

Самоил Малчески, Скопје

НЕКОИ ПОСЛЕДИЦИ НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Во редовната настава се запозна со Питагоровата теорема и некои елементарни примени на истата. Во ова наше дружење ќе разгледаме неколку значајни теореми кои се последица од Питагоровата теорема. Исто така ќе се осврнеме и на некои примени на теоремите кои ќе ги докажеме.

1. ТЕОРЕМА НА АПОЛОНИЈ

На почетокот ќе ја докажеме теоремата на Аполониј, за што ни се потребни таканаречените Карноови формули.

Лема 1 (Карноови формули). Нека ABC е произволен триаголник и H е подножјето на висината повлечена од темето B . Тогаш

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AH}, \quad (1)$$

ако је аголот при темето A е остар, а ако овој агол е тап, тогаш важи

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AH}. \quad (2)$$

Доказ. Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците ABH и BCH добиваме

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \text{ и } \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2.$$

Сега, ако ги одземе последните две равенства, по среду-

вањето добиваме $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$. Понатаму,

ако триаголникот ABC е остар, тогаш $\overline{CH} = \overline{AC} - \overline{AH}$ и

со замена во последното равенство го добиваме равенството (1), а ако триаголникот е тапоаголен, тогаш $\overline{CH} = \overline{AC} + \overline{AH}$, па затоа важи равенството (2). ■

Теорема 1 (Аполониј). Ако X е точка на страната BC на $\triangle ABC$ таква што важи $\overline{BX} : \overline{CX} = m : n$, тогаш

$$n \overline{AB}^2 + m \overline{AC}^2 = n \overline{BX}^2 + m \overline{CX}^2 + (m+n) \overline{AX}^2. \quad (3)$$

Доказ. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A , тогаш $X = D$ или

$X \neq D$. Ако $X = D$, тогаш $\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2$

и $\overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{CX}^2$. Ако првото равенство го

помножиме со m , а второто со n и ги собере-

ме го добиваме равенството (3). Ако $X \neq D$,

тогаш аглите AXD и AXC не се прави. Сега,

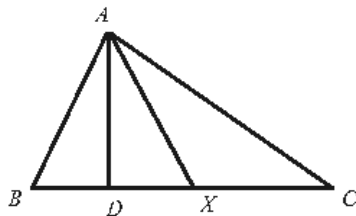
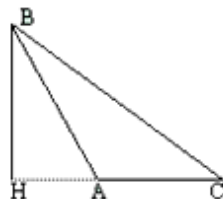
од Каарноовите формули следува

$$\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 - 2 \cdot \overline{BX} \cdot \overline{DX} \text{ и } \overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 + 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{DX}.$$

Ако првото равенство го помножиме со n , а второто со m , по собирањето на добиените равенства го добиваме равенството (3). ■

Задача 1. Ако X е произволна точка на правоаголникот $ABCD$, тогаш важи

$$\overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{DX}^2. \text{ Докажи!}$$



Решение. Нека O е пресек на дијагоналите AC и BD . Бидејќи пресечната точка ги полови дијагоналите, од теоремата на Аполониј следува:

$$\overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 + 2\overline{OX}^2 \text{ и } \overline{BX}^2 + \overline{DX}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OD}^2 + 2\overline{OX}^2.$$

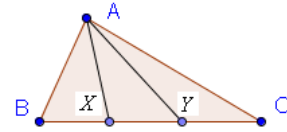
Сега, имајќи предвид дека $\overline{AC} = \overline{BD}$, од последните две равенства следува тврдењето на задачата. ■

Задача 2. Ако X и Y се точки на страната BC такви што $\overline{BX} = \overline{XY} = \overline{YC}$, тогаш $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 + 4\overline{XY}^2$. Докажи!

