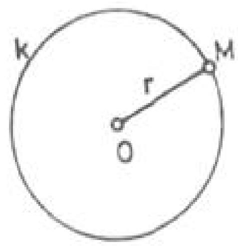
Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

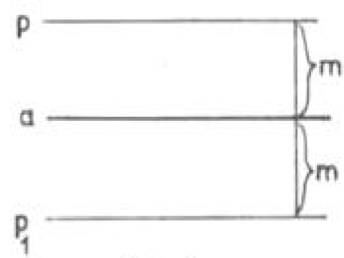
Владимир Стојановић (Београд)

СКУПОВИ ТАЧАКА У РАВНИ

Свака геометријска фигура представља непразан скуп тачака са одређеним особинама. На пример, круг је скуп свих тачака једне равни, којима је растојање од једне утврђене тачке те равни подударно некој датој дужи r (сл. 1). Утврђена тачка је центар круга, а дуж r полупречник. Познато је такође, да скуп свих тачака које су од дате праве a удаљене за дату дуж m, представљају две праве, које су паралелне са датом правом a. На сл. 2 то су праве p и p_1.



Сл. 1



Сл. 2

Овде ћемо се упознати са неколико занимљивих скупова тачака (фигура) у равни. Од самих скупова интересантнији је начин откривања тих скупова тачака.

Скуп тачака (фигура) задаје се неком особином, која је заједничка за све тачке те фигуре. Својство тачака којим се дефинише (задаје) нека фигура, назваћемо *карактеристичним својством скупа тачака*.

Наш задатак биће да конструишемо скуп тачака (одредимо фигуру), чије све тачке имају дато карактеристично својство.

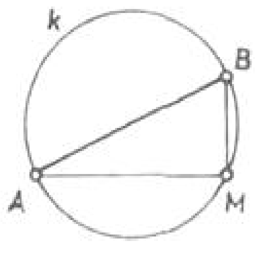
Може се десити да тражена фигура садржи само једну тачку. На пример, скуп свих тачака подједнако удаљених од три дате тачке A, B и C, које нису на истој правој јесте центар круга описаног око троугла ABC.

Најчешће, тражени скуп тачака је круг, кружни лук, права, дуж, изломљена линија, односно нека ограничена или неограничена равна фигура. Користећи се познатим особинама круга, троуглова, четвороуглова и сл. уочићемо да ли тражени скуп тачака има неке од тих особина и на основу тога конструисаћемо тражену фигуру.

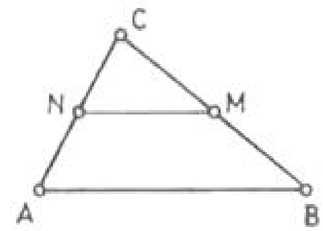
Овде ћемо одабрати неколико примера скупова тачака, које ћемо конструисати користећи се углавном следећим познатим чињеницама:

1° Свака тачка M круга, чији је центар тачка O и полупречник дуж r, има особину да је $OM \cong r$.

2° Сваки пречник круга, из било које тачке M на кругу, види се под правим углом (угао над пречником је прав). На сл. 3 је $\sphericalangle AMB = 90°$.



Сл. 3

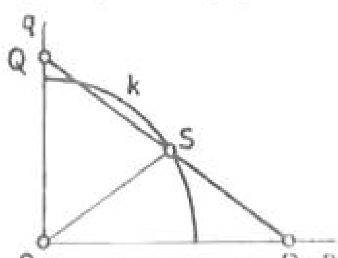


Сл. 4

3° Дуж, чији су крајеви средишта двеју страница троугла (средња линија троугла), паралелна је наспрамној страници и подударна њеној половини. На сл. 4 је $MN \parallel AB$ и $MN \cong \frac{1}{2} AB$.

Пример 1. Дат је прав угао Opq (сл. 5). На краку Op бирамо произвољну тачку P и на краку Oq тачку Q, тако да дужина PQ износи 3 cm. Конструисати скуп средишта свих дужи PQ.

Решење. Ма како изабрали дуж PQ, дужине 3 cm, добићемо правоугли троугао OPQ хипотенузе PQ. Ако је тачка S средиште дужи PQ, онда је дуж OS хипотенузина тежишна дуж. Познато је да је ова тежишна дуж подударна половини хипотенузе, па је $OS = 1{,}5$ cm, за сваку дуж PQ. Према томе, тачке траженог скупа подједнако су удаљене од тачке O. Тражени скуп тачака је четвртина круга са центром O и полупречником од 1,5 cm — на сл. 5 лук k.

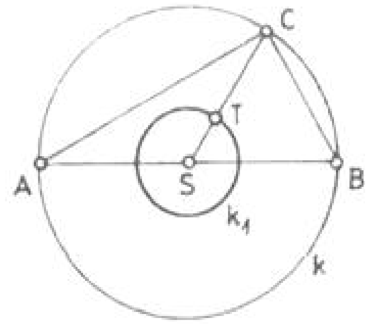


Сл. 5

Пример 2. Конструсати скуп тежишта свих правоуглих троуглова, уписаних у датом кругу k, полупречника $r = 24$ mm.

Решење. Хипотенуза сваког од ових уписаних троуглова биће пречник датог круга k. Нека је ABC било који такав троугао (сл. 6).

