XIII олимпијада

1. Докажи дека тврдењето: за произволни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи неравенството

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)...(a_2-a_n)+...$$
$$+(a_n-a_2)(a_n-a_3)...(a_n-a_{n-1})\geq 0,$$

е точно за $n=3$ и $n=5$, но тоа не е точно за било кој друг природен број $n, n>2$.

Решение. За $n=3$ левата страна на неравенството е еднаква на

$$\tfrac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2]\geq 0 .$$

За $n=5$, заради симетричност на левата страна во однос на a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, можеме да претпоставиме дека $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$. Бидејќи

$$a_1-a_3 \geq a_2-a_3,\; a_1-a_4 \geq a_2-a_4,\; a_1-a_5 \geq a_2-a_5,$$

добиваме

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geq 0 .$$

Исто така

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geq 0 ,$$

како и

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\geq 0$$

што значи дека за $n=5$ неравенството е исполнето.

За $n=4$ можеме да земеме

$$a_1=0,\; a_2=a_3=a_4=1,$$

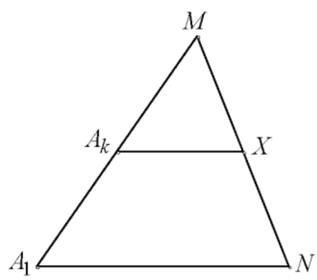
а за $n>5$,

$$a_1=a_2=...=a_{n-4}=0,\; a_{n-3}=a_{n-2}=a_{n-1}=2 \text{ и } a_n=1$$

и во секој од овие случаи неравенството не е исполнето.

2. Даден е конвексен полиедар P_1 со темиња $A_1, A_2, ..., A_9$. Нека $P_2, P_3, ..., P_9$ се полиедри кои се добиваат со транслации на полиедарот P_1 кои точката A_1 ја пресликуваат во точките $A_2, A_3, ..., A_9$, соодветно. Докажи дека најмалку два од полиедрите $P_1, P_2, P_3, ..., P_9$ имаат барем една заедничка внатрешна точка.

Решение. Со P да го означиме полиедарот кој е хомотетичен на полиедарот P_1 со центар на хомотетија A_1 и коефициент 2. Нека X е некоја од точките на полиедарот A_k, $k\in\{2,3,4,...,9\}$. Тогаш



$$\overrightarrow{A_1X} = \overrightarrow{A_1A_k} + \overrightarrow{A_kX} .$$

Нека M и N се точки во просторот такви што $\overrightarrow{A_1M} = 2\overrightarrow{A_1A_k}$ и $\overrightarrow{A_1N} = 2\overrightarrow{A_kX}$. Точките M и N припаѓаат на полиедарот P , при што точката X припаѓа на отсечката MN , па бидејќи полиедарот P е конвексен, таа припаѓа и на P . Од овде заклучуваме дека полиедарот P ги содржи сите 9 полиедри $P_1, P_2, ..., P_9$ а волуменот му е 8 пати поголем од волуменот на секој од нив. Сега, од принципот на Дирихле следува дека меѓу полиедрите $P_1, P_2, ..., P_9$, постојат два кои имаат заедничка точка.

3. Докажи дека низата $2^n - 3$, $n = 1, 2, 3, ...$ има бесконечно многу членови такви што секои два од нив се заемно прости.

Решение. Тврдењето во задачата ќе го докажеме користејќи математичка индукција.

Нека претпоставиме дека имаме k броеви

$$a_1 = 2^{n_1} - 3 , a_2 = 2^{n_2} - 3 , ..., a_k = 2^{n_k} - 3$$

такви што секои два од нив се заемно прости и $2 = n_1 < n_2 < ... < n_k$. Конструираме број од облик $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$, кој ќе биде земно прост со секој од овие броеви. Избираме $l = a_1 a_2 ... a_k$. Меѓу $l+1$-те броеви $2^0, 2^1, ..., 2^l$ постојат барем два кои при делење со l даваат ист остаток. Нека 2^r и 2^s $(r > s)$ се тие броеви. Тогаш постои природен број p , таков што

$$pl = 2^r - 2^s = (2^{r-s} - 1) 2^s .$$

Бидејќи l е непарен, добиваме дека $2^{r-s} - 1$ е делив со l , т.е. за некој природен број q важи $2^{r-s} - 1 = ql$. Според тоа,