Решение. Од теоремата на Аполониј следува:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AY}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{XY}^2 + 2\overline{AX}^2,$$

$$\overline{AX}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{XY}^2 + \overline{YC}^2 + 2\overline{AY}^2.$$



Последните равенства ги собираме, и ако искористиме дека $\overline{BX} = \overline{XY} = \overline{YC}$, по средување на добиеното равенство наоѓаме $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 + 4\overline{XY}^2$. ■

Задача 3. Ако AA_1, BB_1, CC_1 се тежишните линии на $\triangle ABC$, а T е неговото тежиште, докажи дека

$$\text{а) } \overline{AA_1}^2 = \frac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2),$$

$$\text{б) } \overline{AA_1}^2 + \overline{BB_1}^2 + \overline{CC_1}^2 = \frac{3}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2),$$

$$\text{в) } \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 + \overline{CT}^2 = \frac{1}{3}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

Решение. а) Ако искористиме дека A_1 е средина на страната BC , од теоремата на Аполониј следува $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BA_1}^2 + \overline{A_1C}^2 + 2\overline{AA_1}^2$. Сега во последното равенство заменуваме $\overline{BA_1} = \overline{CA_1} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ и ако го изразиме $\overline{AA_1}^2$ го добиваме бараното равенство.

б) Ако според а) ги изразиме $\overline{AA_1}^2$, $\overline{BB_1}^2$ и $\overline{CC_1}^2$ и ги собереме добиените равенства, го добиваме бараното равенство.

в) Ако го искористиме фактот дека тежиштето ја дели тежишната линија во однос 2:1, и равенството под б) го поделиме со $\frac{9}{4}$, го добиваме бараното равенство. ■

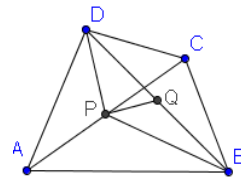
Задача 4. Ако P и Q се средините на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$, докажи дека $\overline{PQ}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2)$.

Решение. Отсечките PQ, BP, DP се тежишни линии на триаголниците BDP , BAC, DAC , соодветно, па од претходната задача следува

$$\overline{PQ}^2 = \frac{1}{4}(2\overline{PB}^2 + 2\overline{PD}^2 - \overline{BD}^2),$$

$$\overline{BP}^2 = \frac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2),$$

$$\overline{DP}^2 = \frac{1}{4}(2\overline{CD}^2 + 2\overline{DA}^2 - \overline{AC}^2).$$



Со замена на второто и третото равенство во првото, по средувањето го добиваме бараното равенство. ■

2. ТЕОРЕМА НА ЛАЈБНИЦ

Теорема 2 (Лајбниц). Ако T е тежиште на $\triangle ABC$ и P е произволна точка, тогаш

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2 + 3\overline{PT}^2.$$

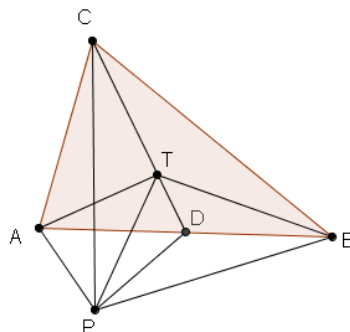
Доказ. Нека D е средината на страната AB на $\triangle ABC$. За тежиштето T важи $\overline{CT} : \overline{DT} = 2 : 1$. Со примена на теоремата на Аполониј на триаголниците BCD, PAB, TAB добиваме

$$\overline{PC}^2 + 2\overline{PD}^2 = \overline{TC}^2 + 2\overline{TD}^2 + 3\overline{PT}^2$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{PD}^2$$

$$\overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{TD}^2.$$

Ако ги собереме првите две равенства и го примениме третото равенство, го добиваме бараното равенство. ■



Задача 5. Нека a, b, c се должините на страните, O и r се центарот и радиусот на опишата кружнице, а T и H се тежиштето и ортоцентарот на $\triangle ABC$. Докажи дека

$$\text{а) } \overline{OT}^2 = r^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2), \quad \text{б) } \overline{OH}^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\text{в) } \overline{TH}^2 = 4r^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2), \quad \text{г) } \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = 12r^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Решение. а) Според теоремата на Лајбниц добиваме

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2 + 3\overline{OT}^2, \text{ т.е. } \overline{OT}^2 = r^2 - \frac{1}{3}(\overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2).$$

Сега од задсача 3 в) следува $\overline{OT}^2 = r^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

б) Од теорема на Ојлер следува $\overline{OH} = 3\overline{OT}$, па од равенството под а) добиваме $\overline{OH}^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

в) Аналогно како под б) ако искористиме дека $\overline{TH} = 2\overline{OT}$, го добиваме бараното равенство.

