Владимир Стојановиќ
Србија

ЗА КВАДРАТУРАТА НА КРУГОТ

Проблемот на квадратурата на кругот го поставиле уште античките грчки математичари. Овој проблем привлекувал внимание пред се заради едноставната формулација и заради навидум едноставното барање: *Со линијар и шестар да се конструира квадрат, чија плоштина е еднаква на плоштината на даден круг.*

Многубројните обиди да се реши овој проблем не дале резултат. По околу 2000 години безуспешни обиди, во XV век, се дошло до претпоставка дека оваа задача не може да се реши со линијар и шестар (Леонардо да Винчи).

Се покажало дека проблемот на квадратурата на кругот е еквивалентен со проблемот на ректификацијата на кружницата. Имено, бидејќи плоштината на кругот е $\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, добиваме дека проблемот се сведува на конструкција на отсечката $2\pi r$, чиј должина е еднаква на периметарот на кружницата со радиус r. Сега страната a на бараниот квадрат ќе ја добиеме од равенството $a^2 = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, што значи дека отсечката a е геометриска средина на отсечките $2\pi r$ и $\frac{r}{2}$. Според тоа, ако можеме да ја конструираме отсечката $2\pi r$, тогаш лесно ќе ја конструираме и страната на бараниот квадрат. За $r = 1$ плоштината на кругот е еднаква на π, па затоа проблемот на квадратурата на кругот се сведува на конструкција на отсечка чија должина е изразена со бројот π.

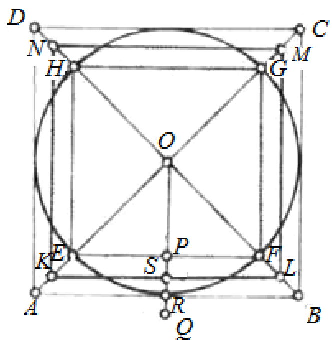
Познатиот швајцарски математчар Јосиф Ламберт во 1766 година прв докажал дека бројот π е ирационален, т.е. дека не може да се запише како дропка и дека има бесконечно многу непериодични децимали. Меѓутоа, со ова се уште не бил даден ниту позитивен ниту негативен одговор на прашањето за можноста на решавање на квадратурата на кругот само со линијар и шестар. Имено, само отсечките чии должини се изразени со таканаречените алгебарски ирационални броеви од втор ред (тоа се броевите кои се добиваат само со собирање, одземање, множење, делење и вадење квадратни корени од рационални броеви), може да се конструираат само со линијар и шестар. Дури во 1882 година славниот математичар Ф. Линдеман докажал дека бројот π не е алгебарски рационален број, што значело дека проблемот на квадратурата на кругот не може да се реши само со линијар и шестар.

Преостанале две можности за решавање на овој проблем: или за конструкција да се користат специјални инструменти, или со линијар и шестар да се реализира приближна конструкција. Познат е голем број приближни конструктивни решенија на овој проблем. Така, уште во III век пне. Архимед нашол дека плоштината на квадратот со страна $r\sqrt{\frac{22}{7}}$ е приближно еднаква на плоштината на кругот со радиус r. Покасно е пресметано дека овој квадрат има плоштина поголема од плоштината на дадениот круг за околу 0,001%.

Во продолжение ќе наведеме две интересни приближни конструкции.

Така, Рајко Л. Јовановиќ од Белград ја предлага следнава конструкција.

Околу даден круг со радиус r опишуваме квадрат $ABCD$ и во кругот впишуваме квадрат $EFGH$ чии дијагонали лежат на дијагоналите на квадратот $ABCD$ (цртеж десно). Од центарот на кругот O на страната AB повлекуваме нормала која AB и EF ги сече во точките R и P, соодветно. На продолжението на оваа нормала наоѓаме точка Q таква што $PQ = AE$ Нека S е точка од отсечката PR таква што $RS = QR$. Сега конструираме квадрат $KLMN$ така што точката S припаѓа на страната KL, а неговите темиња лежат на дијагоналите на квадратот $ABCD$. Ќе покажеме дека квадратот $KLMN$ има плоштина приближно еднаква на плоштината на кругот.



Да ја изразиме плоштината на квадратот $KLMN$ преку радиусот r на дадениот круг. Според конструкцијата имаме

$$PQ = AE = OA - OE = r\sqrt{2} - r\,.$$

Понатаму, $OR = r$ и $OP = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, па затоа

$$RS = RQ = OP + PQ - OR = \frac{3r\sqrt{2}}{2} - 2r\,.$$

Оттука добиваме $OS = OR - RS = 3r - \frac{3r\sqrt{2}}{2}$, а тоа е половина од страната на квадратот $KLMN$. Според тоа, плоштината на квадратот $KLMN$ е

$$P' = KL^2 = (2OS)^2 = (6r - 2r\sqrt{2})^2 = 9r^2(6 - 4\sqrt{2}) \approx 3{,}08831175456857r^2\,.$$

Плоштината на дадениот круг е $P=\pi r^2$, па затоа

$$P':P=0{,}983040163096787\ ,$$

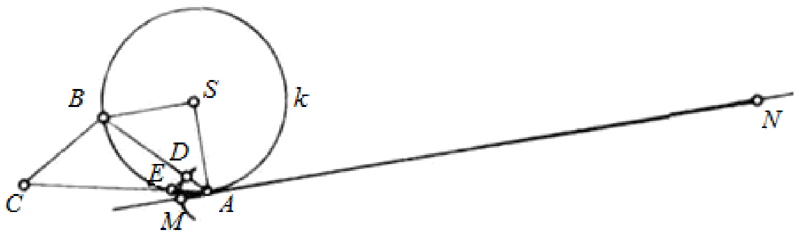
што значи дека плоштината на квадратот $KLMN$ е помала од плоштината на дадениот круг за приближно 1,69598%.

