Шефкет Арсланагиќ,
Сараево

НЕРАВЕНСТВА СО ФАКТОРИЕЛИ

Во математиката за скратено означување на производот на првите n природни броеви ја користиме ознаката $n!$, читај n факториел. Според тоа,

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = n!.$$

Притоа, по дефиниција земаме $0!=1$. Покрај овие ознаки ги користиме и ознаките

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot (2n)$$

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot (2n-1).$$

Во случајов, повторно по дефиниција, земаме $0!!=1, 1!!=1$. Јасно

$$(2n+2)!! = (2n)!!(2n+2) \text{ и } (2n+1)!! = (2n-1)!!(2n+1) .$$

Во оваа статија ќе се осврнеме на некои неравенства во кои се јавуваат факториели. Пред да преминеме на разгледување на примери, да забележиме дека овој вид неравенства најчесто се докажува со помош на математичка индукција.

Задача 1. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи неравенството

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n}} . \tag{1}$$

Решение. Прв начин. Ги воведуваме ознаките

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \text{ и } B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1} .$$

Од

$$\frac{2}{3}>\frac{1}{2}, \frac{4}{5}>\frac{3}{4}, \frac{6}{7}>\frac{5}{6}, \ldots, \frac{2n-2}{2n-1}>\frac{2n-3}{2n-2} \text{ и } 1>\frac{2n-1}{2n}$$

следува $B>A$. Понатаму,

$$AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{2n}$$

и како $B>A$ добиваме $A^2<AB=\frac{1}{2n}$, т.е. $A<\frac{1}{\sqrt{2n}}$, со што е покажано десното неравенство во (1).

Понатаму, бидејќи

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}, \frac{4}{5}<\frac{5}{6}, \ldots, \frac{2n-2}{2n-1}<\frac{2n-1}{2n}$$

добиваме

$$B<2A=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} .$$

Според тоа, $2A^2>AB=\frac{1}{2n}$, т.е. $A>\frac{1}{2\sqrt{n}}$ со што е покажано левото неравенство во (1).

Втор начин. Имаме

$$A^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} ,$$

па затоа

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2-1}{(2n)^2}<A^2<\frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2-1},$$

што значи

$$\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{4\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 6}{6\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-2)\cdot 2n}{2n\cdot 2n}<A^2<\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)\cdot(2n-1)}{(2n-1)\cdot(2n+1)},$$

од каде после скратувањето на дропките наоѓаме $\frac{1}{4n}<A^2<\frac{1}{2n+1}$. Според тоа,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \qquad (2)$$

и како $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n}}$ добиваме дека неравенството (1) е исполнето. ♦

Забелешка 1. Со вториот начин на решавање на задача 1 покажавме дека на десната страна во (1) важи построго неравенство, т.е. важи неравенството (2). Во следната задача ќе докажеме дека на десната страна на (2) важи уште построго неравенство.

Задача 2. Докажи

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}},\text{ за секој } n\in\mathbb{N}. \qquad (3)$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош ма математичка индукција.

i) За $n=1$ имаме $\frac{1!!}{2!!}=\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}$, т.е. неравенството важи.

ii) Нека претпоставиме дека (3) важи за $n=k$, т.е. дека

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

Ако последното неравенство го помножиме $\frac{2k+1}{2k+2}$ добиваме

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}. \qquad (4)$$

Останува да докажеме дека $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\bullet\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Навистина, последното неравенство следува од низата неравенства

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3k+4}} \quad&\Leftrightarrow\quad (2k+1)\sqrt{3k+4}\le(2k+2)\sqrt{3k+1}\\ &\Leftrightarrow\quad (2k+1)^2(3k+4)\le(2k+2)(3k+1)\\ &\Leftrightarrow\quad 12k^3+28k^2+19k+4\le 12k^3+28k^2+20k+4\\ &\Leftrightarrow\quad 0\le k\end{aligned}$$

и како последното неравенство е исполнето за секој $k\in\mathbb{N}$, добиваме дека

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3k+4}},$$

што заедно со (4) дава

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\le\frac{1}{\sqrt{3k+4}},$$

т.е. неравенството (3) важи и за $n = k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (3) важи за секој $n \in \mathbb{N}$. ♦

Задача 3. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ е точно неравенството

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \,. \tag{5}$$

Доказ. За секој $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ важи

$$k(n-k+1) - n = k(n-k) + k - n = k(n-k) - (k-n) = (n-k)(k-1) \geq 0$$

па затоа $n \leq k(n-k+1)$, за секој $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Според тоа, точни се следниве неравенства

$$\begin{aligned} &n \leq 1 \cdot n \\ &n \leq 2 \cdot (n-1) \\ &n \leq 3 \cdot (n-2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &n \leq (n-2) \cdot 3 \\ &n \leq (n-1) \cdot 2 \\ &n \leq n \cdot 1. \end{aligned}$$

Ако ги помножиме последните неравенства го добиваме неравенството

$$n^n \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \cdot n! = (n!)^2$$

кое е еквивалентно со неравенството (5). ♦

Задача 4. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$2^{n-1} n! \leq n^n \,. \tag{6}$$

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned} (n-1)! &= \sqrt{(n-1)!} \cdot \sqrt{(n-1)!} = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)} \\ &= \sqrt{1 \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-2)} \cdot \ldots \cdot \sqrt{(n-2) \cdot 2} \cdot \sqrt{(n-1) \cdot 1} \\ &\leq \frac{1+(n-1)}{2} \cdot \frac{2+(n-2)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2)+2}{2} \cdot \frac{(n-1)+1}{2} = \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

кое е кевивалентно со неравенството $2^{n-1}(n-1)! \leq n^{n-1}$. Последното неравенство го множиме со n и го добиваме неравенството (6). ♦

Задача 5. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$ важи неравенството

$$2!4!6!\ldots(2n)! > [(n+1)!]^n \,. \tag{7}$$

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на математичка индукција.

i) За $n = 2$ имаме $2!4! = 48 > 36 = 6^2 = (3!)^2$, т.е. неравенството (7) важи.

ii) Нека претпоставиме дека неравенството (7) важи за $n = k-1$, т.е. дека

$$2!4!6!\ldots(2k-2)! > [k!]^{k-1}.$$

Ако последното неравенство го помножиме со $(2k)!$ добиваме

$$2!4!6!...(2k-2)!(2k)! > (k!)^{k-1}(2k)! = \frac{(k!)^k(2k)!}{k!} = 2k\cdot(2k-1)\cdot...\cdot(k+1)\cdot(k!)^k$$
$$> \underbrace{(k+1)\cdot...(k+1)}_{k \text{ пати}}\cdot(k!)^k = [(k+1)!]^k,$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n\geq 2$. ♦

Задача 6. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\leq\frac{2n-1}{n}. \tag{8}$$

Решение. Последователно имаме

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1+\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+...+\frac{n-(n-1)}{(n-1)\cdot n}$$
$$=1+(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+...+(\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n})=2-\tfrac{1}{n}=\tfrac{2n-1}{n},$$

што и требаше да се докаже. ♦

Задача 7. Користејќи го неравенството $(1+\frac{1}{k})^k<3$, за секој $k\in\mathbb{N}$, докажи дека

$$(\tfrac{n}{3})^n<n!, \tag{9}$$

за секој природен број n.

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на математичка индукција

i) За $n=1$ имаме $1!=1>\frac{1}{3}=(\frac{1}{3})^1$, т.е. неравенството (9) важи.

ii) Нека претпоставиме дека неравенството (9) важи за $n=k$, т.е. дека

$$(\tfrac{k}{3})^k<k!.$$

Последното неравенство го множиме со $k+1$ и добиваме

$$(k+1)!>(\tfrac{k}{3})^k(k+1)=\frac{k^k(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)^k}\cdot 3=(\tfrac{k+1}{3})^{k+1}\cdot\frac{3}{(\frac{k+1}{k})^k}=(\tfrac{k+1}{3})^{k+1}\cdot\frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k}$$

и како $(1+\frac{1}{k})^k<3$ од последното неравенство следува $(k+1)!>(\frac{k+1}{3})^{k+1}$, т.е. неравенството (9) важи и за $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (9) важи за секој природен број n. ♦

