

Регионален натпревар 1984

I година

1. Покажи дека на единствен начин со замена на различни букви со различни цифри се добива

$$\begin{array}{rcccc} & \text{Ш} & \text{Е} & \text{С} & \text{Т} \\ & \text{Е} & \text{Д} & \text{Н} & \text{О} \\ + & & \text{Д} & \text{В} & \text{Е} \\ \hline \text{Д} & \text{Е} & \text{В} & \text{Е} & \text{Т} \end{array}$$

при што $\text{Н} + 1 = \text{Т}$. (броевите не започнуваат со 0)

Решение. Очигледно е дека $\text{Д} = 1$. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се броевите кои ги памти-
ме при собирањето од десно на лево. Воочуваме дека $x_4 = 1$. Од

$$\text{Т} + \text{О} + \text{Е} = 10x_1 + \text{Т}$$

следува дека $x_1 = 1$. Понатаму имаме

$$\text{Ш} + \text{Е} + x_3 = 10 + \text{Е}$$

(зошто $x_4 = 1$), т.е. $\text{Ш} + x_3 = 10$. Бидејќи

$$\text{Е} + 1 + 1 + x_2 < 20,$$

заклучуваме дека $x_3 \leq 1$, па значи $x_3 = 1$, $\text{Ш} = 9$. Од $x_3 = 1$ се добива дека $\text{Е} \in \{6, 7, 8\}$
(напиши ја соодветната шема).

Ако $\text{Е} = 6$, тогаш $x_2 = 2$, $\text{В} = 0$; но, $\text{С} + \text{Н} + \text{О} + 1 < 20$, па добиваме дека
 $x_2 \leq 1$. Значи, $\text{Е} \neq 6$.

Ако $\text{Е} = 7$, тогаш $x_2 = 1$ и $\text{В} = 0$; но, $\text{С} + \text{Н} + 1 = 10 + 7$, т.е. $\text{С} + \text{Н} = 16$; од
друга, пак, страна, $\text{С} + \text{Н} \leq 8 + 6 = 14$. Значи, $\text{Е} \neq 7$.

За $\text{Е} = 8$, добиваме $\text{О} = 2$; од $\text{С} + \text{Н} + 1 = 8$ и $\text{Н} + 1 = \text{Т}$, добиваме $\text{С} = 3$,
 $\text{Н} = 4$, $\text{Т} = 5$.

Следствено,

$$\begin{array}{rcccc} & 9 & 8 & 3 & 5 \\ & 8 & 1 & 4 & 2 \\ + & & 1 & 0 & 8 \\ \hline 1 & 8 & 0 & 8 & 5 \end{array}$$

2. Нека x, y и $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ се рационални броеви. Покажи дека и броевите $\sqrt{x}$,
 $\sqrt{y}$ се рационални.

Решение. Да ставиме $\sqrt{x} + \sqrt{y} = p$, каде што p е рационален број. Со quadri-
рање на равенството $\sqrt{x} = p - \sqrt{y}$ добиваме

$$2p\sqrt{y} = p^2 + y - x,$$

од каде што следува дека $\sqrt{y}$ е рационален број. Според тоа, $\sqrt{x} = p - \sqrt{y}$ е исто така рационален број.

3. Две илјади домина се исправени во редица на еднакво (и мало) растојание едно од друго. Потоа, домината се нумерираат од 1 до 2000. Пред доминото со реден број 1 се редат на ист начин уште неколку домина, а на другиот крај k пати повеќе ($k > 8$). Едновременно и со еднаква сила крајните домина се поттурнуваат кон средината. Колку домина се наредени, ако на крајот останало доминото со реден број 1984?