г) Од теоремата на Лајбниц следува:

$$\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 + \overline{CT}^2 + 3\overline{TH}^2.$$

Сега од задача 3 в) и равенството под а) следува бараното равенство. ■

3. ТЕОРЕМА НА КАРНО

Теорема 3 (Карно). Ако P, Q, R се точки од правите BC, CA, AB на кои припаѓаат страните на $\triangle ABC$, тогаш правите кои минуваат низ точките P, Q, R и се нормални на правите BC, CA, AB се сечат во една точка ако и само ако

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 + \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 + \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2 = 0. \quad (4)$$

Доказ. Нека нормалите на страните BC, CA, AB во точките P, Q, R се сечат во точката O (направи цртеж). Тогаш од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{OC}^2, \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OA}^2, \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OB}^2,$$

Ако ги собереме последните равенства го добиваме равенството (4).

Ќе го докажеме обратното тврдење. Нека O е пресечната точка на нормалите од P и Q . Нека подножјето на нормалата од O на правата AB е точката R_1 . Треба да докажеме дека $R \equiv R_1$. Од веќе докажаното тврдење следува

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 + \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 + \overline{AR_1}^2 - \overline{R_1B}^2 = 0. \quad (5)$$

Сега од (4) и (5) добиваме $\overline{AR_1}^2 - \overline{R_1B}^2 = \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2$, т.е.

$$(\overline{AR_1} - \overline{R_1B})(\overline{AR_1} + \overline{R_1B}) = (\overline{AR} - \overline{RB})(\overline{AR} + \overline{RB}), \text{ т.е. } (\overline{AR_1} - \overline{R_1B})\overline{AB} = (\overline{AR} - \overline{RB})\overline{AB}.$$

По кратењето и префрлањето на една страна се добива: $\overline{AR_1} - \overline{R_1B} - \overline{AR} + \overline{RB} = 0$, т.е. $2\overline{RR_1} = 0$, од каде следува $R \equiv R_1$. ■

Задатак 6. Докажи дека симетралите на страните на триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нека P, Q, R се средините на страните BC, CA, AB . Бидејќи симетралите минуваат низ точките P, Q, R , тие се нормални на страните BC, CA, AB и $\overline{BP} = \overline{PC}, \overline{CQ} = \overline{QA}, \overline{AR} = \overline{RB}$, т.е. е исполнето равенството (4), од теоремата на Карно следува дека тие се сечат во една точка. ■

Задача 7. Докажи дека правите определени со висините на триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нека P, Q, R се подножјата на висините на триаголникот повлечени од темињата A, B, C , соодветно. Тогаш точни се следниве равенства:

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2, \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BA}^2, \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2.$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме дека е исполнети равенството (4), од каде следува точноста на тврдењето на задачата. ■

4. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Ако D е точка на страната BC на $\triangle ABC$ таква што $\overline{BD} = 2\overline{DC}$, докажи дека $\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3\overline{AD}^2 + 6\overline{CD}^2$.

2. Ако a, b, c се должините на страните, s е полупериметарот и l_a е должината на симетралата на внатрешниот агол во темето A на $\triangle ABC$, докажи дека $l_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$.

3. Ако H, T, O, S се ортоцентарот, тежиштето, центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, докажи дека $\overline{SH}^2 + 2\overline{SO}^2 = 3(\overline{ST}^2 + 2\overline{OT}^2)$.

4. Ако за $\triangle ABC$ важи $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 5\overline{BC}^2$ докажи дека тежишните линии во темињата B и C се нормални.

5. Докажи дека радиусот на кружницата која ги допира катетите и опишаната кружница на правоаголен триаголник е еднаков на дијаметарот на впишаната кружница на тој триаголник.