Задача 8. Докажи го неравенството

$$\frac{\log(k+1)!}{k+1}>\frac{\log k!}{k},\ k\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

Решение. Неравенството (10) е еквивалентно со низата неравенства

$$\frac{\log(k+1)!}{k+1}>\frac{\log k!}{k}\quad\Leftrightarrow\quad k\log(k+1)!>(k+1)\log k!\quad\Leftrightarrow\quad\log[(k+1)!]^k>\log(k!)^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow\quad[(k+1)!]^k>(k!)^{k+1}\quad\Leftrightarrow\quad(k+1)^k(k!)^k>(k!)^k k!$$
$$\Leftrightarrow\quad(k+1)^k>k!. \tag{11}$$

Последното неравенство ќе го докажеме со помош на математичка индукција.

i) За $k=1$ имаме $(1+1)^1 > 1 = 1!$, т.е. неравенството (11) важи.

ii) Нека претпоставиме дека неравенството (11) важи за $k=m$, т.е. дека

$$(m+1)^m > m!.$$

Ако последното неравенство го помножиме со $m+1$ и земеме предвид дека $(m+2)^{m+1} > (m+1)^{m+1}$ добиваме

$$(m+2)^{m+1} > (m+1)^{m+1} > (m+1)\cdot m! = (m+1)!,$$

т.е. неравенството (11) важи за $k=m+1$. Од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (11) важи за секој природен број k, што значи дека неравенството (10) важи за секој природен број n. ♦

Задача 9. Докажи го неравенството

$$\log\tfrac{n+1}{2} \geq \tfrac{\log n!}{n},\ n\in\mathbb{N}, \qquad (12)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека за секој $k=1,2,...,n$ важи

$$k(n-k+1) \leq [\tfrac{k+(n-k+1)}{2}]^2 = (\tfrac{n+1}{2})^2.$$

Ако во последното неравенство последователно ставиме $k=1,2,...,n$ добиваме

$$1\cdot n \leq (\tfrac{n+1}{2})^2$$
$$2\cdot(n-1) \leq (\tfrac{n+1}{2})^2$$
$$.........................$$
$$(n-1)\cdot 2 \leq (\tfrac{n+1}{2})^2$$
$$n\cdot 1 \leq (\tfrac{n+1}{2})^2$$

и ако ги помножиме последните неравенства наоѓаме

$$(n!)^2 \leq (\tfrac{n+1}{2})^{2n},\text{ т.е. } (n!)^{\frac{1}{n}} \leq \tfrac{n+1}{2}.$$

Конечно, ако го логаритмираме последното неравенство го добиваме неравенството (12). ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

На крајот од оваа статија ти предлагаме самостојно да ги решиш следниве задачи.

1. Докажи ги неравенствата:

   а) $n^n > (2n-1)!!, n>1$, б) $(n+1)^n > (2n)!!, n>1$,

   в) $n! < (\frac{n+1}{2})^n, n>1$, г) $(n+1)^{n-1}(n+2)^n > 3^n(n!)^2, n>1$.

2. Докажи го неравенството: $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n \geq 2$.
3. Докажи ги неравенствата:

   а) $n! > n^{\frac{n}{2}}, n < 2$, б) $2^{\frac{n(n-1)}{2}} > n!, n > 2$,

   в) $\frac{n^n (n+1)^{3n}}{8^n} > (n!)^4, n > 1$, г) $(\frac{n}{2})^n > n!, n > 6$.
4. Дали важат неравенствата: $\frac{2^n}{n} < \frac{n^n}{n!} < 3^{n-1}, n > 3$?
5. Ако x и y, $x > y+1$ се природни броеви, тогаш $x! + y! > (x-1)! + (y+1)!$. Докажи!
6. Докажи го неравенството $n \log n - n < \log n! < (n + \frac{1}{2}) \log n - n + 1, n > 1$.
7. Докажи ги неравенствата:

   а) $\log n! > (n + \frac{1}{2}) \log n - n + \frac{1}{12n}, n \in \mathbb{N}$, б) $(\frac{n+1}{3})^n \leq n! \leq (\frac{n+1}{2})^n, n \in \mathbb{N}$,

   в) $3 \cdot (1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot n!) \geq (n!)^2, n \in \mathbb{N}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