$$2^{r-s+2} - 3 = 4 \cdot 2^{r-s} - 3 = 4(ql + 1) - 3 = 4ql + 1$$

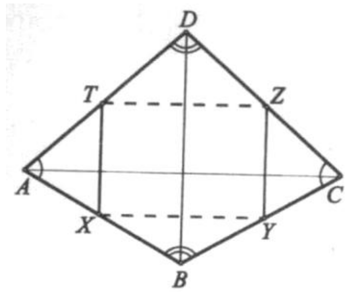
и овој број ќе го земеме за бројот a_{k+1} , бидејќи тој нема заеднички делител поголем од 1 со било кој од броевите $a_1, a_2, ..., a_k$ и освен тоа $a_{k+1} > a_k$.

На опишаниот начин можеме да конструираме произволно многу броеви кои ги исполнуваат условите на задачата.

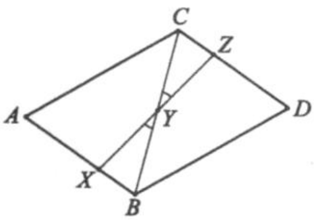
4. Секоја страна на тетраедарот $ABCD$ е остроаголен триаголник. Ги разгледуваме затворените полигонални линии $XYZTX$ определени на следниот начин: точката X е на работ AB и е различна од A и B . Аналогно Y, Z и T се на рабовите BC , CD и AD , соодветно. Докажи дека:

а) Ако $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD \neq \measuredangle ABC + \measuredangle CDA$, тогаш меѓу овие полигонални линии нема најкратка.

б) Ако $\measuredangle DAB+\measuredangle BCD=\measuredangle ABC+\measuredangle CDA$, тогаш постојат бесконечно многу полигонални линии со најкратка должина и таа е еднаква на $2\overline{AC}\sin\frac{\alpha}{2}$, каде што $\alpha=\measuredangle CAB+\measuredangle DAC+\measuredangle DAB$.



Решение. а) Да претпоставиме дека постои најкратка искршена линија $XYZTX$ (цртеж десно). Триаголниците ABC и BCD ги поставуваме во една рамнина. Со тоа добиваме четириаголник $ABCD$ (цртеж лево). За линијата да има минимална должина, мора да е исполнето $\measuredangle BYX=\measuredangle CYZ$, бидејќи во спротивен случај би добиле помала должина на линијата со поместување на точката Y.



Аналогно се покажува дека мора да е исполнето

$$\measuredangle CZY=\measuredangle TZD,$$
$$\measuredangle DTZ=\measuredangle XTA,$$
$$\measuredangle AXT=\measuredangle YXB.$$

На тој начин добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle DAB+\measuredangle BCD&=180^\circ-\measuredangle AXT-\measuredangle XTA+180^\circ-\measuredangle CZY-\measuredangle CYZ\\&=180^\circ-\measuredangle YXB-\measuredangle BYX+180^\circ-\measuredangle DTZ-\measuredangle TZD\\&=\measuredangle ABC+\measuredangle ADC.\end{aligned}$$

што противречи на претпоставката.

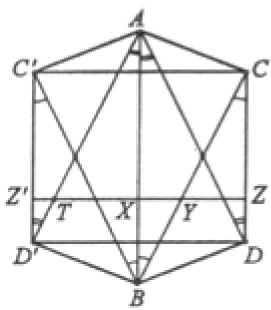
б) Нека претпоставиме дека е исполнет условот

$$\measuredangle DAB+\measuredangle BCD=\measuredangle ABC+\measuredangle ADC \tag{1}$$

Со $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ги означуваме збировите на аглите меѓу рабовите во темињата A,B,C,D. Тогаш

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma&=\measuredangle DAB+\measuredangle CAB+\measuredangle DAC+\measuredangle BCA+\measuredangle ACD+\measuredangle BCD\\&=(\measuredangle ABC+\measuredangle CAB+\measuredangle BCA)+(\measuredangle CDA+\measuredangle DAC+\measuredangle ACD)=360^\circ.\end{aligned}$$

т.е. $\alpha+\gamma=360^\circ$. Аналогно се докажува дека $\beta+\delta=360^\circ$. Затоа, барем еден од аглите α,γ или од аглите β,δ не може да биде поголем од 180°. Нека се тоа аглите α и γ. Обвивката на тетраедарот $ABCD$ ја расечуваме по рабовите AC, CD, DB (овој избор на рабови зависи од изборот на аглите кои се помали или еднакви на 180°). Во рамнина формираме фигура $AC'D'BDC$ (цртеж десно) која се состои од триаголници $AC'D'$, $AD'B$, ABC и BDC. Од равен-