Решение. Нека x е бројот на домината поставени пред доминото со реден број 1; тогаш $16 + kx = 1983 + x$ од каде што добиваме $(k-1)x = 1967$. Бидејќи $1967 = 7 \cdot 281$, а броевите 7 и 281 се прости, добиваме $k-1 = 281$, $x = 7$, зошто по услов $k > 8$. Според тоа, наредени се вкупно

$$(k+1)x + 2000 = 283 \cdot 7 + 2000 = 3981$$

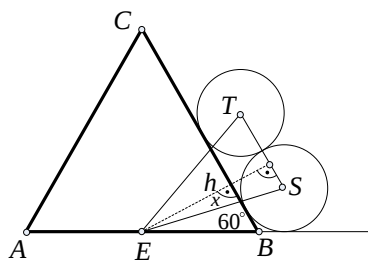
домино.

4. Даден е рамностран триаголник ABC со страна 12 cm. Две кружници со ист радиус еднаков на $\sqrt{3}$ cm ја допираат страната BC од надворешната страна на триаголникот, се допираат меѓу себе и едната кружница ја допира правата AB . Да се најде плоштината на триаголникот чии темиња се центрите на кружниците и средината на страната AB .

Решение. Нека S и T се центрите на кружниците и нека E е средината на страната AB (види цртеж). Тогаш, имаме $\overline{ST} = 2\sqrt{3}$, $x = \overline{EB} \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$, $h = x + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Според тоа, плоштината P на триаголникот EST ќе биде:

$$P = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 12.$$



II година

1. Возраста на едно лице во оваа година (1984) е еднаква на збирот на цифрите од годината на неговото раѓање. Колку години има лицето?

Решение. Лицето има најмногу $9+9+9+9=36$ години, што значи дека е родено во XX -от век, т.е. првите две цифри на годината на неговото раѓање се 1 и 9. Нека x е цифрата на десетките, а y цифрата на единиците од годината на раѓа-

њето; Според условот од задачата имаме $1+9+x+y=1984-(1000+900+10x+y)$, т.е. $11x+2y=74$. Бидејќи $0 \leq x, y \leq 9$, од равенката добиваме $x=6$, $y=4$, односно лицето е родено 1964 година и сега има $1+9+6+4=20$ години.

2. Докажи дека за секој цел број m и $A = \frac{m^4}{24} + \frac{m^3}{4} + \frac{11m^2}{24} + \frac{m}{4}$ е цел број.

Решение. Дадениот израз да го напишеме на следниот начин:

$$\begin{aligned} A &= \frac{m}{24}(m^3 + 6m^2 + 11m + 6) \\ &= \frac{m}{24}(m^3 + 3m^2 + 2m + 3m^2 + 9m + 6) \\ &= \frac{m}{24}[m(m^2 + 3m + 2) + 3(m^2 + 3m + 2)] \\ &= \frac{m}{24}(m^2 + 3m + 2)(m + 3) \\ &= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24} \end{aligned}$$

Значи, за да докажеме дека A е цел број, треба да докажеме дека

$$n = m(m+1)(m+2)(m+3)$$

е делив со 24. Производ од два последователни броја е делив со 2; од четири последователни броеви еден е делив со 4; значи, бројот n е делив со 8. Производ од три последователни броја е делив со 3, па, значи, n е делив со 3. Броевите 3 и 8 се заемно прости, што значи дека n е делив и со бројот $3 \cdot 8 = 24$.

3. Основата на права четиристрана призма е ромб чии дијагонали се разликуваат за 10 cm. Ако поголемата дијагонала се зголеми за 2 cm, а помалата се намали за 1 cm, плоштината на ромбот останува иста.

Пресметај ја плоштината на призмата ако нејзината висина е двапати поголема од страната на ромбот.

