

ММО 2006

1. На табла е запишан број. Ја бришеме неговата цифра на единиците и бројот што се добива го собираме со четирикратната вредност на цифрата што сме ја избришале. На тој начин добиваме нов број кој го запишуваме на таблата. Ако на таблата е запишан бројот 13^{2006} дали може, повторувајќи ја оваа постапка, по конечен број чекори да се добие бројот 2006^{13} ?

Решение. Нека a_n е n -тиот број запишан на таблата и нека u_n е неговата цифра на единиците. Имаме $a_n = 10t_n + u_n$, па затоа

$$a_{n+1} = t_n + 4u_n \equiv 40t_n + 4u_n = 4(10t_n + u_n) = 4a_n \pmod{13}. \quad (1)$$

Но, $\text{NZD}(4,13)=1$, па затоа од (1) следува дека ако 13 е делител на a_n , тогаш 13 е делител на a_{n+1} . Сега, бидејќи $13 \mid a_1 = 13^{2006}$, добиваме дека сите броеви кои се добиваат се деливи со 13, па како

$$2006^{13} \equiv 2006 \equiv 4 \pmod{13}$$

заклучуваме дека со опишаната постапка од бројот 13^{2006} не може да се добие бројот 2006^{13} .

2. Во множеството реални броеви реши ја функционалната равенка

$$f(x+y^2+z) = f(f(x)) + yf(y) + f(z). \quad (1)$$

Решение. За $x=y=z=0$ добиваме $f(f(0))=0$, а за $x=z=0$ и $y=1$ добиваме $f(1) = f(f(0)) + f(1) + f(0)$, па затоа $f(0)=0$.

Понатаму, ако во (1) прво ставиме $x=t, z=0$, а потоа ставиме $x=0, z=t$ добиваме

$$f(t+y^2) = f(f(t)) + yf(y) \text{ и } f(y^2+t) = yf(y) + f(t),$$

па затоа $f(f(t)) = f(t)$, т.е.

$$f(f(x)) = f(x). \quad (2)$$

Сега, за $y=0$ од (1) и (2) добиваме

$$f(x+z) = f(f(x)) + f(z) = f(x) + f(z),$$

т.е.

$$f(x+z) = f(x) + f(z). \quad (3)$$

Понатаму, за $x=y, z=y+1$ од (1), (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned} f(y) + yf(y) + f(y+1) &= f(f(y)) + yf(y) + f(y+1) \\ &= f(y+y^2+y+1) \\ &= f((y+1)^2) = f(0+(y+1)^2+0) \\ &= f(f(0)) + (y+1)f(y+1) + f(0) \\ &= (y+1)f(y+1) \\ &= yf(y+1) + f(y+1) \\ &= yf(y) + yf(1) + f(y+1), \end{aligned}$$

па затоа $f(y) = yf(1)$. Ако во последното равенство ставиме $y = f(1)$ и го искористиме (2), добиваме $(f(1))^2 = f(f(1)) = f(1)$, од каде следува $f(1)=0$ или $f(1)=1$. Според тоа, можни решенија на (1) се $f(x)=0$ и $f(x)=x$. Со непосредна проверка се добива дека овие функции навистина се решенија на (1).

3. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a+b+c=1$, $abc \neq 0$ и $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$. Докажи дека

$$8\left(\frac{1}{2} - ab - bc - ca\right)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq 9.$$

Решение. Од $a+b+c=1$ следува

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1,$$

$$\frac{1}{2} - ab - bc - ca = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

па затоа со примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и неравенството на триаголник добиваме

$$\begin{aligned} 8\left(\frac{1}{2} - ab - bc - ca\right)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) &= \\ &= 4(c^2 + a^2 + b^2)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \\ &\geq 4\left(\frac{|c|}{|a+b|} + \frac{|a|}{|b+c|} + \frac{|b|}{|c+a|}\right)^2 \\ &\geq 4\left(\frac{|c|}{|a|+|b|} + \frac{|a|}{|b|+|c|} + \frac{|b|}{|c|+|a|}\right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Сега, ако ставиме $x=|a|$, $y=|b|$, $z=|c|$, добиваме $x, y, z > 0$. Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\frac{3}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}} \leq \frac{x+y+z}{3} = \frac{2}{3}(x+y+z),$$