ството (1) добиваме

$$\measuredangle C'D'A+\measuredangle ABC=\measuredangle CDA+\measuredangle ABC,\ \measuredangle D'AB+\measuredangle BCD=\measuredangle DAB+\measuredangle BCD$$

од каде што

$$\measuredangle C'D'A+\measuredangle ABC=\measuredangle D'AB+\measuredangle BCD \qquad (2)$$

За да од отсечката $C'D'$ дојдеме до отсечката CD, прво треба отсечката $C'D'$ да ја ротираме за агол $\measuredangle C'D'A$ околу точката D' во негативна насока, потоа отсечката $D'A$ да ја ротираме за $\measuredangle D'AB$ околу точката A во позитивна насока, потоа отсечката AB за $\measuredangle ABC$ околу точката B, и конечно отсечката BC за агол $\measuredangle DCB$ околу точката C. Според (2) исполнето е $CD \| C'D'$ и отсечките CD и $C'D'$ се еднакво ориентирани. Затоа $DCD'C'$ е паралелограм. Од рамнокракиот триаголник ACC' добиваме

$$\overline{CC'}=2\overline{AC}\sin\tfrac{\alpha}{2}=\overline{DD'}.$$

Бидејќи аголот α не е поголем од 180°, целиот паралелограм $DCC'D'$ е содржан во ликот $AC'D'BDC$ и на секоја отсечка ZZ' која е паралелна со CC', и е придружена искршена линија $XYZTX$ која има минимална должина.

5. Докажи дека за секој природен број m постои непразно конечно множество S од точки од рамнината со следното својство: секоја точка од множеството S е на единечно растојание од точно m други точки од S.

Решение. Тврдењето од задачата е точно за $m=1$. (Доволно е да се земат две точки на единечно растојание). Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број m. При тоа нека $S=\{A_1,A_2,...,A_n\}$. Околу секоја точка A_i, $i=1,2,...,n$, опишуваме единечна кружница. Овие кружници се сечат во конечно многу точки. Нека тоа се точките $Q_1,Q_2,...,Q_r$. Нека $\vec{e}$ е единичен вектор различен од секој од векторите $\overrightarrow{A_iA_j}, \overrightarrow{A_iQ_k}$, за $i,j\in\{1,2,...,n\}$ и $k\in\{1,2,...,r\}$. При транслација за вектор $\vec{e}$ точката A_i се пресликува во точката B_i, $i\in\{1,2,...,n\}$.

Да го разгледаме множеството $S=\{A_1,A_2,...,A_n,B_1,B_2,...,B_n\}$. Секоја точка од ова множество е на единечно растојание од $m+1$ точка од тоа множество. Сега тврдењето на задачата следува од принципот на математичка индукција.

6. Разгледуваме квадратна таблица

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

која содржи ненегативни цели броеви и го има следното својство: ако $a_{ij}=0$, тогаш збирот на елементите на $i-$тата редица и $j-$тата колона е

$$a_{i1}+a_{i2}+...+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+...+a_{nj}\geq 0.$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\geq \frac{1}{2}n^2.$$

Решение. Ги разгледуваме сите можни збирови по редици и колони. Нека p е најмалиот од сите тие збирови.

Ако $p\geq n$, тогаш збирот на сите елементи на таблицата не е помал од $n\cdot p\geq n\cdot n>\frac{1}{2}n^2$.

Нека $p<n$. Со замена на редиците и колоните збировите не се менуваат. Затоа можеме да претпоставиме дека збирот на елементите од првата колона е еднаков на p и собирците кои се еднакви на нула се наредени на најгорните неста на колоната, а останатите собирци се ненулти. Бидејќи $p<n$, во првата редица има најмалку $n-p$ нули. Збирот на елементите во секоја од првите $n-p$ колони е најмалку $n-p$, па затоа збирот на елементите во сите тие колони е поголем или еднаков на $(n-p)^2$. Во последните p колони збирот на елементите е најмалку p^2. Затоа збирот на сите елементи S_n го исполнуваат условот:

$$S_n\geq (n-p)^2+p^2=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}(n-p)^2\geq \frac{1}{2}n^2,$$

што и требаше да се докаже.