Решение. Ако d_1 и d_2 се дијагоналите на ромбот, тогаш според условот на задачата, имаме:

$$d_1 - d_2 = 10, \quad \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{(d_1 + 2)(d_2 - 1)}{2},$$

од каде што добиваме $d_1 = 22$ cm, $d_2 = 12$ cm. Дијагоналите на секој ромб се заемно нормални, па за страната a на ромбот ќе имаме:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 157, \quad a = \sqrt{157} \text{ cm}.$$

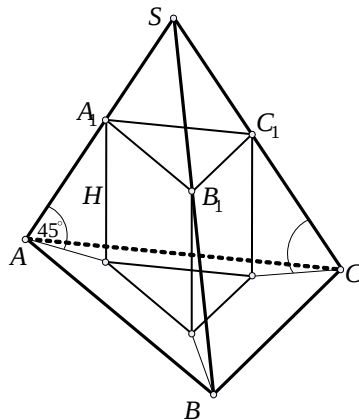
Висината на призмата е $H = 2\sqrt{157}$ cm, па за плоштината P на призмата имаме:

$$P = 2B + M = 2 \frac{d_1 d_2}{2} + 4aH = 1520 \text{ cm}^2.$$

4. При тристрана пресечена пирамида рабовите на помалата основа се 7 cm, 5 cm и 3 cm, а бочните рабови со рамнината на поголемата основа зафаќаат агол

од 45° . Да се пресмета волуменот на пресечената пирамида, ако нејзината висина е $\frac{2}{3}$ од висината на соодветната пирамида.

Решение. Нека $ABC A_1 B_1 C_1$ е пресечената пирамида, а $ABCS$ соодветната пирамида (види цртеж). Од тоа што бочните рабови на поголемата основа зафаќаат агол од 45° , следува дека $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$, па значи, проекцијата на S врз рамнината ABC е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC . Сега, лесно се увидува дека $H = 2R_1$, каде што H е висината на пресечената пирамида, а R_1 е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот $A_1 B_1 C_1$.



Според Хероновата формула, за плоштината P_1 на триаголникот $A_1 B_1 C_1$ имаме:

$$P_1 = \sqrt{s_1(s_1 - a_1)(s_1 - b_1)(s_1 - c_1)} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2,$$

па

$$R_1 = \frac{a_1 b_1 c_1}{4P_1} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, \quad H = \frac{14\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

Висината на соодветната пирамида е $H_1 = \frac{3}{2}H = \frac{14\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$, па за плоштината P на триаголникот ABC ќе имаме:

$$P : P_1 = \left(\frac{14\sqrt{3}}{2}\right)^2 : \left(\frac{14\sqrt{3}}{2} - \frac{14\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

т.е. $P = 9P_1$.

На крајот за волуменот V на пресечената пирамида ќе имаме:

$$V = \frac{H}{3}(P + P_1 + \sqrt{PP_1}) = \frac{13}{3}H \cdot P_1 = 227,5 \text{ cm}^3.$$

III година

1. При $xyz \neq 0$ нека важат равенствата $x + y + z = xyz$, $x^2 = yz$. Да се докаже дека y и z се реални ако и само ако $x^2 \geq 3$.

Решение. Дадените равенства да ги запишеме во обликот

$$y + z = x^3 - x, \quad yz = x^2.$$

Значи, y и z се корени на квадратната равенка

$$t^2 - (x^3 - x)t + x^2 = 0,$$

која што има реални решенија ако и само ако $D \geq 0$, $x^2(x^4 - 2x^2 - 3) \geq 0$, т.е. ако и само ако

$$x^4 - 2x^2 - 3 \geq 0,$$

од каде што добиваме $x^2 \geq 3$.

2. Даден е збирот $S = \cos \frac{n\pi}{7} + \cos \frac{3n\pi}{7} + \cos \frac{5n\pi}{7}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако n не е делив со 7, тогаш

$$S = -\frac{1}{2} \cos n\pi = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{за } n \text{ непарен број} \\ -\frac{1}{2} & \text{за } n \text{ парен број} \end{cases}.$$

Докажи! Колку е S ако n е делив со 7?

Решение. Ако n е делив со 7 ($n = 7k$), тогаш

$$S = \cos k\pi + \cos 3k\pi + \cos 5k\pi.$$

Ако k е парен, тогаш $S = 3$, а ако k е непарен, тогаш $S = -3$.