односно

$$\frac{9}{2} \frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x},$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned} \frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} &= \frac{z}{x+y} + 1 + \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 - 3 \\ &= \frac{x+y+z}{x+y} + \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} - 3 \\ &= (x+y+z)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) - 3 \\ &\geq \frac{9}{2} \frac{1}{x+y+z} (x+y+z) - 3 = \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$\begin{aligned} 8\left(\frac{1}{2} - ab - bc - ca\right)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) &= \\ &\geq 4\left(\frac{|c|}{|a|+|b|} + \frac{|a|}{|b|+|c|} + \frac{|b|}{|c|+|a|}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{9}{4} = 9. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако важи равенство во неравенството меѓу средините, што значи $x=y=z$, односно $|a|=|b|=|c|$. Понатаму, во неравенството со апсолутните вредности знак за равенство ќе важи ако и само ако a и b се со ист знак, b и c се со ист знак и c и a се со ист знак. Според тоа, a, b, c треба да се со ист знак и како $a+b+c=1$ мора да е $a=b=c=\frac{1}{3}$. Јасно, тогаш и во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц ќе важи знак за равенство.

4. Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен n -аголник и M е точка на неговата опишана кружница на помалиот од лациите A_1A_n .

а) Ако n е парен број, докажи дека важи: $\sum_{i=1}^n (-1)^i \overline{MA_i}^2 = 0$.

б) Ако n е непарен број, докажи дека важи: $\sum_{i=1}^n (-1)^i \overline{MA_i} = 0$.

Решение. а) Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен n -аголник и M е точка на неговата опишана кружница на помалиот од лациите A_1A_n . Ќе докажеме

дека $\sum_{i=1}^n \overline{MA_i}^2 = \frac{nd^2}{2}$, каде d е дијаметарот на опишаната кружница.

Нека $\angle MA_2A_1 = \alpha$. Тогаш $\angle MA_{k+1}A_k = \alpha + \frac{k\pi}{n}$, па затоа

$$\overline{MA_k} = d \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Ако ги собереме квадратите на овие отсечки, добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \overline{MA_k}^2 &= \sum_{k=1}^n d^2 \sin^2\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = d^2 \sum_{k=1}^n \frac{1 - \cos 2\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)}{2} \\ &= \frac{nd^2}{2} - \frac{d^2}{2} \sum_{k=1}^n \cos\left(2\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \frac{nd^2}{2} - \frac{d^2}{2} \left(\cos 2\alpha \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} - \sin 2\alpha \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Корените на равенката $x^n - 1 = 0$, $n > 2$ се

$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$ и од Виетовите формули имаме

$$0 = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n},$$

па затоа $\sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$. Сега, со замена во (1) добиваме

$$\sum_{k=1}^n \overline{MA_k}^2 = \frac{nd^2}{2} - \frac{d^2}{2} \left(\cos 2\alpha \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} - \sin 2\alpha \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = \frac{nd^2}{2}.$$

Ако n е парен, тогаш последното равенство важи за многуаголниците

$A_1A_3...A_{n-1}$ и $A_2A_4...A_n$, т.е. $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{MA_{2i}}^2 = \frac{nd^2}{4} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \overline{MA_{2i-1}}^2$, па затоа ва-

жи

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \overline{MA_i}^2 = 0.$$

б) Да ја означиме страната на многуаголникот со a , а најмалата негова дијагонала со m . Од теоремата на Птоломеј, применета на четириаголниците $MA_{i-1}A_iA_{i+1}$, за $1 < i < n$ се добива

$$\overline{MA_i} \cdot d = (\overline{MA_{i-1}} + \overline{MA_{i+1}})a,$$

т.е.

$$(-1)^i \overline{MA_i} \cdot d + (-1)^{i-1} \overline{MA_{i-1}} \cdot a + (-1)^{i+1} \overline{MA_{i+1}} \cdot a = 0, \quad (1)$$

а за четириаголниците $MA_1A_2A_n$ и $MA_1A_nA_{n-1}$ се добива

$$\overline{MA_2} \cdot a = \overline{MA_1} \cdot d + \overline{MA_n} \cdot a,$$

т.е.