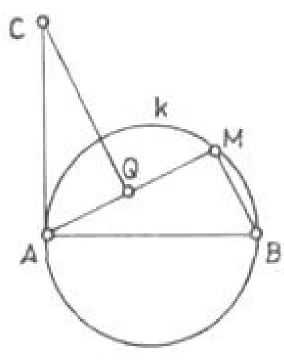
Полупречник SC је тежишна дуж овог троугла. На основу познате особине тежишта, знамо да је $CT \cong 2\,TS$, односно $ST \cong \frac{1}{3} r = 8$ mm. Пошто је тачка S утврђена (центар датог круга k), закључујемо да је *тражени скуп тачака* круг k_1, са центром S и полупречником од 8 mm.



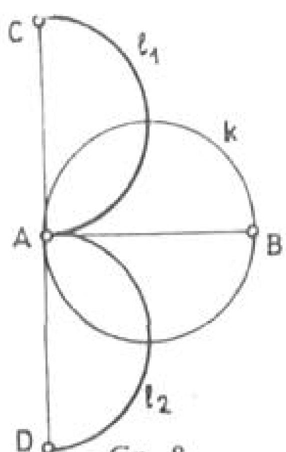
Сл. 6

Пример 3. Нека је AB пречник датог круга k. На произвољној тетиви AM датог круга одређена је дуж $AQ \cong BM$. Одредити скуп свих тачака Q.

Решење. Нека је Q једна од тачака из траженог скупа, конструисана на описани начин (сл. 7). Конструишимо дуж $QC \perp AM$, тако да је $QC \cong AM$. Правоугли троугао AQC подударан је троуглу ABM ($AQ \cong BM$, $CQ \cong AM$ и $\sphericalangle AQC \cong \sphericalangle AMB = 90°$). Отуда следује да је $AC \cong AB$ и $\sphericalangle CAQ \cong \sphericalangle ABM$. Пошто је троугао ABM правоугли, то је $\sphericalangle BAM + \sphericalangle CAQ = 90°$, односно $\sphericalangle BAC = 90°$. Овај закључак не зависи од избора тачке M, па дуж AC можемо конструисати одмах ($AC \perp AB$ и $AC \cong AB$). За сваку тачку M биће $\sphericalangle AQC = 90°$, што значи да се дуж AC из тачке Q увек види под правим углом. На основу напред наведене особине 2°, закључујемо да тачка Q *припада полукругу пречника* AC.



Сл. 7

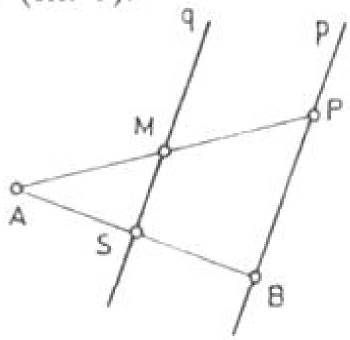


Сл. 8

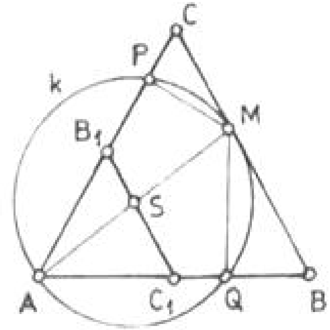
Тражени скуп тачака представљају два полукруга (на сл. 8 полукругови l_1 и l_2), чији су пречници дужи AC и AD, управни на дати пречник AB и подударни пречнику датог круга k.

Пример 4. Одредити скуп средишта свих дужи, којима је један крај дата тачка A, а други крај припада датој правој p.

Решење. Нека је B тачка праве p. Средиште S дужи припада траженом скупу тачака. Нека је P било која тачка праве p, $P \neq B$, и нека је тачка M средиште дужи AP. У троуглу ABP, дуж SM је средња линија. Према раније наведеној особини 3°, дуж SM биће паралелна правој p. До овог закључка долазимо независно од избора тачке P на правој p. Према томе, тражени скуп тачака биће права q, паралелна са правом p, која садржи тачку S, средиште дужи AB (сл. 9).



Сл. 9



Сл. 10

Пример 5. Дат је једнакостраничан троугао ABC. Из произвољне унутрашње тачке M, странице BC, конструисане су нормале MQ и MP на странице AB и AC. Конструисати скуп центара свих кругова који су описани око троугла AQP.

Решење. Нека је AQP један од троуглова добијених на описани начин (сл. 10). Како су углови AQM и APM прави, следује да круг k, пречника AM, пролази кроз тачке Q и P (на основу особине 2°). Другим речима, круг k пречника AM, представља описани круг троугла AQP. Центар овог круга је средиште дужи AM. Тачка A је утврђена, а тачка M припада дужи BC. На основу претходног задатка, закључујемо да је тражени скуп центара свих кругова описаних око троуглова AQP средња линија B_1C_1 троугла ABC (сл. 10).

Задаци

1. Дат је круг k и дуж r. Конструисати скуп средишта свих кругова полупречника r, који додирују дати круг k. Разликовати случајеве кад је дата дуж r подударна полупречнику датог круга и кад је дуж r већа или мања од полупречника датог круга.

2. Дата је тачка A на кругу k. Конструисати скуп средишта свих тетива AM датог круга k.

3. Дата је дуж AB. Конструисати скуп темена свих правоуглих троуглова ABC.

4. Дат је троугао ABC са оштрим углом BAC. Конструисати скуп центара свих правоугаоника $AMNP$, таквих да странице MN и NP садрже редом тачке B и C.

5. На најмањој страници AC троугла ABC, произвољно бирамо тачку M, а на страници BC бирамо тачку N, такву да је $BN \cong AM$. Конструисати скуп средишта свих дужи MN.