Нека n не е делив со 7; се уочува дека:

$$\sin \frac{2n\pi}{7} = 2 \sin \frac{n\pi}{7} \cos \frac{n\pi}{7},$$

$$\sin \frac{6n\pi}{7} - \sin \frac{4n\pi}{7} = 2 \sin \frac{n\pi}{7} \cos \frac{5n\pi}{7}$$

$$\sin \frac{4n\pi}{7} - \sin \frac{2n\pi}{7} = 2 \sin \frac{n\pi}{7} \cos \frac{3n\pi}{7}$$

Собирајќи ги овие равенства добиваме

$$\sin \frac{6n\pi}{7} = 2S \sin \frac{n\pi}{7},$$

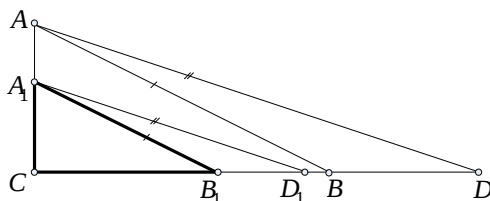
од каде што добиваме

$$S = \frac{\sin \frac{6n\pi}{7}}{2 \sin \frac{n\pi}{7}} = \frac{\sin(n\pi - \frac{n\pi}{7})}{2 \sin \frac{n\pi}{7}} = -\frac{1}{2} \cos n\pi.$$

(Делењето со $\sin \frac{n\pi}{7}$ е можно, зашто n не е делив со 7, па $\sin \frac{n\pi}{7} \neq 0$).

3. Да се конструира правоаголен триаголник кај кој едната катета е двапати поголема од другата и е познат збирот од катетите и висината спуштена на хипотенузата (т.е. познато е $a + b + h_c$).

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник, така што $\overline{BC} = 2\overline{AC}$ и нека h е висината спуштена на хипотенузата. Тогаш $\overline{AB}^2 = 5\overline{AC}^2$, па за плоштината P добиваме



$$P = \overline{AC}^2 \text{ и } P = \frac{\sqrt{5} \cdot \overline{AC} \cdot h}{2}.$$

Оттука добиваме

$$h = \frac{\overline{AC}}{\sqrt{5}} \text{ и } \frac{\overline{AC} + \overline{BC} + h}{\overline{AC}} = 3 + \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Од дискусијата произлегува следнава конструкција.

Конструираме правоаголен триаголник A_1B_1C за кој $\overline{B_1C} = 2\overline{A_1C}$ (види цртеж).

На полуправата нанесуваме точки D и D_1 , така што

$$\overline{CD_1} = \overline{A_1C} + \overline{B_1C} + h \text{ и } \overline{CD} = a + b + h$$

(дадениот збир). Од односите

$$\overline{CD_1} : \overline{CA_1} = 3 + \frac{2}{\sqrt{5}} = \overline{CD} : \overline{CA} \text{ и } \overline{BC} = 2\overline{AC}$$

ги наоѓаме точките A и B со што триаголникот е конструиран.

Да забележиме дека задачата има единствено решение.

4. Реши ја равенката $(x^{\log_2 x} - 1)^2 = 1$.

Решение. По ред имаме:

$$x^{2\log_2 x} - 2x^{\log_2 x} + 1 = 1$$

$$x^{2\log_2 x} = 2x^{\log_2 x}$$

$$2(\log_2 x)^2 = \log_2 2 + (\log_2 x)^2$$

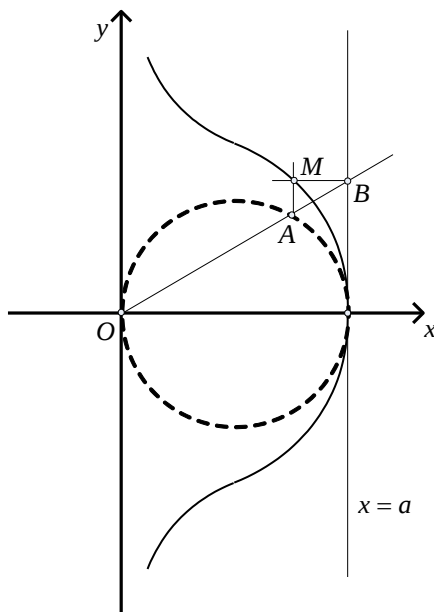
$$(\log_2 x)^2 = 1$$

$$\log_2 x = \pm 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ и } x_2 = 2.$$

IV година

1. Дадена е правата $x = a$ ($a > 0$) и кружница со радиус a која минува низ координатниот почеток и ја допира дадената права. Низ координатниот почеток е повлечена произволна права, којашто ја сече кружницата во точката A ($A \neq O$), а дадената права во точката B . Низ точките A и B се повлечени прави паралелни соодветно со Oy и Ox . Нека тие прави се сечат во точката M . Најди го геометриското место на точките M .



Решение. Равенката на кружницата е $x^2 + y^2 - ax = 0$, а равенката на произволна права низ координатниот почеток е $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Според тоа, ќе имаме:

$$A\left(\frac{a}{1+k^2}, \frac{ak}{1+k^2}\right), B(a, ak).$$

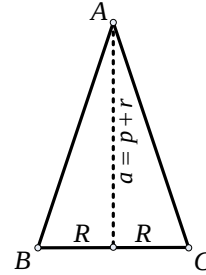
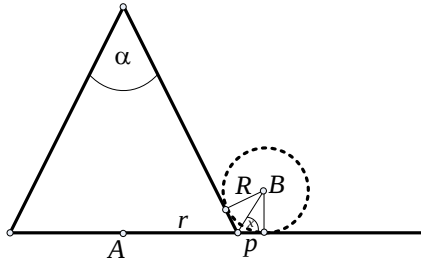
За координатите x, y на точката M имаме: $x = \frac{2}{1+k^2}$, $y = ak$, од каде што добиваме (со елиминација на k)

$$x(a^2 + y^2) = a^3,$$

што претставува равенка на бараното геометриско место. Графикот е даден на цртежот.

2. Даден е прав кружен конус со радиус r и агол α при врвот на оскиниот пресек. Две сфери со радиус R го допираат конусот однадвор, се допираат меѓу себе и ја допираат рамнината во која лежи основата на конусот. Да се најде плоштината на триаголникот чији темиња се центрите на сферите и центарот на основата на конусот.

Решение. Нека B и C се центрите на сферите, а A центарот на основата на конусот (види цртежи). Тогаш имаме:



$$\overline{BC} = 2R, \quad x = \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}, \quad p = R \operatorname{ctg} x, \quad \overline{AB}^2 = (r + p)^2 + R^2.$$

Јасно дека $\overline{AC} = \overline{AB}$, па

$$P_{ABC} = R(p + r) = R\left(r + R \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3. Докажи дека елементите на Паскаловиот триаголник, кои лежат на назначената права, имаат својство да разликата на квадратите на кои било два последователни члена е еднаков на кубот од некој цел број.

Решение. Членот од n -тата редица на Паскаловиот триаголник што лежи на назначената права е $\binom{n}{n-2}$, а соодветниот член од $(n+1)$ -та редица е $\binom{n+1}{n-1}$. Според тоа, имаме

$$\binom{n+1}{n-1}^2 - \binom{n}{n-2}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3.$$

4. Одреди ги заедничките членови на аритметичките прогресии:

1, 5, 9, 13, 17, 21, ...

4, 15, 26, 37, ...

Решение. Нека a_n и b_m се општите членови на аритметичките прогресии;
тогаш имаме:

$$a_n = 1 + 4(n-1), \quad b_m = 4 + 11(m-1).$$

Треба да ја решиме равенката $a_n = b_m$ во множеството на природните броеви.

Оваа равенка се сведува на решавање на равенката

$$11m = 4(n+1)$$

од каде што добиваме $n+1 = 11k$, $m = 4k$. Според тоа, имаме $a_{11k-1} = b_{4k}$.