$$(-1)^2 \overline{MA_2} \cdot a + (-1)^1 \overline{MA_1} \cdot d + (-1)^n \overline{MA_n} \cdot a = 0, \quad (2)$$

и

$$\overline{MA_{n-1}} \cdot a = \overline{MA_1} \cdot a + \overline{MA_n} \cdot d,$$

т.е.

$$(-1)^{n-1} \overline{MA_{n-1}} \cdot a + (-1)^1 \overline{MA_1} \cdot a + (-1)^n \overline{MA_n} \cdot d = 0, \quad (3)$$

Конечно, ако ги собереме (1), (2) и (3) добиваме

$$\sum_{i=1}^n (2a + d)(-1)^i \overline{MA_i} = 0, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^n (-1)^i \overline{MA_i} = 0,$$

што и требаше да се докаже.

5. Отсечките меѓу n точки такви што меѓу нив нема три колинеарни точки се обоени во една од k бои. Кој е најмалиот n таков што постои затворена искршена линија со темиња во некои од n — те точки на која сите страни се обоени со иста боја.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако меѓу n точки такви што никои три не се колинеарни се повлечени најмалку n отсечки, тогаш е нацртана затворена искршена линија со темиња во некои од тие точки.

Доказ. Ако постои точка од која е повлечена најмногу една отсечка тогаш ја исфрламе таа точка и отсечките кои се повлечени од неа ако такви отсечки постојат. По еден ваков чекор добиваме една точка помалку, а бројот на повлечените отсечки се намалува најмногу за еден, што значи дека бројот на отсечките не е помал од бројот на точките. Постапката ја продолжуваме се додека не добиеме дека од секоја точка се повлечени најмалку две отсечки. Последното мора да се случи, бидејќи ако дојдеме до три точки со три отсечки, тогаш сигурно се поврзани сите точки меѓу себе и од секоја точка има најмалку две повлечени отсечки. Кога ќе добиеме m точки со најмалку m отсечки и од секоја точка се повлечени најмалку две отсечки избираме една точка која ја означуваме со A_1 . Таа сигурно е поврзана со друга точка која ја означуваме со A_2 . Бидејќи A_2 е поврзана барем со две отсечки, добиваме дека таа е поврзана со најмалку уште една точка, да кажеме A_3 . Постапката ја продолжуваме и како бројот на точките, т.е. отсечките е конечен, мора да се вратиме во некоја од веќе избраните точки. Нека $A_j = A_i$ е првата точка која се повторува. Тогаш $A_i A_{i+1} \dots A_{j-1}$ е бараната искршена линија. ■

Бараниот број во задачата е $n = 2k + 1$.

Нека се дадени $2k + 1$ точка такви што меѓу нив нема три колинерани и нека секои две точки се поврзани со отсечка. Тогаш се повлечени $k(2k + 1)$ отсечка и мора да постојат $2k + 1$ отсечки кои се обоени со иста боја. Но, тогаш од докажаната лема следува дека постои затворена искршена линија составена од некои од овие $2k + 1$ еднобојни отсечки.

Нека се дадени $2k$ точки меѓу кои нема три колинеарни, на пример, нека се тоа темиња на правилен $2k$ — аголен $A_1 A_2 \dots A_{2k}$. Сите страни и сите дијагонали на овој многуаголник се паралелни со една од отсеч-

ките $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_kA_{k+1}, A_2A_{2k}, A_3A_1, \dots, A_{k+1}A_{k-1}$. Отсечките кои се паралелни со A_1A_2 или A_2A_{2k} ги боиме со првата боја, отсечките паралелни со A_2A_3 или A_3A_1 ги боиме со втората боја, ..., отсечките паралелни со A_kA_{k+1} или $A_{k+1}A_{k-1}$ ги боиме со k -тата боја. Поради симетрија доволно е да докажеме дека не постои затворена искршена линија обоена со првата боја. Отсечки обоени со првата боја се $A_1A_2, A_2A_{2k}, A_{2k}A_3, \dots, A_kA_{k+2}, A_{k+2}A_{k+1}$ и тие формираат искршена линија која минува низ сите темиња на многуаголникот, има почеток во A_1 и крај во A_{k+1} , па не може да е затворена и не содржи затворена искршена линија.