## XXXVIII олимпијада

1. Точките во рамнината со целобројни координати се темиња на единечни квадрати. Квадратите се наизменично обоени со бела и црна боја (како шаховска табла). За произволен пар позитивни цели броеви $m$ и $n$ разгледуваме правоаголен триаголник чии темиња имаат целобројни координати, а неговите катети, со должини $m$ и $n$, лежат на страните на единечните квадрати. Нека $S_1$ е вкупната плоштина на црниот дел од триаголникот и $S_2$ е вкупната плоштина на белиот дел од триаголникот. Нека

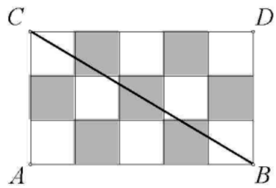
$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

а) Пресметај го $f(m,n)$ за кои било позитивни цели броеви $m$ и $n$ со иста парност.

б) Докажи дека $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ за секои природни броеви $m$ и $n$.

в) Докажи дека не постои константа $C$ таква што $f(m,n) < C$ за секои природни броеви $m$ и $n$.

**Решение.** а) Нека $ABC$ е правоаголен триаголник чии темиња се темиња на квадрат, чии катети лежат на страните на квадратот, при што $\measuredangle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = n$ и $\overline{AC} = m$. Разгледуваме $n \times m$ правоаголник $ABCD$ како што е покажано на цртежот десно.




За било кој полигон $P$ со $S_1(P)$ ќе ја означиме вкупната плоштина на црниот дел од $P$, а со $S_2(P)$ вкупната плоштина на белиот дел.

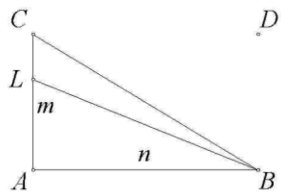
Кога $m$ и $n$ се со иста парност, боењето на правоаголникот $ABCD$ е централно симетрично во однос на средината на хипотенузата $BC$. Затоа

$$S_1(ABC) = S_1(BCD), \quad S_2(ABC) = S_2(BCD) \text{ и}$$

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABCD) - S_2(ABCD)|.$$

Затоа $f(m,n) = 0$, ако $m$ и $n$ се парни, а $f(m,n) = \frac{1}{2}$ ако $m$ и $n$ се непарни.

б) Ако $m$ и $n$ се со иста парност, тврдењето следува од а). Да претпоставиме дека $m$ е непарен, а $n$ е парен. Нека $L$ е точка на страната $AC$, така што $\overline{AL} = m-1$, како што е покажано на цртежот десно.




Бидејќи $m-1$ е парен број, тогаш

$$f(m-1,n) = 0, \text{ т.е. } S_1(ABL) = S_2(ABL).$$

Оттука следува:

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|$$
$$\le P(LBC) = \frac{n}{2} \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}.$$

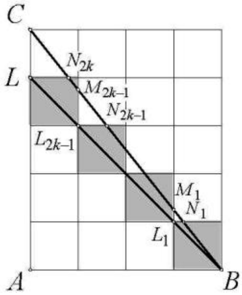
в) Да го најдеме $f(2k+1,2k)$. Нека $L$ е точка на страната $AC$ таква што $\overline{AL}=2k$. Бидејќи

$$f(2k,2k)=0 \text{ и } S_1(ABL)=S_2(ABL),$$

следува

$$f(2k+1,2k)=|S_1(LBC)-S_2(LBC)|.$$

Плоштината на триаголникот $LBC$ е еднаква на $k$. Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека дијагоналата $BL$ е црна (црт. 38.3). Тогаш белиот дел од триаголникот $LBC$ се состои од неколку триаголници: $CLN_{2k}, M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}, \dots, M_1L_1N_1$, од кои секој е сличен со триаголникот $CAB$. Нивната вкупна плоштина е еднаква на:



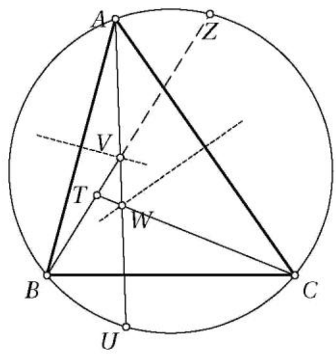

$$S_2(LBC)=\tfrac{1}{2}\tfrac{2k}{2k+1}((\tfrac{2k}{2k})^2+(\tfrac{2k-1}{2k})^2+\dots+(\tfrac{1}{2k})^2)$$
$$=\tfrac{1}{4k(2k+1)}(1^2+2^2+\dots+(2k)^2)=\tfrac{4k+1}{12}.$$

Значи,

$$S_1(LBC)=k-\tfrac{1}{12}(4k+1)=\tfrac{1}{12}(8k-1),\quad f(2k+1,2k)=\tfrac{2k-1}{6}.$$

2. Нека $\measuredangle A$ е најмалиот агол во $\triangle ABC$. Точките $B$ и $C$ ја делат опишаната кружница околу триаголникот на два кружни лака. Нека $U$ е внатрешна точка од лакот меѓу $B$ и $C$ кој не ја содржи точката $A$. Симетралите на страните $AB$ и $AC$ ја сечат правата $AU$ во точките $V$ и $W$ соодветно. Правите $BV$ и $CW$ се сечат во точката $T$. Докажи дека $\overline{AU}=\overline{TB}+\overline{TC}$.

**Решение.** *Прв начин*. Нека правата $BV$ ја сече опишаната кружница на триаголникот $ABC$ во точката $Z\not\equiv B$ (цртеж десно). Тетивите $BZ$ и $AU$ се симетрични во однос на симетралата на отсечката $AB$, па затоа $\overline{BZ}=\overline{AU}$. Исто така важи




$\measuredangle TZC=\measuredangle BZC=\measuredangle BAC$ и

$$\begin{aligned}\measuredangle TCZ&=\measuredangle BTC-\measuredangle BZC=\measuredangle BTC-\measuredangle BAC\\&=\measuredangle TBA+\measuredangle TCA=\measuredangle BAV+\measuredangle CAW\\&=\measuredangle BAC,\end{aligned}$$

па триаголникот $TZC$ е рамнокрак и $\overline{TZ}=\overline{TC}$. Конечно,

$$\overline{TB}+\overline{TC}=\overline{BZ}=\overline{AU}.$$

*Втор начин*. Нека $\alpha=\measuredangle A$, $B'$, $C'$ се средини на страните $AC$ и $AB$ соодветно и $\theta=\measuredangle BAU$, $\phi=\measuredangle UAC$. Бидејќи $WB'$ е симетрала на страната $AC$,

$\measuredangle ACW = \phi$ и аналогно , бидејќи $VC'$ е симетрала на страната $AB$, $\measuredangle ABV = \theta$ . Оттука добиваме

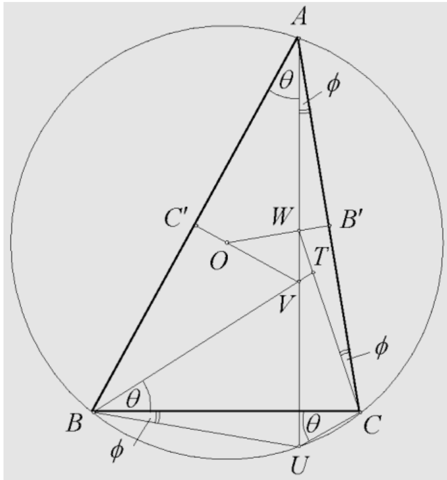
$$\measuredangle BTC = \pi - (\beta - \theta + \gamma - \phi) = \alpha + (\theta + \phi) = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

Применувајќи ја синусната теорема за триаголникот $BTC$ добиваме

$$\frac{\overline{TB}}{\sin(\gamma-\phi)} = \frac{\overline{TC}}{\sin(\beta-\theta)} = \frac{\overline{BC}}{\sin 2\alpha} = \frac{2R\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

каде што $R$ е радиусот на опишаната кружница. (Да забележиме дека заради условот на $\alpha$ , $\cos\alpha > 0$ и дека $\beta - \theta > 0, \gamma - \phi > 0$ ). Следува:

$$\begin{aligned}\overline{TB} + \overline{TC} &= \tfrac{R}{\cos\alpha}(\sin(\beta-\theta) + \sin(\gamma-\phi)) \\ &= \frac{2R\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2}}{\cos\alpha} \\ &= 2R\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2}.\end{aligned}$$




Бидејќи точките $U$, $A$, $B$ и $C$ лежат на кружницата, $\measuredangle UBC = \phi$ и $\measuredangle UCB = \theta$ , а оттука следува:

$$\begin{aligned}\overline{AU} &= 2R\sin(\beta+\phi) = 2R\sin(\gamma+\theta) \\ &= R(\sin(\phi+\phi) + \sin(\gamma+\theta)) \\ &= 2R\sin\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2} \\ &= 2R\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\theta}{2}.\end{aligned}$$

односно $\overline{AU} = \overline{TB} + \overline{TC}$ .

3. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви кои ги задоволуваат условите

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| = 1, \quad |x_i| \le \tfrac{n+1}{2} \text{ за } i = 1, 2, ..., n .$$

Докажи дека постои пермутација $y_1, y_2, ..., y_n$ на $x_1, x_2, ..., x_n$ така што

$$|y_1 + 2y_2 + ... + ny_n| \le \tfrac{n+1}{2} .$$

**Решение.** За секоја пермутација $\pi = (y_1, y_2, ..., y_n)$ од $(x_1, x_2, ..., x_n)$ со $S(\pi)$ ќе го означиме збирот $y_1 + 2y_2 + ... + ny_n$. Нека $r = \frac{n+1}{2}$ . Треба да покажеме дека $S(\pi) \le r$ барем за една пермутација $\pi$ .

Нека $\pi_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\pi^* = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$ . Ако

$$|S(\pi_0)| \le r \text{ или } |S(\pi^*)| \le r ,$$

тогаш тврдењето е точно. Затоа, нека претпоставуваме дека

$$|S(\pi_0)| > r \text{ и } |S(\pi^*)| > r .$$

Забележуваме дека

$$S(\pi_0) + S(\pi^*) = (x_1 + 2x_2 + ... + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + ... + nx_1) = (n+1)(x_1 + ... + x_n)$$

па затоа

$$|S(\pi_0)+S(\pi^*)|=n+1=2r .$$

Бидејќи секој од броевите $S(\pi_0)$ и $S(\pi^*)$ по апсолутна вредност е поголем од $r$, следува дека тие мора да бидат со спротивен знак. Еден од нив е поголем од $r$ , а другиот е помал од $-r$.

Почнувајќи од пермутацијата $\pi_0$ можеме да ја добиеме секоја пермутација со последователно заменување на соседни елементи. Специјално, постои низа од пермутации $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_m$ така што $\pi_m = \pi^*$ и за секој $i \in \{0,1,...,m-1\}$ пермутацијата $\pi_{i+1}$ се добива од $\pi_i$ со замена на последователни членови.

Тоа значи дека ако $\pi_i = (y_1,..., y_n)$ и $\pi_{i+1} = (z_1,...z_n)$, тогаш постои индекс $k \in \{0,1,...,n-1\}$ така што $z_k = y_{k+1}$, $z_{k+1} = y_k$, $z_j = y_j$ за $j \neq k, k+1$.

Бидејќи броевите $x_i$ по апсолутна вредност не се поголеми од $r$ , добиваме

$$\begin{aligned}|S(\pi_{i+1})-S(\pi_i)| &=| kz_k +(k+1)z_{k+1} - ky_k -(k+1)y_{k+1}| \\ &=| y_k - y_{k+1}| \leq | y_k | + | y_{k+1}| \leq 2r.\end{aligned}$$

Тоа значи дека разликата меѓу два соседни члена од низата $S(\pi_0), S(\pi_1),...,$ $S(\pi_m) = S(\pi^*)$ не е поголема од $2r$.

Броевите $S(\pi_0)$ и $S(\pi_m) = S(\pi^*)$, разгледувани како броеви на реалната права, лежат надвор од интервалот $[-r, r]$ и тоа од негова различна страна. Оттука следува дека барем еден од броевите $S(\pi_i)$ се наоѓа во тој интервал. Затоа $|S(\pi_i)| \leq r$ за некоја пермутација $\pi_i$ .

4. Матрицата $n \times n$ со елементи од множеството $S = \{1, 2,..., 2n-1\}$ се нарекува *сребрена* матрица, ако за секој $i = 1, 2,..., n$, $i-$тата редица и $i-$тата колона заедно ги содржат сите елементи од $S$. Покажи дека:

а) не постои сребрена матрица за $n = 1997$,

б) сребрени матрици постојат за бесконечно многу броеви $n$.

**Решение..** а) Нека $n > 1$ е цел број. Да претпоставиме дека постои $n \times n$ сребрена матрица $A$. Нека $x$ е некој елемент од множеството $\{1, 2,..., 2n-1\}$ кој што не се појавува на дијагоналата. (Таков елемент постои, бидејќи има $n$ елементи на дијагоналата, но вкупно имаме $2n-1$ броеви.) Унијата на $i$-тата редица и $i$-тата колона ќе ја наречеме $i$-ти „дел“. Елементот $x$ се појавува во секој „дел“ само по еднаш. Ако $x$ е $(i, j)-$ти елемент од $A$, тогаш тој припаѓа во $i$-тиот $j$-тиот „дел“. Во овој случај двата „дела“ се означени со $x$. (На пример во вториот пример под б) првиот и четвртиот дел се означени со 6.) Тоа значи дека сите $n$ „делови“ сме ги поделиле во парови $x$-обележани, па затоа $n$ е парен број. Бидејќи $n = 1997$ е непарен број, следува дека не постои сребрена матрица за овој број $n$.

б) За $n = 2$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

е сребрена матрица. За $n=4$ има повеќе примери, од кои еден е

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6 & 7\\ 3 & 1 & 7 & 6\\ 4 & 5 & 1 & 2\\ 5 & 4 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Со помош на математичка индукција може да се конструираат бесконечно многу сребрени матрици, како што може да се види од следниот пример:

$$B=\begin{bmatrix}A & Y\\ X & A\end{bmatrix}$$

каде што $A$ е сребрена матрица со елементи од множеството $\{1,2,\dots,2n-1\}$,

$$X=\begin{bmatrix}2n & 2n+1 & \dots & 3n-1\\ 3n-1 & 2n & \dots & 3n-2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 3n+1 & 2n+2 & \dots & 2n\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}3n & 3n+1 & \dots & 4n-1\\ 4n-1 & 3n & \dots & 4n-2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 3n+1 & 2n+2 & \dots & 3n\end{bmatrix}.$$

Матрицата $B$ е исто така сребрена.

5. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^{b^2}=b^a.$$

**Решение.** *Прв начин*. Равенката

$$x^{y^2}=y^x \tag{1}$$

ја запишуваме во облик

$$\left(\tfrac{x}{y^2}\right)^{y^2}=y^{x-2y^2}. \tag{2}$$

Очигледно, потребно е $x^2\neq 2y^2$.

Ако $x^2>2y^2$, тогаш $\frac{x}{y^2}=k\in\mathbb{N}, x=ky^2$, па од (2) добиваме:

$$k^{y^2}=y^{ky^2-2y^2}\text{, т.е. } k=y^{k-2}.$$

За $k=1$ решение е $(1,1)$. За $k=2$ нема решение. За $k=3$ решение е $(27,3)$. За $k=4$ решение е $(16,2)$. За $k\geq 5$ имаме:

$$y^{k-2}\geq 2^{k-2}=2\cdot 2\cdot\dots\cdot 2\geq 2\cdot 2\cdot\tfrac{k-3}{k-1}\cdot\ldots\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{1}=4(k-3)>k.$$

Ако $x^2<2y^2$ од (2) добиваме:

$$\left(\tfrac{y^2}{x}\right)^{y^2}=y^{2y^2-x}\quad\Rightarrow\quad\tfrac{y^2}{x}=m\in\mathbb{N},\quad y^2=mx.$$

Оттука и од (1) добиваме:

$$x^{2y^2} = y^{2x} \;\Rightarrow\; x^{2m} = (mx)^x,\;\; x^{2m} = mx,\;\; \text{т.е.}\;\; x^{2m-1} = m\,.$$

За $m = 1$, решение е (1,1), кое веќе го најдовме.

За $m \geq 2$ имаме:

$$x^{2m-1} \geq 2^{2m-1} = 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2 \geq \tfrac{2m-1}{2m-1}\cdot\tfrac{2m-2}{2m-3}\cdot\ldots\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{1} = 2m-1 > m$$

па во овој случај равенката нема решение.

*Втор начин.* Нека $m$ и $n$ се заемно прости броеви такви што $\frac{a}{b^2} = \frac{m}{n}$. Од $a^{b^2} = b^a$ следува $a^n = b^m$. Бројот $z = a^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{n}}$ е цел, бидејќи ако $k, l \in \mathbb{N}$ се такви што $km - ln = 1$, тогаш $z = \frac{z^{km}}{z^{nl}} = \frac{a^k}{b^l}$. Почетната равенка го добива обликот $z^{mz^{2n}} = a^{b^2} = b^a = z^{nz^m}$, па затоа $mz^{2n} = nz^m$, т.е.

$$z^{m-2n} = \frac{m}{n}.$$

Можни се два случаја.

1) $m < 2n$. Тогаш $\frac{m}{n} = \frac{1}{z^{2n-m}}$, па затоа $m = 1$ и $n = z^{2n-m} = z^{2m-1}$. Бидејќи $z^{2n-1} > 2n - 1 \geq n$ за $z > 1$, мора да важи $z = 1$, па затоа $n = 1$. Значи, едно решение е парот $(a,b) = (1,1)$.

2) $m \geq 2n$. Тогаш $n = 1$ и $m = z^{m-2n} = z^{m-2}$. За $z > 4$ имаме $z^{m-2} > m$. За $z = 3$ единствено решение е $m = 3$, од каде што го добиваме решението $(a,b) = (27,3)$. За $z = 2$ единствео решение е $m = 4$, од каде што го добиваме решението $(a,b) = (16,2)$.

Според тоа, единствени решенија се $(1,1), (16,2)$ и $(27,3)$.

6. За секој природен број *n*, со *f* (*n*) е означен бројот од различни претставувања на бројот *n* како збир од степени на бројот 2 со ненегативни целобројни показатели. Претставувањата кои се разликуваат само во редоследот на собироците се сметаат за еднакви. На пример, $f(4) = 4$ бидејќи бројот 4 може да се претстави на следните четири начини: 4, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1.
Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ важи

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}.$$

**Решение.** Ако $n = 2k+1$ е било кој непарен цел број поголем од 1, тогаш секое запишување на *n* во бараниот вид го има 1 како еден од собироците. Ако го отстраниме, добиваме запис на бројот 2*k*. Обратно, ако додадеме 1 во зписот на бројот 2*k* ќе добиеме запис на бројот 2*k*+1. Ова придружување е биективно. Затоа важи рекурзивната формула

$$f(2k+1) = f(2k) \tag{1}$$

Понатаму, ако $n = 2k$ е било кој позитивен парен цел број, тогаш секој запис на $n$ има еден од следните два вида: или содржи еден собирок 1 или нема таков собирок. Во првиот случај мажеме да одземеме 1 и да добиеме запис на бројот $2k-1$. На тој начин добиваме биекција меѓу записот од првиот вид на $2k$ и сите записи на $2k-1$. Во записите од вториот вид (овде ниту еден член не е 1), можеме секој член да го поделиме со 2 и ќе го добиеме записот на бројот $k$. На тој начин ќе добиеме друга рекурзивна формула

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k) \qquad (2)$$

Секоја од овие формули важи за секој цел број $k \geq 1$. Очигледно $f(1) = 1$. Ако ставиме $f(0) = 1$, формулата (1) ќе важи и за $k = 0$. Од (1) и (2) следува дека функцијата $f$ е неопаѓачка.

Од (1) следува дека бројот $f(2k-1)$ во формулата (2) може да се замени со $f(2k-2)$, па добиваме

$$f(2k) - f(2k-2) = f(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Ако ги собериме овие равенства за $k = 1, 2, \dots, n$, ја добиваме формулата

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n), \text{ за } n = 1, 2, \dots, n \qquad (3)$$

Во формулата (3) ниту еден собирок не е поголем од последниот. Бидејќи $2 = f(2) \leq f(n)$ за $n \geq 2$, добиваме

$$f(2n) = 2 + \left( f(2) + \dots + f(n) \right) \leq 2 + (n-1) f(n) \leq f(n) + (n-1) f(n) = nf(n),$$

за $n = 2, 3, \dots$. Специјално, во нашиот случај имаме:

$$f(2^n) \leq 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leq \dots$$
$$\leq 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} \cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2.$$

Бидејќи $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ за $n > 3$, следува дека важи десната оценка.

Пред да ја докажеме левата оценка, ќе го покажеме прво неравенството

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a) \qquad (4)$$

за целите броеви $b \geq a \geq 0$ со иста парност. Имено, ако $a$ и $b$ се парни броеви, тогаш од (1) следува дека двете страни се нула; ако $a$ и $b$ се двата непарни, тогаш од (2) следува

$$f(b+1) - f(b) = f(\tfrac{b+1}{2}),\ f(a+1) - f(a) = f(\tfrac{a+1}{2}),$$

па неравенството (4) важи бидејќи функцијата $f$ е непоаѓачка.

Нека $r$ и $k$ се цели броеви така што $r \geq k \geq 1$ и $r$ е парен. Ставајќи во (4)

$$a = r - j,\ b = r + j,\ j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

и собирајќи ги добиените неравенства, добиваме

$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$$

Бидејќи $r$ е парен, $f(r+1) = f(r)$ и

$$f(r+k)-f(r-k+1)\geq 2f(r),\;\; k=1,2,\dots,r\,.$$

Собирајќи ги овие неравенства, добиваме

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(2r)\geq 2rf(r)\,.$$

Од (3) следува дека збирот на левата страна е $f(4r)-1$ и

$$f(4r)\geq 2rf(r)+1>2rf(r) \text{ за секој цел број } r>2\,.$$

Ставајќи $r=2^{m-2}$, добиваме

$$f(2^m)>2^{m-1}f(2^{m-2}) \tag{5}$$

За $r=2^{m-2}$ да биде парен број, $m$ мора да биде цел број поголем од 2; да забележиме дека (5) важи за $m=2$.

Нека $n$ е било кој цел број поголем од 1. Ако $l$ е позитивен цел број таков што $2l<n$, тогаш применувајќи го неравенството (5) за $m=n,n-1,\dots,n-2l+2$ и добиваме

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1}\cdot f(2^{n-2})>2^{n-1}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-4}) \\ &>\ldots>2^{(n-1)+(n-3)+\ldots(n-2l+1)}\cdot f(2^{n-2l})=2^{l(n-l)}\cdot f(2^{n-2l}) \end{aligned}$$

Ако $n$ е парен број, ставаме $l=\frac{n}{2}$; ако $n$ е непарен, нека $l=\frac{n-1}{2}$. Се добиваат следниве неравенства:

$$f(2^n)>2^{\frac{n^2}{4}}\cdot f(2^0)=2^{\frac{n^2}{4}} \text{ за } n \text{ парен број,}$$

$$f(2^n)>2^{\frac{n^2-1}{4}\frac{n^2-1}{4}}\cdot f(2^1)=2^{\frac{n^2-1}{4}}\cdot 2>2^{\frac{n^2}{4}} \text{ за } n \text{ непарен број.}$$

Ја добивме бараната оценка за $n\geq 2$. Таа важи и за $n=1$, што може непосредно да се провери.