Миливоје Брајовиќ, наставник од Ужице предлага малку попрецизна конструкција. Тој прво покажува дека за приближна вредност на бројот π може да се земе ираионалниот број $3+\frac{\sqrt{2}}{10}\approx 3{,}1414213562373$.

Нека е даден круг k со радиус r. Неговиот периметар има должина $2\pi r$. Земајќи за π приближна вредност $3+\frac{\sqrt{2}}{10}$, добиваме дека

$$2\pi r\approx(6+\frac{\sqrt{2}}{5})r=\frac{\sqrt{2}}{5}r+6r\ .$$

Оттука непосредно следува конструкцијата прикажана на долниот цртеж.



Земаме два произволни меѓу себе нормални радиуси SA и SB. Во точката A повлекуваме тангента тангента на кругот k. Отсечката AB ја делиме на пет еднакви дела и така ја добиваме отсечката $AD=\frac{AB}{5}$. Сега на тангентата определуваме точка M таква што $AM=AD$, а на страната од A на која не е M наоѓаме точка N таква што $AN=6r$. Јасно, должината на отсечката AN приближно е еднаква на должината на кружницата. Навистина, од Питагоровата теорема следува $AB=r\sqrt{2}$, па затоа $AM=AD$ $=\frac{\sqrt{2}}{5}r$. Според тоа, $MN=MA+AN=\frac{\sqrt{2}}{5}r+6r$. Плоштината P' на триаголникот MNS е еднаква на

$$P'=\frac{1}{2}MN\cdot AS=r^2(3+\frac{\sqrt{2}}{10})\ .$$

Како што претходно рековме, понатаму не е тешко да се конструира квадрат чија страна a е геометриска средина наотсечките $\frac{1}{2}MN$ и AS. Тогаш, од дефиницијата на геометриската средина следува дека

$$P'=\frac{1}{2}MN\cdot AS=r^2(3+\frac{\sqrt{2}}{10})\ .$$

Во случајов имаме $P':P=(3+\frac{\sqrt{2}}{10}):\pi\approx 0,999945474359$ што значи дека плоштината на вака добиениот квадрат приближно е помала за 0,00545% од плоштината на дадениот круг.

* *

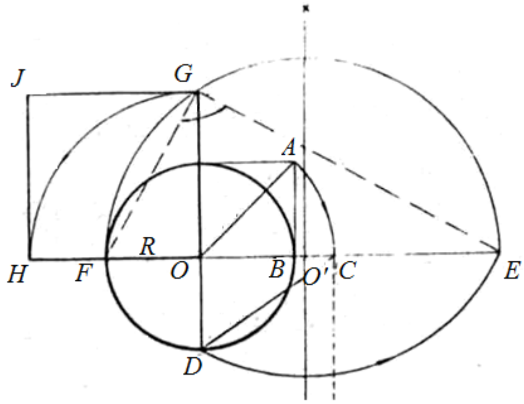
*

Следната приближна конструкција е позната во литературата, но за жал уредниците немаат информација за нејзиното потекло, освен дека д-р Исак Папо од Сараево споменува дека пре многу години на неа наишол како млад инжењер.

Оваа конструкција се базира на фактот дека

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}146264369941972\approx 3{,}14159265358979324\approx\pi$$

каде точноста ед петнаесеттото децимално место. Конструкцијата е дадена на долниот цртеж и истата се реализира на следниов начин:



- цртаме кружница со центар O и радиус R,
- над радиусот OB конструираме квадрат чија дијагонала е $OA=R\sqrt{2}$,
- ја цртаме правата OB и преку точката B наоѓаме точка C таква што $OC=OA$,
- во точката O повлекуваме дијаметар нормален на OB и во пресек со кружницата ја наоѓаме точката D (види цртеж) и добиваме $DO=R\sqrt{3}$,
- на полуправата OC преку точката C ја наоѓаме точката E таква што $CE=R\sqrt{3}$,
- нека F е втората пресечна точка на правата OE со кружницата, т.е. $OF=R$,
- конструираме кружница со дијаметар FE и нека таа ја сече правата OD во точката G,

- имаме $OG=\sqrt{OF\cdot OE}=\sqrt{R\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})R}=R\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\approx R\sqrt{\pi}$, па затоа плоштината на квадратот $OGJH$ е $P\approx \pi R^2$.

Според тоа, квадратот $OGJH$ е бараниот квадрат и тој според својата плоштина се разликува од дадениот квадрат приближно за

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})R^2-\pi R^2=0,00467171635217876R^2$$

или за $0,14870535\%$.

Статијата прво е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија