен случај тројката $\{1, 7, x\}$, каде $x \neq 1, 7$ е произволен елемент од A е бараната тројка од условот на задачата. На сличен начин се разгледува и случајот $n = 8$.

Нека $n \geq 9$ и $f(k) \leq g(k)$ за секој $k \in \{3, 4, ..., n-1\}$. Нека A е произволно подмножество од $\{1, 2, ..., n\}$ со $g(n)$ елементи. Ако $A \cap \{n-5, n-4, ..., n\}$ содржи барем пет елементи, тогаш тврдењето следува од лемата. Ако $|A \cap \{n-5, n-4, ..., n\}| \leq 4$, тогаш во A се содржат најмалку $g(n) - 4 = g(n-6)$ елемент од $\{1, 2, ..., n-6\}$, а според индуктивната претпоставка меѓу нив постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости.