Vladimir Stojanović

2 MATHEMATISKOP 2

PUT DO ŠAMPIONA MATEMATIKE

za sedmi i osmi razred

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA

MATEMATISKOP 2017

Vladimir Stojanović
MATHEMATISKOP 2
PUT DO ŠAMPIONA MATEMATIKE
za VII i VIII razreda

Recenzenti
dr Ninoslav Ćirić
spec. Gordana Popović, nastavnik OŠ
Veličko Ilić, nastavnik OŠ

Urednik
dr Predrag Cvetković

Tehnički urednik
Goran Nenin

Izdavač
MATEMATISKOP, Despota Olivera 6, Beograd
tel. (011)380-70-90, (011)2413-403, fax: (011)3087-958
www.matematiskop.co.rs
e-mail: office@matematiskop.co.rs

Za izdavača
Nada Stojanović, direktor

Priprema za štampu
Željko Hrček
zeljko.hrcek@gmail.com

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)(079.1)

СТОЈАНОВИЋ, Владимир, 1940-

Put do šampiona matematike : zbirka rešenih zadataka : za sedmi i osmi razred / Vladimir Stojanović. - Beograd : Matematiskop, 2017 (Kragujevac : Grafostil). - 357 str. : ilustr. ; 24 cm. - (Mathematiskop ; 2)
Tiraž 10.000.

ISBN 978-86-7076-079-0

COBISS.SR-ID 247705612

Štampa: Grafostil Kragujevac
Tiraž: 1.000

ŠAMPIONI

Ova knjiga prirodno se nadovezuje na gradivo iz redovne nastave i na sadržaj knjige MATHEMATISKOP 1, od istog autora. Iskorišćen je dobar deo materijala iz ranije objavljene knjige **STAZAMA ŠAMPIONA**. Autor svih ovih knjiga nudi vrednim čitaocima pregršt prelepih originalnih zadataka i originalnih ideja za njihovo rešavanje. Sve je to plod ličnih iskustava autora, koji je više od 30 godina bio predsednik Savezne komisije za takmičenje mladih matematičara, inicijator i pokretač Juniorske balkanske matematičke olimpijade. Čitalac koji temeljno obradi školske udžbenike i knjige za dodatnu nastavu, od **PLUS III** do **PLUS VIII** (sve od istog autora), može očekivati uspešnu takmičarsku sezonu i nagrade na najvišim nivoima (Državnom takmičenju i Balkanskoj olimpijadi). Rešavajući ove probleme, čitalac će visoko podići nivo znanja i svoja iskustva znatno obogatiti novim sjajnim idejama.

Učenici VIII razreda rešavaju sve probleme postavljene u ovoj knjizi. Učenici VII razareda rade samo ona poglavlja i odeljke koji su u SADRŽAJU označeni sa (VII razred), kao i zadatke sa takmičenja.

Prolazeći ŠAMPIONSKIM PUTEVIMA približićete se značajnim šampionskim odličjima. Iskopaćete duboka znanja, pa Vas na kraju ovih PUTEVA čeka rudarski pozdrav

SREĆNO!

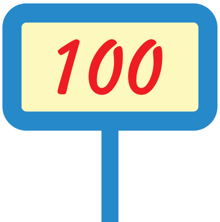
Beograd, 2017. godine.

Vaš
MATEMATISKOP

Sadržaj

ZABELEŠKA

Na kraju ovog puta stoji tabla koju vidite na slici. Tabla označava da je autor ove knjige, Vladimir Stojanović, dovde zaokružio jedan veliki deo svog rada: napisao je 100 knjiga iz matematike, a ova knjiga, koju držite u rukama, upravo je stota knjiga.

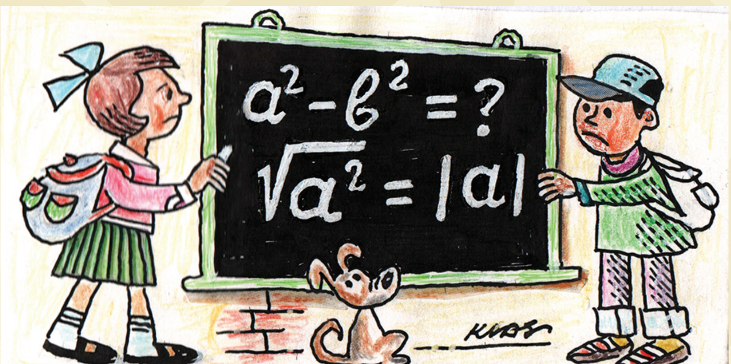


Mojim indijancima

Glava 1

ALGEBARSKI IZRAZI

- Polinomi
- Algebarski razlomci
- Stepeni
- Kongruencije po modulu
- Deljivost celih brojeva
- Neke nejednakosti
- Nejednakosti sa sredinama
- Realni brojevi



Algebarski izrazi

1.1. Polinomi

Izraz $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, nazivamo polinomom n-tog stepena od promenljive x. Pritom a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_2$, a_1, a_0 su brojevi i nazivamo ih koeficijentima. Koeficijent a_0 je slobodni član polinoma. Mi ćemo se sretati uglavnom sa polinomima čiji su koeficijenti celi brojevi.

Vrednost polinoma $P_n(x)$ za $x = x_1$ je broj
$P_n(x_1) = a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0$.

Ako je $P_n(x_0) = 0$, onda se $x = x_0$ naziva nulom polinoma.

Dva polinoma su identički jednaki ako su im jednaki svi odgovarajući koeficijenti. Identički jednaki polinomi imaju jednake vrednosti za istu vrednost promenljive veličine x.

Očigledno je: $P_n(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$, a takođe je $a_0 = P_n(0)$.

Srećemo i polinome sa više promenljivih. Na primer:

$P(a, b, c) = 3a^3 - 5a^2 + 7bc^2 - 3c^2 + 15abc + 7$ je polinom od tri promenljive: a, b i c.

Polinom je rastavljen na činioce ako je napisan kao proizvod nekih polinoma. Na primer: $P(x) = M(x) \cdot N(x)$.

Za rastavljanje polinoma na činioce koristićemo formule, od kojih neke ne izučavamo u redovnoj nastavi. Za rastavljanje **binoma** (n i k su prirodni brojevi veći od 1) koristićemo formule:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – razlika kvadrata;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – razlika kubova;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – zbir kubova;

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;

$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \cdots - ab^{2k-1} + b^{2k})$.

Koristićemo kvadrate i kubove nekih polinoma:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Zbir kvadrata $a^2 + b^2$ ne može se predstaviti u vidu proizvoda dva polinoma oblika $P(a, b)$.

Primer A). Rastavi na činioce (faktoriši) sledeće polinome:

a) $8x^3 + 8x^2y + 2xy^2$; b) $4x^2y + 4xy^2 - 3y^3$;

c) $x^3 - 6x^2 - 32$; d) $y^3 - 7y - 6$.

Rešenje. a) $8x^3+8x^2y+2xy^2 = 2x(4x^2+4xy+y^2) = 2x(2x+y)^2$.

b) $4x^2y+4xy^2-3y^3 = y(4x^2+4xy-3y^2) = y(4x^2+4xy+y^2-4y^2) = y((2x+y)^2-4y^2) = y(2x+y-2y)(2x+y+2y) = y(2x-y)(2x+3y)$.

c) $x^3+6x^2-32 = x^3-8+6x^2-24 = (x-2)(x^2+2x+4)+6(x-2)(x+2) = (x-2)(x^2+2x+4+6x+12) = (x-2)(x^2+8x+16) = (x-2)(x+4)^2$.

d) $y^3-7y-6 = y^3+1-7y-7 = (y+1)(y^2-y+1)-7(y+1) = (y+1)(y^2-y+1-7) = (y+1)(y^2-y-6) = (y+1)(y^2-4-y-2) = (y+1)((y-2)(y+2)-(y+2)) = (y+1)(y+2)(y-3)$.

Primer B). Dat je polinom $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. Izračunaj vrednost polinoma za $x = 1998$.

Rešenje. Najpre ćemo faktorisati dati polinom:

$P(x) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1)(x+1) = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2$. Dalje imamo: $P(1998) = (1998-1)(1998+2)^2 = 1997 \cdot 2000^2 = 7\,988\,000\,000$.

Primer C). Ako je $a+b+c=0$ i $a^2+b^2+c^2=1$, izračunaj vrednost izraza $A = a^4 + b^4 + c^4$.

Rešenje. Iz $(a^2+b^2+c^2)^2=1$ dobijamo: $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2++2a^2c^2=1$, odnosno $A+2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)=1$. Izraz u zagradi dobićemo iz: $(a+b+c)^2=0$, odnosno $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=0$. Odavde je $ab+bc+ac=-\frac{1}{2}$, pa novim kvadriranjem dobijamo: $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2ab^2c+2abc^2+2a^2bc=\frac{1}{4}$, odnosno: $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}$. Kako je $a+b+c=0$, sledi da je $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=\frac{1}{4}$. Konačno je $A+\frac{1}{2}=1$, odnosno $A=\frac{1}{2}$.

Primer D). Dat je polinom: $P(x,\,y)=x^4+2x^2+y^2-2y+2$. Nađi najmanju vrednost ovog polinoma. Koje su odgovarajuće vrednosti promenljivih x i y?

Rešenje. Dati polinom transformišemo: $P(x,\,y)=(x^4+2x^2+1)++(y^2-2y+1)=(x^2+1)^2+(y-1)^2$. Polinom dobija najmanju vrednost kada su izrazi u zagradama najmanji. Prvi je najmanji za $x=0$, a drugi za $y=1$. Tada je $P(0,\,1)=1$.

Primer E). Dokaži da je broj $1996\cdot1997\cdot1998\cdot1999+1$ kvadrat nekog celog broja k, a zatim izračunaj k.

Rešenje. Neka je $n=1997$. Tada dati broj predstavlja polinom $P(n)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+1$, koji ćemo transformisati: $P(n)=n(n+1)\cdot(n-1)(n+2)+1=(n^2+n)(n^2+n-2)+1=(n^2+n)^2-2(n^2+n)+1=(n^2+n-1)^2$. Dakle $P(n)=(n^2+n-1)^2=k^2$.

Kako je $n^2+n-1>0$, sledi da je $k=n^2+n-1=1997^2+1997-1=3990005$.

Zapamtite: ako želite da se upustite u rešavanje raznih problema algebre, posao će vam biti znatno olakšan ako odlično savladate polinome. Sledeći zadaci omogućiće vam da polinome bolje upoznate.

1. Dokaži da je polinom $Q(x)=x^2+x+1$ činilac polinoma $P(x)=x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

2. Rastavi na činioce polinome:

a) $4b^2(b-2)+4a^2(2-a)+a^2b^2(a-b)$;

b) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.

Uputstvo: prvo se oslobodi zagrada, a onda pregrupiši odgovarajuće sabirke.

3. Dat je polinom $P(m)=(m^2+5m)(m^2+5m+10)+24$. Ako je m celi broj dokaži da je vrednost $P(m)$ proizvod četiri uzastopna cela broja.

4. Odredi x i y, tako da je $P(x,\, y)=9x^2+16y^2+6x-24y+10=0$.

5. Dat je polinom $P(x)=x^3+x-1$. Odredi A, B, C i D tako da je $P(x)=A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D$.

6. Ako je $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$, dokaži da je $ad=bc$. Da li važi i obrnuto, tj. da li iz $ad=bc$ sledi da je $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$?

7. Ako je $P(x)=x^2-1999x+1998$, koliko je $P(101998)$?

8. Dat je polinom $P(x)=x^{10}-100x^9+100x^8-100x^7+100x^6-100x^5+$ $+100x^4-100x^3+100x^2-100x+111$. Izračunaj vrednost datog polinoma za $x=99$.

9. Pri deljenju polinoma a^4+b^4+1 deljenik je jednak količniku, a ostatak je $2a^2+2b^2-2a^2b^2$. Izračunaj količnik.

10. Ako je $a+b=3$ i $a\cdot b=2$, dokaži da je $a^4+b^4=17$.

11. Ako je $a+b+c=0$ i $abc=1999$, dokaži da je $c(b+c)(a+c)=1999$.

12. Ako je $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$, dokaži da je $a=b=c$.

13. Ako pomnožimo tri uzastopna prirodna broja, pa dobijeni proizvod uvećamo za srednji broj, dobićemo kub tog srednjeg broja. Dokaži.

14. Dokaži da vrednost polinoma ne zavisi od vrednosti promenljivih, ako važi dati uslov:

a) $P(x,\, y)=2x^2+3y^2+7xy+5x-2$, uz uslov $2x+y=1$;

b) $P(x,\, y,\, z)=7xy+11yz-7xz-2x^2-6y^2-3z^2+5$, uz uslov $x-2y+3z=0$.

15. Ako je $a^2+d^2=2(ab+bc+cd-b^2-c^2)$, dokaži da je $a=b=c=d$.

16. Odredi vrednost polinoma $P(x,\, y)=x^{1999}+2000y$, ako važi uslov: $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.

17. Izračunaj zbir

$Z=1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+1995^2-1996^2+1997^2-1998^2+1999^2$.

18. Polinom $6xy-3$ napiši u obliku razlike kvadrata dva polinoma.

19. Dokaži da je vrednost izraza: $(10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1)\cdot(10^{n+1}+5)+1$ kvadrat nekog prirodnog broja N, pa odredi broj N.

20. Ako je $N^2=100\ldots05\cdot 11\ldots11+1$, gde prvi broj ima 1998 nula, a drugi 1999 jedinica, odredi N.

21. Ako za prirodne brojeve a, b, c i d važi jednakost $(a+b)^2+a=(c+d)^2+c$, dokaži da je $a=c$ i $b=d$.

22. Za koje vrednosti promenljivih x i y dati polinom ima najmanju vrednost? Nađi tu najmanju vrednost.

a) $P(x,\, y)=x^2+y^2-4x+6y+13$;

b) $Q(x,\, y)=4x^2+9y^2-12x+30y+1999$;

c) $M(x,\, y,\, z)=x^2+y^2+z^2-12y-14z+100$;

d) $N(x,y)=2x^2+2xy+y^2-2x+2y$.

23. Koji uslov moraju zadovoljiti promenljive a, b, c i d da bi vrednost polinoma $P=a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$ bila minimalna?

24. Dati polinom napiši u obliku zbira nekoliko kvadrata. Bar jedan od njih mora biti kvadrat nekog binoma:

a) $5x^2+5y^2$;

b) $a^2+b^2+c^2+d^2+x^2+ax+bx+cx+dx$;

c) $\dfrac{13}{2}x^2+y^2-2xy+2x-4y+5$.

25. Dokaži da polinom $P(x)=x^4-x+\dfrac{1}{2}$ ima pozitivne vrednosti za sve vrednosti realne promenljive x.

26. Odredi x, y i z tako da vrednost polinoma
$P(x,\, y,\, z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$ ne bude pozitivna.

27. Ima li nula polinom $P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)+1{,}01$?

28. Odredi nule polinoma $P(x)=x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x+m^4-1$, gde je m realan broj.

29. Da li postoji polinom $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$, a, b, c i d su celi brojevi, takav da je $P(7)=11$ i $P(11)=13$?

30. Dokaži da ne postoji polinom $P(x)$ četvrtog stepena sa celim koeficijentima (koeficijent uz x^4 je broj 1), takav da je $P(7)=5$ i $P(15)=9$.

1.2. Algebarski razlomci

Problemi sa algebarskim razlomcima uglavnom i nisu problemi za onoga ko je odlično savladao polinome. Skraćivanje razlomka svodi se na određivanje zajedničkih delilaca polinoma, a sabiranje razlomaka zahteva nalaženje najmanjeg zajedničkog sadržaoca za polinome.

Primer A). Ako je $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2017$, izračunaj $f(1)$ i $f(-2)$.

Rešenje. $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+2015=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2015$. Dakle, $f(1)=1^2+2015=2016$, a $f(-2)=(-2)^2+2015=2019$.

Primer B). Za koje vrednosti promenljivih x i y razlomak $R=\dfrac{4xy-4x^2-y^2+1}{9x^2-6xy+y^2-6x+2y+11}$ ima najveću vrednost?

Rešenje. Razlomak ima najveću vrednost ako mu je brojilac maksimalan, a imenilac minimalan. Transformacijom polinoma u brojiocu i imeniocu dobijamo: $R=\dfrac{1-(2x-y)^2}{(3x-y-1)^2+10}$. Brojilac je najveći za $2x-y=0$, a imenilac je najmanji za $3x-y-1=0$. Iz ova dva uslova dobijamo $x=1$ i $y=2$.

Primer C). Odredi sve cele vrednosti broja k za koje razlomak $R=\dfrac{k^2+2k-8}{k^2-4}$ ima celobrojnu vrednost.

Rešenje. $R=\dfrac{(k^2+2k+1)-9}{(k-2)(k+2)}=\dfrac{(k+1)^2-9}{(k-2)(k+2)}=\dfrac{(k-2)(k+4)}{(k-2)(k+2)}=\dfrac{k+4}{k+2}$, za $k\neq 2$ i $k\neq -2$. Dalje je $R=\dfrac{k+2+2}{k+2}=\dfrac{k+2}{k+2}+\dfrac{2}{k+2}=1+\dfrac{2}{k+2}$. Da bi vrednost razlomka R bila celi broj mora biti $k+2=\pm 1$ ili $k+2=\pm 2$. Dakle, za k važi $k\in\{-1,-3,0,-4\}$. Odgovarajuće vrednosti razlomka R su redom: $3,-1,2,0$.

31. Neka je $A=(x+3y)^2-(x-2y)^2$ i $B=x^2-(x-y)^2$. Izraz $\frac{A}{B}$ svedi na najjednostavniji oblik. Ako je $x=\frac{1}{4}$ i $y=\frac{1}{3}$ kolika je vrednost izraza $\frac{A}{B}$?

32. Izračunaj vrednost izraza $\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2-9}$, za $x=6$.

33. Dokaži da dati izraz ne zavisi od vrednosti promenljive, uz data ograničenja:

a) $A=\frac{a+3}{a}+\frac{a}{a-2}+\frac{5a-b}{2a-a^2}$, $a\neq 0$ i $a\neq 2$;

b) $B=\left(\frac{4b}{b^2-1}+\frac{2b}{b+1}+\frac{2}{b-1}\right):\left(1+\frac{2}{b-1}\right)$, $b\neq 1$ i $b\neq -1$.

34. Izračunaj vrednost izraza:

$$K=\frac{(6a^7-b^8+3ab^5)\cdot(25a^4-10a^2b+b^2)-(a^5+16b^2)}{(3a^3-2b)^2-9a^6-4b^2},$$

za $a=-\frac{1}{2}$ i $b=1,25$.

35. Izračunaj vrednost izraza:

$$N=1-n+n^2-n^3+\cdots+n^{98}-n^{99}+\frac{n^{100}}{1+n}, \text{ za } n=5.$$

36. Dokaži da je za $a\neq\pm\frac{1}{2}$ pozitivna vrednost izraza

$$A=\frac{8a^3}{2a-1}+\frac{1}{2a+1}-\left(\frac{4a^2}{2a+1}+\frac{1}{2a-1}\right).$$

37. Dokaži da je za $b\neq\pm\frac{1}{3}$ negativna vrednost izraza

$$B=\frac{1}{3b-1}-\frac{1}{3b+1}-9b^2\left(\frac{3b}{3b-1}-\frac{1}{3b+1}\right).$$

38. Izračunaj vrednost izraza $(x+y)^2$, ako je $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$ i $y=x+1$.

39. Izračunaj vrednost razlomka $\frac{x+2y}{x-2y}$, ako je $x^2+4y^2=5xy$ i $0<x<y$.

40. Ako za pozitivne brojeve a, b, c važi jednakost:
$ab\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+bc\left(\frac{b+c}{2}-a\right)+ca\left(\frac{c+a}{2}-b\right)=0$, dokaži da je $a=b=c$.

41. Data su dva razlomka, takva da je njihov proizvod 7 puta manji od njihovog zbira. Koliki je zbir recipročnih vrednosti datih razlomaka?

42. Ako su m i n prirodni brojevi i $m+\frac{1}{n}=n+\frac{1}{m}$, izračunaj $\frac{m}{n}$.

43. Ako su x, y i z realni brojevi različiti od nule, $(x+y+z)\neq 0$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$, dokaži da je zbir neka dva od ova tri broja jednak nuli.

44. Za koje vrednosti promenljivih dati izraz ima najmanju vrednost:

a) $A=\dfrac{x^2+y^2-2y+2}{2x^2+2y^2-4y+7}$;

b) $B=\dfrac{4x^2+28x+41}{9x^2-6xy+y^2+6x-2y+12}$;

c) $C=\dfrac{a^2+4ab+4b^2-1}{4a^2+12ab+9b^2+4a+66+3}$?

45. Odredi celobrojne vrednosti razlomka:

a) $A=\dfrac{3n+5}{n-3}$, $n\in N$; b) $B=\dfrac{n^2+1}{n-1}$, $n\in N$;

c) $C=\dfrac{2p-14}{p-4}$, p je celi broj; d) $D=\dfrac{p^3-p^2+3}{p-1}$, p je celi broj.

46. Ako je x realan broj i $x+\frac{1}{x}=3$, izračunaj:

a) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$; b) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

47. Ako je $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$ i $x>0$ izračunaj:

a) $x+\dfrac{1}{x}$; b) $x-\dfrac{1}{x}$; c) $x^2-\dfrac{1}{x^2}$; d) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

48. Ako je $a^2+a+1=0$, izračunaj $a^{1999}+\dfrac{1}{a^{1999}}$.

49. Izračunaj zbir $S=\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+xz}$, ako je $xyz=1$.

50. Neka su a, b, c tri različita realna broja, koji zadovoljavaju uslov $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, dokaži da je $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$.

1.3. Stepeni

Potrebno je znati osnovne osobine stepena. Za $m, n \in N$ važi:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$; za $a \neq 0$ je $a^m : a^n = a^{m-n}$,
za $c \neq 0$ je $\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m = \frac{a^m \cdot b^m}{c^m}$.
Stepeni se mogu sabrati samo ako imaju istu osnovu i isti izložilac.
Po definiciji, za $a \neq 0$ je:
$a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, odnosno $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.
Prilikom rešavanja nejednačina, treba voditi računa o sledećem:
ako je $a > 1$, $m, n \in N$, tada je $a^{m+n} > a^m$,
ako je $0 < a < 1$, $m, n \in N$, tada je $a^{m+n} < a^m$.

Primer A). Odredi celi broj a i prirodni broj k, tako da bude tačna jednakost: $a^k = \dfrac{16^3 \cdot 0,125^7 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-5} \cdot 2,25^7}{81 \cdot 125^2 \cdot 0,15^{11} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^5}$.

Rešenje. Date stepene izrazimo kao stepene brojeva : 2, 3 i 5. Naime, $16 = 2^4$; $0,125^7 = \left(\frac{1}{8}\right)^7 = (2^{-3})^7 = 2^{-21}$; $\left(\frac{1}{25}\right)^{-5} = (5^{-2})^{-5} = 5^{10}$ · $2,25^7 = \left(\frac{9}{4}\right)^7 = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^7 = 3^{14} \cdot 2^{-14}$; $81 = 3^4$; $125^2 = (5^3)^2 = 5^6$; $0,25^{11} = \left(\frac{1}{4}\right)^{11} = 2^{-22}$ i $\left(\frac{9}{2}\right)^5 = 3^{10} \cdot 2^{-5}$. Onda data jednakost postaje: $a^k = \dfrac{2^{12} \cdot 2^{-21} \cdot 5^{10} \cdot 3^{14} \cdot 2^{-14}}{3^4 \cdot 5^6 \cdot 2^{-22} \cdot 3^{10} \cdot 2^{-5}} = 2^4 \cdot 5^4$, (jer se $3^{14} : 3^{14}$ skrati, $5^{10} : 5^6 = 5^4$ i $2^{-23} : 2^{-27} = 2^{-23-(-27)} = 2^4$).
Dakle: $a^k = 10^4$, pa je $k = 4$, dok je $a = 10$ ili $a = -10$.

51. Šta je veće: 2^{300} ili 3^{200}?

52. Odredi šta je veće:
a) 2^{1998} ili 63^{333}; b) 31^{13} ili 65^{11}.

53. Šta je veće:

a) 2^{1996} ili 65^{333}; b) 26^{400} ili 82^{300}?

54. Uporedi po veličini 333^{444} i 444^{333}.

55. Uporedi $0,064^{665}$ i $0,16^{998}$.

56. Odredi racionalni broj a (i $1 < a < 10$) i prirodni broj k, tako da važi jednakost: $0,07 \cdot 10^{33} + 6 \cdot 10^{32} - 7,4 \cdot 10^{31} = a \cdot 10^k$.

57. Dokaži da je:

a) izraz $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{200}$ deljiv brojem 7;

b) izraz $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{1992}$ deljiv brojem 210.

58. Neka je $2m = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{1989} + 2^{1990}$. Dokaži da:

a) $m = 2^{1990} - 1$; b) m je deljivo sa 93.

59. Neka je $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{1994} + 3^{1995}$.

a) Dokaži da je S deljivo sa 40.

b) Dokaži da je $(S - 1)$ deljivo sa 39.

c) Dokaži da je $S = \dfrac{1}{2}(3^{1996} - 1)$.

60. Možemo li skup brojeva $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^{1995},\ 2^{1996}$ podeliti na dva disjunktna podskupa (bez zajedničkih elemenata), tako da je zbir brojeva u jednom podskupu jednak zbiru brojeva u drugom podskupu?

1.4. Kongruencije po modulu

Za dva cela broja a i b kažemo da su *kongruentni po modulu m* ako i samo ako imaju jednake ostatke pri deljenju sa m, gde je m, $m \neq 0$, celi broj, što označavamo sa $a \equiv b \pmod{m}$. (Čita se: "a je kongruentno sa b po modulu m".) Dakle:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff (a = k \cdot m + r \ \text{ i } \ b = q \cdot m + r).$$

Kongruencija po modulu zasniva se na deljivosti brojeva. Ne izvodeći dokaze navešćemo neke važne osobine kongruencije.

Ako je a deljivo sa m, onda je $a \equiv 0 \pmod{m}$.

Ako je $a \equiv b \pmod{m}$, onda je $(a - b) \equiv 0 \pmod{m}$.

Ako je $a \equiv b \pmod{m}$, onda je $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, $k \in N$.

Ako je $a \equiv r \pmod{m}$ i $b \equiv s \pmod{m}$, tada je:
$a+b \equiv r+s \pmod{m}$, $a-b \equiv r-s \pmod{m}$, $a \cdot b \equiv r \cdot s \pmod{m}$.

Ako broju a "nedostaje" r da bi bio deljiv sa m, onda je $a \equiv -r \pmod{m}$. Na primer, $20 \equiv -1 \pmod{7}$.

Primer A). Koliki je ostatak deljenja $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13) : 7$?

Rešenje. Uočimo da je $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = 720 \equiv -1 \pmod{7}$. Takođe je $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720 \equiv -1 \pmod{7}$. Zatim: $11 \equiv 4 \pmod{7}$, $12 \equiv -2 \pmod{7}$ i $13 \equiv -1 \pmod{7}$. Onda je $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (8 \cdot 9 \cdot 10) \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \equiv (-1) \cdot (-1) \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (-1) \pmod{7} \equiv 8 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$. Ostatak deljenja je 1.

Primer B). Dokaži da je zbir kvadrata dva prirodna broja deljiv sa 7 samo ako su oba broja deljiva sa 7.

Dokaz. Uzimajući u obzir ostatke deljenja prirodnog broja n sa 7, možemo zaključiti da je $n \equiv 0 \pmod{7}$, ili $n \equiv \pm 1 \pmod{7}$, ili $n \equiv \pm 2 \pmod{7}$, ili $n \equiv \pm 3 \pmod{7}$, pa je $n^2 \equiv 0 \pmod{7}$, ili $n^2 \equiv 1 \pmod{7}$ ili $n^2 \equiv 4 \pmod{7}$, ili $n^2 \equiv 9 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$. Dakle, pri deljenju sa 7 kvadrat prirodnog broja može imati ostatak deljenja 0, 1, 2 ili 4. Zbir bilo koja dva od ovih ostataka nije jednak 7, pa, ako su n i k prirodni brojevi, onda $n^2 + k^2$ može biti deljivo sa 7 samo ako je $n \equiv 0 \pmod{7}$ i $k \equiv 0 \pmod{7}$.

Primer C). Koliki je ostatak deljenja $(2017^{2017} + 502)^{2018} : 504$?

Rešenje. Uočimo da je ostatak deljenja $2017 : 504$ broj 1, odnosno $2017 \equiv 1 \pmod{504}$. Onda je: $(2017^{2017} + 502)^{2018} \equiv (1^{2017} - 2)^{2018} \pmod{504} \equiv (1-2)^{2018} \pmod{504} \equiv (-1)^{2018} \pmod{504} \equiv 1 \pmod{504}$. Traženi ostatak deljenja je 1.

Primer D). Nađi sve proste brojeve p za koje je vrednost izraza $p^6 - 6p^2 + 1$ kvadrat prirodnog broja.

Rešenje. Ako je $p=3$, onda imamo: $3^6-6\cdot 3^2+1=729-54+1=676=26^2$. Neka je $p\neq 3$. Znamo da je tada broj p oblika: $p=6k\pm 1$, gde je k prirodni broj. Dakle, $p\equiv \pm 1 \pmod 3$, pa je $p^2\equiv 1 \pmod 3$. Tada je $p^6-6p^2+1=(p^2)^3-6p^2+1\equiv 1^3-6\cdot 1+1 \pmod 3 \equiv -4 \pmod 3 \equiv -1 \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$. Međutim, kako za svaki prirodni broj n važi: $n\equiv 0 \pmod 3$ ili $n\equiv \pm 1 \pmod 3$, onda mora biti $n^2\equiv 0 \pmod 3$ ili $n^2\equiv 1 \pmod 3$. Prema tome, vrednost datog izraza p^6-6p^2+1 može biti kvadrat prirodnog broja samo ako je $p=3$.

Primer E). Neka je $A=2\cdot 4\cdot 6\cdots 2000\cdot 2002$ i $B=1\cdot 3\cdot 5\cdots 1999\cdot 2001$. Dokaži da je broj $A+B$ deljiv sa 2003.

Rešenje. Uočimo da je: $1002\equiv -1001 \pmod{2003}$, $1004\equiv -999 \pmod{2003}$,..., $2000\equiv -3 \pmod{2003}$ i $2002\equiv -1 \pmod{2003}$. Onda je: $A=(2\cdot 4\cdot 6\cdots 1000)\cdot(1002\cdot 1004\cdots 2000\cdot 2002)\equiv 2\cdot 4\cdot 6\cdots 1000\cdot(-1)^{501}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots 999\equiv -1\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots 999\cdot 1000\cdot 1001) \pmod{2003}\equiv -1001! \pmod{2003}$.
Slično se uverimo da je $B\equiv(-1)^{500}\cdot 1001! \pmod 3\equiv 1001! \pmod{2003}$. Onda je $A+B\equiv 0 \pmod{2003}$, pa je $A+B$ deljivo sa 2003.

Primer F). Za svaki broj n, $n\in\{0,1,2,\ldots,1999\}$ definisan je broj $A_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$. Odredi najveći zajednički delilac brojeva A_0, A_1, A_2,..., A_{1999}.

Rešenje. Za $n=0$ je $A_0=2^0+3^2+5^2=1+9+25=35$. Prema tome, najveći zajednički delilac d je jedan od brojeva: 1, 5, 7 ili 35. Međutim, za $n=1$ je $A_1=2^3+3^8+5^8=8+6561+5^8=6569+5^8$, a ovaj broj nije deljiv sa 5. Ostaju dve mogućnosti: $d=1$ ili $d=7$. Proverimo! $2^{3n}=(2^3)^n=8^n\equiv 1^n \pmod 7\equiv 1 \pmod 7$. $3^{6n+2}=9\cdot(3^3)^{2n}=9\cdot 27^{2n}\equiv 2\cdot(-1)^{2n} \pmod 7\equiv 2 \pmod 7$. Zatim: $5^{6n+2}=5^2\cdot(5^3)^{2n}=25\cdot(125)^{2n}\equiv 4\cdot(-1)^{2n} \pmod 7\equiv 4 \pmod 7$. Konačno je $A_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}\equiv(1+2+4) \pmod 7\equiv 0 \pmod 7$. Dakle, svi brojevi A_n deljivi su sa 7, pa je traženi najveći zajednički delilac $d=7$.

61. Koliki je ostatak deljenja broja 2^{100} sa:

a) 3, b) 5?

62. Odredi ostatak deljenja:

a) $3^{100} : 13$, b) $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10) : 11$.

63. Dokaži da je razlika $19^{91} - 91^{19}$ deljiva sa 72.

64. Broj $(3^{105} + 4^{105})$ deljiv je sa 13, a nije deljiv sa 11. Dokaži.

65. Dokaži da su deljivi sa 10 brojevi:

a) $17^5 + 24^4 - 13^{21}$, b) $2^{16} + 3^{40} + 5^{39} + 2 \cdot 4^7$,

c) $7^{10000} - 1$, d) $7^{7^{7^7}} - 3$, e) $3^{1990} + 3^{1996}$.

66. Dokaži da je $(2^{1996} + 5)$ deljivo sa 7.

67. Dokaži da je broj $(43^{1995} - 37^{1993})$ deljiv brojem 5.

68. Dokaži da je zbir $1^{1996} + 2^{1996} + 3^{1996} + 4^{1996} + 5^{1996} + 6^{1996}$ deljiv sa 5, a nije deljiv sa 10.

69. Koja je cifra jedinica zbira: $1^{1996} + 2^{1996} + \cdots + 1996^{1996}$?

70. Neka je $S = p_1^{1996} + p_2^{1996} + \cdots + p_{1996}^{1996}$, gde su $p_1, p_2, \ldots, p_{1996}$, prvih 1996 prostih brojeva. Dokaži da je S deljivo sa 5.

71. Dokaži da za svaki prirodni broj n važi:

a) $5^{2n-1} - 1$ nije deljivo sa $4^n - 1$;

b) $3^{2n} - 1$ nije deljivo sa $2^{2n} - 1$.

72. Izraz $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ deljiv je sa 19 za svaki prirodni broj n. Dokaži.

73. Pet duži je konstruisano iz zajedničke tačke A. Zatim je iz nekih od slobodnih krajeva ovih duži (ne iz tačke A) konstruisano pet novih duži i to je ponovljeno nekoliko puta. Lolo je prebrojao slobodne krajeve duži i utvrdio da ih ima 1000. Da li je tačno izbrojao?

74. Izvestan broj od 10 listova isečen je na po 10 delova, zatim se od dobijenih delova neki ponovo iseku na 10 delova, itd. Da li na ovaj način možemo dobiti 2000 delova?

75. Zmaj ima 2017 glava. Vitez Koja može jednim udarcem mača odseći jednu, sedamnaest, dvadeset jednu ili trideset tri glave, ali pri tome zmaju izrastu odmah redom: deset, četrnaest, nula, odnosno četrdeset osam novih glava. Može li vitez Koja odseći zmaju sve glave?

1.5. Deljivost celih brojeva

U ovom odeljku proučavaćemo deljivost celih brojeva u okviru razmatranja vrednosti polinoma sa celobrojnim promenljivim, kao i utvrđivanje deljivosti korišćenjem polinoma.

Korisno je znati sledeću osobinu:

- ako je $d(a,\, b' - d$, onda je i $d(a,\, b,\, a-b) = d$, gde je $a > b$;
- ako je d delilac prirodnih brojeva p i q, onda je d delilac broja $(p-q)$, a i broja $mp-q$, gde su m i n prirodni brojevi.

Jedna od poznatih osobina koju ćemo dosta koristiti, vezana je za proizvod uzastopnih celih brojeva:

- proizvod dva uzastopna cela broja je parni broj (deljiv sa 2);
- proizvod tri uzastopna cela broja deljiv je sa 3;
- uopšte: proizvod k uzastopnih celih brojeva:

  $(n+1)(n+2)\cdots(n+k)$ deljiv je sa k.

Razume se, proizvod tri uzastopna broja deljiv je i sa 2, jer sadrži i dva uzastopna broja, pa je prema tome, deljiv i sa 6, itd. Tako je proizvod k uzastopnih prirodnih brojeva deljiv sa $2, 3, \ldots, (k-1)$ i k.

Primer A). Dokaži da je proizvod $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 200$ deljiv sa 2^{100}, a nije deljiv sa 2^{101}.

Dokaz. Proširimo dati proizvod sa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$:

$$101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 200 = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100) \cdot (101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100} =$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 197 \cdot 199 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 198 \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100}.$$

Proizvod brojeva $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 200$ razdvojili smo na neparne i parne (svi parni su u zagradi). Svaki od parnih brojeva napišemo u obliku $2k$, pa dobijemo $2 = 2 \cdot 1$, zatim $4 = 2 \cdot 2$, pa $6 = 2 \cdot 3$, itd. na kraju $200 = 2 \cdot 100$. Izdvojimo proizvod dvojki pred zagradu i dobijemo:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 197 \cdot 199 \cdot 2^{100} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100} =$$

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 197 \cdot 199 \cdot 2^{100}$. Rezultat koji smo dobili posle skraćivanja razlomka potvrđuje činjenice koje smo trebali dokazati.

Primer B). Vrednost polinoma $P(z)=z^3+5z^2+3z-9$ deljiva je sa 8 za svaki neparni broj z. Dokaži.

Dokaz. Rastavimo polinom na činioce: $P(z)=z^3-z^2+6z^2-6z+9z-9=z^2(z-1)+6z(z-1)+9(z-1)=(z-1)(z^2+6z+9)=(z-1)(z+3)^2$.

Ako je z neparan broj, tj. $z=2k+1$, gde je k celi broj, tada je $P(2k+1)=(2k+1-1)(2k+1+3)^2=2k\cdot(2k+4)^2=2k\cdot 2^2(k+2)^2=8k(k+2)^2$. Dakle, $P(2k+1)$ deljivo je sa 8.

Primer C). Rastavi na činioce polinom n^4+4k^4, pa dokaži da je vrednost izraza $2^{1998}+5^{2000}$ složen broj.

Rešenje. $n^4+4k^4=n^4+4k^2n^2+4k^4-4k^2n^2=(n^2+2k^2)^2-4k^2n^2=(n^2+2k^2-2kn)(n^2+2k^2+2kn)$.

Koristeći se ovom idejom dobijamo: $2^{1998}+5^{2000}=(5^{500})^4+4\cdot(2^{499})^4=(5^{1000}+2\cdot 2^{998}-2\cdot 2^{499}\cdot 5^{500})(5^{1000}+2\cdot 2^{998}+2\cdot 2^{499}\cdot 5^{500})$.

Dakle: $2^{1998}+5^{2000}=M\cdot N$, gde su M i N veći od 1.

Primer D). Odredi prosti broj p, takav da je broj $2p+1$ tačan kub nekog prirodnog broja.

Rešenje. Neka je $2p+1=n^3$. Zaključujemo da je n neparan broj. Dalje imamo: $2p=n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$, pa ako stavimo $n=2k+1$, dobićemo: $2p=2k(4k^2+6k+3)$, odakle je $p=k(4k^2+6k+3)$. Broj p je prost, pa prema poslednjoj jednakosti, mora biti $k=1$. Sledi da je $p=1\cdot(4\cdot 1^2+6\cdot 1+3)$, odnosno $p=13$.

Primer E). Neka su a i b uzastopni celi brojevi i n prirodni broj. Dokaži da je najveći zajednički delilac brojeva $an+b$ i $bn+a$ neparan broj.

Dokaz. Zbir i razlika dva uzastopna cela broja su neparni, pa su neparni i brojevi $(a+b)$ i $(a-b)$.

Neka je d najveći zajednički delilac brojeva $an+b$ i $bn+a$. Tada je d delilac i broja $a(bn+a)-b(an+b)=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Kako je $(a-b)(a+b)$ neparan broj, to je i d neparan broj.

76. Dokaži da je broj $7^{100}-1$ deljiv sa 100.

77. Dokaži da zbir četiri uzastopna cela broja nije deljiv sa 4.

78. Dokaži da zbir kvadrata tri cela broja ne može pri deljenju sa 8 dati ostatak 7.

79. Dokaži da zbir bilo kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva daje složeni broj.

80. Dokaži da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja deljiva sa 8.

81. Dokaži da je zbir kubova tri uzastopna prirodna broja deljiv sa 9.

82. Proizvod tri uzastopna prirodna broja deljiv je sa 504, ako je srednji broj tačan kub prirodnog broja. Dokaži.

83. Ako je cifra jedinica broja n jednaka 5, da li je treća cifra zdesna kod broja n^2 parna ili neparna?

84. Odredi sve zajedničke delioce brojeva $5k+6$ i $8k+7$, gde je k celi broj.

85. Svaki broj oblika $6n-1$ ima bar jedan prosti delilac oblika $6k-1$, gde su n i k prirodni brojevi. Dokaži.

86. Ako je n prirodni broj, tada n^2+n+1 nije deljivo ni sa 2004, ni sa 2005. Dokaži.

87. Da li postoji prirodni broj n, takav da je vrednost polinoma $P(n)=n^2+2n+1999$ kvadrat nekog prirodnog broja?

88. Ako je n parni broj, dokaži da je $n^3+2000n$ deljivo sa 6.

89. Ako je x prirodni broj, dokaži da je vrednost polinoma $P(x)=5x^3+25x$ deljiva sa 15.

90. Ako je n prirodni broj, da li je vrednost polinoma $P(n)=n^4+2n^3-n^2-2n$ deljiva sa 24?

91. Za koje celobrojne vrednosti z vrednost izraza $\dfrac{z^3+5z}{6}$ je celi broj?

92. Za koje je prirodne brojeve n vrednost polinoma $P(n)=n^3+3n^2-n-3$ deljiva sa 48?

93. Ako je p prosti broj, $p>3$, dokaži da je p^2-1 deljivo sa 24.

94. Ako je p prosti broj veći od 3, onda je vrednost polinoma $P(p)=p^2+11$ deljiva sa 12. Dokaži.

95. Dat je polinom $P(x)=x^3+2x^2-x-2$. Ako je p prosti broj veći od 3, dokaži da je $P(p)$ deljivo sa 24, pa odredi najmanji prosti broj p, takav da je $P(p)$ deljivo sa 216.

96. Odredi prirodni broj n tako da broj n^4+4 bude složen.

97. Dokaži da je 333^4+4^{333} složeni broj.

98. Sa tri odabrane različite cifre napisani su svi mogući trocifreni brojevi, tako da se svaka cifra koristi u zapisivanju svakog broja. Zbir dva najveća od ovih šest brojeva iznosi 1444. Koje su te tri cifre?

99. Svaki prosti broj veći od 2 može se na jedinstven način predstaviti kao razlika kvadrata dva prirodna broja. Dokaži.

100. Ako je $a^5+b^5=162075$, gde su a i b celi brojevi, dokaži da je $a+b$ deljivo sa 15.

101. Ako je zbir 2017 prirodnih brojeva deljiv sa 6, dokaži da je i zbir njihovih kubova deljiv sa 6.

102. Odredi prosti broj p, takav da je $2p^2+1=k^5$, gde je k prirodni broj.

103. Dat je polinom $P(n)=n^4-4n^3+4n^2$. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $P(n)$ deljivo sa 3.

104. Dokaži da izraz n^3-n+2^n nije deljiv sa 2001, za sve vrednosti prirodnog broja n.

105. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $3n^2+3n+7$ deljivo sa 5. Kad je vrednost ovog izraza deljiva sa 6?

106. Za koje je prirodne brojeve n zbir $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$ deljiv sa 10?

107. Ako prirodni brojevi m i n nisu deljivi sa 3, dokaži da je m^6-n^6 deljivo sa 9.

108. Ako nijedan od pet odabranih prirodnih brojeva nije deljiv sa 5, dokaži da je zbir njihovih četvrtih stepena deljiv sa 5.

109. Ako je broj n^2+2^n prost, n je prirodni broj, dokaži da je broj $n-3$ deljiv sa 6.

110. Ako je zbir $m^2+3mn+n^2$ deljiv sa 25, dokaži da su prirodni brojevi m i n deljivi sa 5.

111. Nađi sve proste brojeve p, takve da broj p^2+11 ima tačno 6 različitih delilaca (uključujući 1 i samog sebe).

112. Dokaži da je vrednost polinoma $P(x)=x^5-5x^3+4x$ deljiva sa 120 za svaki celi broj x.

113. Nađi N tako da važi jednakost: $N=a^4+b^4+c^4-3$, gde su a, b, c i N različiti prosti brojevi.

114. Dokaži da je broj $m = 4a^2 + 3a + 5$, gde je a celi broj, deljiv sa 6, samo ako broj a nije deljiv ni sa 2, ni sa 3.

115. Da li postoji prirodni broj n, takav da vrednost polinoma $P(n) = 2n^3 - 8n^2 - 6n + 3$ bude kvadrat nekog prirodnog broja?

116. Dokaži da je zbir $s = 1^{1999} + 2^{1999} + 3^{1999} + \cdots + 1999^{1999}$ deljiv sa 1999.

117. Dat je polinom $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$. Dokaži da je broj $P(1111)$ deljiv sa 792.

118. Ako je $P(x) = x^2 - x - 2$, dokaži da je broj $P(44\ldots4)$ deljiv sa 270, gde se broj $44\ldots4$ zapisuje sa jedanaest četvorki.

119. Ako je $P(x) = x^2 - 4x - 21$, dokaži daje broj $P(1111222)$ deljiv sa 375.

120. Dokaži da je izraz $N = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ deljiv sa 10 za svaki prirodni broj n.

1.6. Neke nejednakosti

Dokazivanje nejednakosti može biti dosta teško, makar i da računski aparat neophodan za izvođenje dokaza nije komplikovan. Zadaci koje ćemo ovde rešavati traže poznavanje nekoliko elementarnih nejednakosti i malo snalažljivosti. Podsetićemo se na neke proste relacije.

Polazeći od činjenice da kvadrat realnog broja ne može biti negativan, dobijamo niz važnih nejednakosti, kao:

$a^2 + b^2 \geqslant 0$, znak $=$ važi samo ako je $a = 0$ i $b = 0$

$(a - b)^2 \geqslant 0$, znak $=$ važi samo ako je $a = b$.

Iz poslednje nejednakosti dobijamo da je $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$, odakle sledi poznata Košijeva nejednakost:

$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, znak $=$ važi samo ako je $a = b$.

Primer A). Dokaži: ako je $a > 0$, tada je $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$. Kada važi znak jednakosti?

Dokaz. Polazeći od očigledne nejednakosti: $(a-1)^2 \geqslant 0$, dobijamo $a^2+1 \geqslant 2a$. Posle deljenja nejednakosti sa a, sledi traženi zaključak. Očigledno, znak jednakosti važi za $a=1$.

Primer B). Ako su brojevi x i y suprotnog znaka, dokaži da je $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \leqslant -2$.

Dokaz. Polazimo od tačne nejednakosti $(x+y)^2 \geqslant 0$. Odavde je $x^2+y^2 \geqslant -2xy$. Kad ovu nejednakost podelimo sa xy, znak nejednakosti će se promeniti, jer je $xy<0$. Tako dobijemo traženu nejednakost.

Primer C). Ako su a, b i c pozitivni brojevi, dokaži da je $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. Kada važi znak jednakosti?

Dokaz. Primenimo tri puta Košijevu nejednakost: $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $b^2+c^2 \geqslant 2bc$, $a^2+c^2 \geqslant 2ac$. Kad ove tri nejednakosti saberemo i rezultat skratimo sa 2, dobićemo traženu nejednakost. Znak jednakosti, na osnovu Košijeve nejednakosti, važi ako je $a=b=c$.

Primer D). Ako su a i b takvi brojevi da je $a-b \geqslant 2$, dokaži da je $a^4+b^4 \geqslant 2$.

Dokaz. Kvadriranjem date nejednakosti dobijamo: $a^2-2ab+b^2 \geqslant 4$. Ovome dodamo tačnu nejednakost $(a+b)^2 \geqslant 0$, odnosno $a^2+2ab+b^2 \geqslant 0$. Dobijeni rezultat skratimo sa 2 i dobijemo: $a^2+b^2 \geqslant 2$. Sada kvadriramo poslednju nejednakost $((a^2+b^2)^2 \geqslant 4)$ i dodamo joj tačnu nejednakost $(a^2-b^2)^2 \geqslant 0$, odnosno $a^4-2a^2b^2+b^4 \geqslant 0$. Saberemo, skratimo sa 2 i dobijemo: $a^4+b^4 \geqslant 2$.

121. Ako je x pozitivan broj i zna se da je $\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}$ i $\frac{z}{y-x}=3$, utvrdi da li je veće x ili z.

122. Ako je $a<b$, dokaži da je $a<\frac{a+b}{2}<b$.

123. Ako je $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ dokaži da je $\frac{a+b}{b} \leqslant \frac{c+d}{d}$ i $\frac{a-b}{b} \leqslant \frac{c-d}{d}$.

124. Ako su x i y takvi brojevi da je $x>2$ i $y>2$, dokaži da je $xy>x+y$.

125. Ako su x, y, z brojevi iz intervala $(0,\,1)$, dokaži da je $0 < xyz - xy - yz - xz + x + y + z < 1$.

126. Ako su a i b pozitivni brojevi i $a > b$, dokaži da je $(a+b)^{100} < 2^{100}(a^{100} + b^{100})$.

127. Ako su a i b pozitivni brojevi, takvi da je $a + b = 1$, dokaži da je $a^3 + b^3 \geqslant \frac{1}{4}$.

128. Ako su a, b i c pozitivni brojevi, dokaži da je $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geqslant a + b + c$.

129. Ako realni brojevi a, b, c zadovoljavaju uslov: $a+b+c = 1$, dokaži da je $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

130. Za realne brojeve a, b važi nejednakost: $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + a + b$. Dokaži.

131. Ako je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, dokaži da važi nejednakost: $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geqslant 6abc$.

132. Odredi najveću vrednost izraza $M = \frac{a}{9 + 4a^2}$, gde je $a > 0$.

133. Za četiri broja a, b, c, d važi: $d > c$, $a + b = c + d$ i $a + d < b + c$. Poređaj ova četiri broja po veličini.

134. Dokaži da je $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{78}{79} \cdot \frac{80}{81} < \frac{1}{9}$.

135. Ako su a, b, p, q, r, s, prirodni brojevi, takvi da važi $qr - ps = 1$ i $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$, dokaži da je $b \geqslant q + s$.

1.7. Nejednakosti sa sredinama

Za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_k$, broj $s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$ naziva se *aritmetička sredina* (ili *srednja vrednost*).

Specijalno za $k = 2$ je $s = \frac{a+b}{2}$ i za $k = 3$ je $s = \frac{a+b+c}{3}$ (aritmetička sredina za dva, odnosno za tri broja).

Broj g, takav da je $g^k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$, naziva se *geometrijskom sredinom* pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Specijalno za $k = 2$ i $k = 3$ je $g = \sqrt{a \cdot b}$ i $g = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ (geometrijska sredina za dva i za tri pozitivna broja, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

Između aritmetičkih i geometrijskih sredina važe nejednakosti (navodimo samo slučajeve za $k = 2$ i $k = 3$, a slično je i za $k > 3$):

$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, odnosno $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

Znak jednakosti u prvom slučaju važi ako je $a = b$, a u drugom slučaju ako je $a = b = c$.

U nekim zadacima koristićemo definiciju n-tog korena:

– ako je n parni broj, $a \geqslant 0$, onda je $\sqrt[n]{a^n} = a$,

– ako je n parni broj i $a < 0$, onda je $\sqrt[n]{a^n} = |a|$,

– ako je n neparni broj, onda je $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Primer A). Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c i d važi nejednakost: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4$, pri čemu znak jednakosti važi ako je $a = b = c = d$.

Dokaz. Primenimo nejednakost među sredinama za $k = 4$:
$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} = 4\sqrt[4]{1} = 4 \cdot 1 = 4$. Očigledno je da za $a = b = c = d$ važi $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

Primer B). Ako su x, y i z pozitivni brojevi, takvi da je $x \cdot y \cdot z = 1$, onda je $(4x + y) \cdot (3y + z) \cdot (2z + x) > 54$. Dokaži.

Dokaz. Na svaku od tri zagrade primenićemo nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za $k = 3$, i to na sledeći način:
$(4x + y)(3y + z)(2z + x) = (2x + 2x + y) \cdot (2y + y + z) \cdot (z + z + x) >$
$3 \cdot \sqrt[3]{2x \cdot 2x \cdot y} \cdot 3\sqrt[3]{2y \cdot y \cdot z} \cdot 3\sqrt[3]{z \cdot z \cdot x} =$
$27 \cdot \sqrt[3]{8x^3 \cdot y^3 \cdot z^3} = 27 \cdot 2 \cdot xyz = 54$ (jer je $xyz = 1$). (Nije $\geqslant$, nego $>$, jer ne može biti $y = 2y$.)

136. Prosečna starost fudbalera neke ekipe za jednu godinu je veća nego prosečna starost deset fudbalera bez kapitena. Za koliko je godina starost kapitena veća od prosečne starosti preostalog dela ekipe?

Za pozitivne brojeve a, b, c, dokaži nejednakosti **137-145**.

137. $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

138. $(a+2)(b+2)(a+b) \geqslant 16ab$.

139. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$, pri čemu znak jednakosti važi za $a=b=c$.

140. $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$.

141. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 9abc$.

142. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$.

143. $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 6abc$.

144. $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc$.

145. $2a^3+11>9a$.

146. Ako su a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 pozitivni brojevi i $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$, dokaži da je $\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_5}-1\right) \geqslant 1024$.

147. Ako je $x>0$, $y>0$, $z>0$ i $xyz=1$, dokaži da je $(x+1)(y+1)(z+1) \geqslant 8$.

148. Ako su x, y, z pozitivni brojevi i $x+y+z=a$, dokaži da je $(a-x)\cdot(a-y)\cdot(a-z) \geqslant 8xyz$.

149. Ako su x, y, z pozitivni brojevi, takvi da je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, dokaži da je $(x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1) \geqslant 8$.

Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi, dokaži nejednakosti **150-152**.

150. $\dfrac{(a_1^2+a_1+1)\cdot(a_2^2+a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n^2+a_n+1)}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \geqslant 3^n$.

151. $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$.

152. $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geqslant n$.

153. Ako su a_1, a_2, $\ldots$, a_n pozitivni brojevi i $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$, dokaži da važi nejednakost: $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geqslant 2^n$.

154. Na svakoj strani kocke napisan je po jedan broj, i to tako da je svaki od njih aritmetička sredina svih svojih susednih brojeva (ima ih četiri). Dokaži da su svi napisani brojevi jednaki među sobom.

155. Data je kvadratna tabela sa 10 puta 10 polja u koju je upisano 100 brojeva. Svaki broj predstavlja aritmetičku sredinu svih svojih susednih brojeva (može da ih ima 8). Dokaži da su svi brojevi u tabeli jednaki među sobom.

1.8. Realni brojevi

Od korena imamo posla samo sa kvadratnim korenom. Moramo imati na umu da je $\sqrt{a}$ realan broj, samo ako je $a \geqslant 0$. Važe sledeće osobine:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, za $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, samo ako je $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

$\sqrt{a^2} = a$, za $a \geqslant 0$ i $\sqrt{a^2} = -a$ ako je $a < 0$, tj. $\sqrt{a^2} = |a|$.

Npr.: $\sqrt{9} = 3$. Nije tačno tvrđenje $\sqrt{9} = \pm 3$! Tačno je: $-\sqrt{9} = -3$!

Takođe važi: $(\sqrt{a})^2 = a$, ako je $a \geqslant 0$.

Zapamtite i sledeće:

Iz $x = \sqrt{a}$ ne sledi $x^2 = a$! Tačno je tvrđenje: ako je $x \geqslant 0$ i $a \geqslant 0$, tada iz $x = \sqrt{a}$ sledi: $x^2 = a$.

Broj oblika $\dfrac{p}{q}$, gde je p celi broj, a $q \in N$, je **racionalni broj**. Decimalni zapis racionalnog broja ima konačan broj decimala ili predstavlja periodnični zapis sa beskonačno mnogo decimala (na primer: $\dfrac{5}{11} = 0,454545\ldots = 0,\dot{4}\dot{5}$).

Ako je $a > 0$ i $a \neq k^2$, onda je $\sqrt{a}$ **iracionalni broj**.

Iracionalni broj ne može se predstaviti u obliku $\dfrac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti brojevi. Decimalni zapis iracionalnog broja sadrži beskonačno mnogo decimala koje nisu periodične.

Ako je y iracionalan, a k racionalni broj, $k \neq 0$, onda su iracionalni i brojevi $k \cdot y$ i $k + y$.

Primer A). Utvrdi šta je veće: $2 + \sqrt{2}$ ili $6 - \sqrt{6}$.

Rešenje. Ekvivalentno je pitanje: šta je veće $\sqrt{2}$ ili $4 - \sqrt{6}$, a to zavisi od odnosa brojeva $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ i 4. Kako je $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 2 + 2\sqrt{12} +$

$6 = 8 + 4\sqrt{3} < 8 + 4 \cdot 2 = 16 = 4^2$, sledi da je $\sqrt{2} + \sqrt{6} < 4$, pa je i $2 + \sqrt{2} < 6 - \sqrt{6}$.

Primer B). Izračunaj $K = \dfrac{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Rešenje. Kako je $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$, to je: $K = \dfrac{\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{(2 - \sqrt{3})^2}{2 - \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} =$ $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 1$.

Primer C). Izračunaj $\sqrt{\underbrace{1111\ldots11}_{200} - \underbrace{22\ldots2}_{100}}$.

Rešenje. Uočimo da je $1111\ldots11 - 22\ldots2 = \frac{1}{9}(10000\ldots00 - 1) - \frac{2}{9}(100\ldots0 - 1) = \frac{1}{9}(10^{200} - 1 - 2 \cdot 10^{100} + 2) = \frac{1}{9}((10^{100})^2 - 2 \cdot 10^{100} + 1) = \left(\frac{1}{3}(10^{100} - 1)\right)^2$. Zbog toga je:
$\sqrt{\underbrace{1111\ldots11}_{200} - \underbrace{22\ldots2}_{100}} = \frac{1}{3}(10^{100} - 1) = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{100} = \underbrace{33\ldots3}_{100}$.

156. Utvrdi da li je tačna nejednakost: $(\sqrt{2})^{300} > (\sqrt{3})^{200}$.

157. Izračunaj na deset decimala $\sqrt{0,999\,999\,9999}$.

158. Da li je racionalna vrednost izraza:

a) $1,424242\ldots + \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$?

159. Izračunaj:

a) $\sqrt{(\sqrt{2017} - 45)^2} + \sqrt{(44 - \sqrt{2017})^2}$;

b) $\sqrt{(x + 1)^2} - \sqrt{(x - 1)^2} + 2\sqrt{3}$, za $x = 2 - \sqrt{3}$.

160. Šta je veće

a) $\sqrt{102}+\sqrt{103}$ ili $\sqrt{101}+\sqrt{104}$;

b) $5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$ ili $3\sqrt{5}+7$?

161. Utvrditi šta je veće:

a) $2-\sqrt{3}$ ili $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{5+2\sqrt{5}}{2}$ ili $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{6}$ ili $\dfrac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$.

162. Dokaži da je $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$, za $a>0$ i $b>0$.

163. Dokaži nejednakosti:

a) $\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$; b) $\sqrt{1+\sqrt{2}}<\dfrac{7}{4}$;

c) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}}>\dfrac{8}{5}$; d) $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}+\sqrt{2}}}>3$.

164. Dokaži da je vrednost izraza prirodni broj:

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

165. Dokaži da vrednost izraza $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ predstavlja iracionalni broj.

166. Izračunaj: $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}-\sqrt{5}$.

167. Koristeći se osobinom da za $a\geqslant 0$ važi: $a=\sqrt{a^2}$ i za $a<0$ je $a=-\sqrt{a^2}$ izračunaj:

a) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}$; b) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}$.

168. Izračunaj: $\sqrt{\underbrace{444\ldots444}_{2n}+\underbrace{11\ldots11}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n}}$.

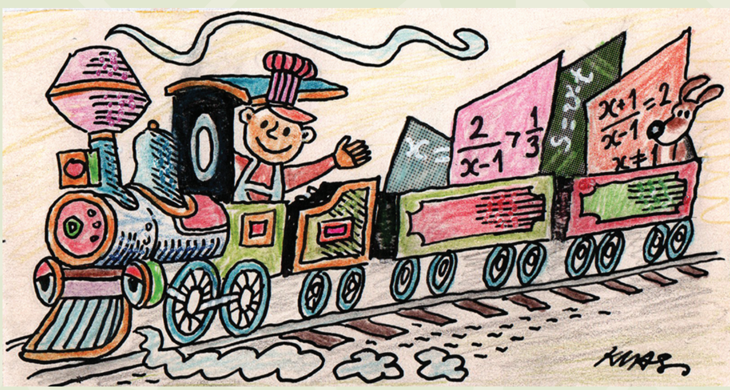
169. Ako su a, b, c i $\dfrac{a-b\sqrt{2017}}{b-c\sqrt{2017}}$ racionalni brojevi, dokaži da važi jednakost $a\cdot c=b^2$.

170. Odredi sve realne brojeve r, takve da su celi brojevi $r+\sqrt{3}$ i $\dfrac{1}{r}-\sqrt{3}$.

Glava 2

JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

- Linearne jednačine
- Linearne nejednačine
- Linearna funkcija
- Apsolutne vrednosti
- Linearne diofantske jednačine
- Nelinearne diofantske jednačine
- Problemi s jednom nepoznatom
- Problemi sa više nepoznatih
- Primene proporcija. Procenti



Jednačine i nejednačine

2.1. Linearne jednačine

Sve jednačine i probleme rešavaćemo u skupu realnih brojeva, pa to nećemo posebno naglašavati. Što se nejednakosti tiče, tu je sve jasno, jer relacije "veće" i "manje" imaju smisla samo na skupu realnih brojeva.

U zadacima **171-175** treba rešiti po x, date jednačine.

171. a) $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{2x+\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}}+x+10=0;$

b) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680;$

c) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+10=0.$

172. a) $\dfrac{10^{10}-x}{999999999^2-(999999998\cdot 10^9)}=10^9-1;$

b) $x\left(\left(1,2:36+1\dfrac{1}{5}:0,25-1\dfrac{5}{16}\right):\dfrac{169}{24}\right)=(7-6,35):6,5+9,9;$

c) $10101\left(\dfrac{1}{111111}-\dfrac{4}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}+\dfrac{5}{2002x}\right)=\dfrac{7}{22}.$

173. a) $\dfrac{1999}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}=2000;$ b) $\dfrac{11}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}}=7;$

174. $\dfrac{ac(x^2+1)+x(a^2+c^2)}{ac(x^2-1)+x(a^2-c^2)}=2;\ x\neq\dfrac{c}{a};\ x\neq-\dfrac{a}{c}$ i $a\neq 0$ i $c\neq 0.$

175. a) $\dfrac{x}{1997}+\dfrac{x+1}{1998}=\dfrac{x+2}{1999}+\dfrac{x+3}{2000};$

b) $\dfrac{x-a-b}{c}+\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}=3,\ a>0,\ b>0,\ c>0;$

c) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}+\dfrac{4}{a+b+c}=1,\ abc(a+b+c)\neq 0.$

176. Odredi celi broj a, tako da rešenja jednačine $a+5+\dfrac{2}{(x-1)}=0$ po nepoznatoj x budu negativni celi brojevi.

177. Odredi A i B, tako da bude $\dfrac{3x+14}{x^2+x-6}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x-2}$.

178. Izračunaj a, b, c, d iz uslova: $a:b=1\frac{1}{3}:1$, $a:c=1\frac{1}{5}:1\frac{4}{5}$, $b:d=4\frac{1}{2}:2$ i $c-a-d=3\frac{1}{3}$.

179. Reši sisteme jednačina:

a) $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1998$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1999$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=2000;$$

b) $$1+x^2=2y$$
$$1+y^2=2z$$
$$1+z^2=2t$$
$$1+t^2=2x;$$

c) $$x^2+y^2=2x+2y-1$$
$$y^2+z^2=2y+2z+3$$
$$z^2+x^2=2x+2z+2.$$

180. Odredi broj p, $p\neq\pm 2$, tako da rešenja x i y sistema jednačina $(x+py=3$ i $px+4y=6)$ zadovoljavaju uslov: $|y-x|>1$.

181. Da li postoje celi brojevi a, b, c i d, takvi da je: $abcd-a=1999$, $abcd-b=999$, $abcd-c=99$ i $abcd-d=9$?

182. Ako je $y=\dfrac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}}$ i $z=\dfrac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}}$, nađi vezu između y i z.

183. Ako je $x=\dfrac{a^n+\frac{1}{a^n}}{a^n-\frac{1}{a^n}}$, tada je $\dfrac{a^{2n}+\frac{1}{a^{2n}}}{a^{2n}-\frac{1}{a^{2n}}}=\dfrac{x^2+1}{2x}$, za svaki prirodni broj n. Dokaži.

184. Ako je $b=\dfrac{2ac}{a+c}$, $x=\dfrac{a}{b+c}$, $y=\dfrac{b}{a+c}$ i $z=\dfrac{c}{a+b}$, dokaži da je $y=\dfrac{2xz}{x+z}$.

185. Nađi pozitivne brojeve x, y, z, koji zadovoljavaju sistem jednačina:

$$\frac{xyz}{x+y}=2$$
$$\frac{xyz}{y+z}=1,2$$
$$\frac{xyz}{z+x}=1,5.$$

2.2. Linearne nejednačine

Primer A). Reši nejednačinu: $x^8-x^5+x^2-x+1\leqslant 0$.

Rešenje. Za $x\leqslant 0$ polinom na levoj strani nejednakosti je pozitivan, jer stepeni sa parnim izložiocem imaju pozitivne koeficijente, a stepeni sa neparnim izložiocem imaju negativne koeficijente. Za $x=0$, leva strana je jednaka 1, a takođe i za $x=1$. Da bismo utvrdili znak leve strane za $x>1$, transformisaćemo je na sledeći način: $x^5(x^3-1)+x(x-1)+1$. Zbog $x>1$ je $x-1>0$ i $x^3-1>0$, pa je cela leva strana pozitivna. Treba još ispitati slučaj $0<x<1$. Napišimo levu stranu u obliku: $x^8+x^2(1-x^3)+(1-x)$. Zbog $x<1$ je $1-x>0$ i $1-x^3>0$, pa je ponovo leva strana pozitivna. Dakle, za svako x leva strana nejednačine je pozitivna, pa naša nejednačina nema rešenja.

Primer B). Reši nejednačinu: $\dfrac{x+5}{x^2-x-2}>\dfrac{2}{x-2}$.

Rešenje. Transformišemo nejednačinu: $\dfrac{x+5}{(x-2)(x+1)}-\dfrac{2}{x-2}>0$, odnosno $\dfrac{x+5-2(x+1)}{(x-2)(x+1)}>0$ i na kraju $\dfrac{3-x}{(x-2)(x+1)}>0$. Znak leve strane određuje se množenjem tri linearna izraza. To ćemo prikazati na sledećoj šemi. Znak razlomka dobija se množenjem znakova triju zagrada. Interval koji predstavljaju rešenje osenčeni su na slici. Dakle, rešenja nejednačine su: $x<-1$ ili $2<x<3$.

		-1		2		3	
Znak $(3-x)$	$+\,+$		$+\,+\,+$		$+\,+$		$-\,-\,-$
Znak $(x-2)$	$-\,-$		$-\,-\,-$		$+\,+$		$+\,+\,+$
Znak $(x+1)$	$-\,-$		$+\,+\,+$		$+\,+$		$+\,+\,+$
Znak razl.	$+$		$-$		$+$		$-$

186. Reši nejednačine:

a) $-\frac{1}{7}(1-x)^2(3-x)<0$; b) $(x-2)^2<x(x-2)$; c) $4x^2-4x+3>0$;

d) $|x|+24>5x$; e) $\frac{3a-2}{a+1}<0$; f) $\frac{2-x}{x-1}>\frac{2}{3}$.

187. Nađi zajednička rešenja za nejednačine:

a) $\frac{3}{4}y-\frac{2}{3}(y-1)\geqslant 0$ i $\frac{1-y}{2}-\frac{2+y}{3}<0$;

b) $\frac{2x-19}{2}+2>\frac{2x-11}{4}$ i $\frac{x-1}{5}<\frac{2x+15}{9}-\frac{x}{3}$.

188. Za koje vrednosti promenljive x razlika izraza $\frac{3x-4}{2}$ i $\frac{x+1}{4}$ veća je od trećine vrednosti polinoma $2-5x$?

189. Za koje prirodne brojeve n izraz $\frac{5n}{6}-\frac{n-6}{2}+\frac{2n-3}{3}-2n$ ima vrednost koja nije manja od 1?

190. Za razne vrednosti broja k uporedi vrednosti izraza $k+1$ i k^2+1.

191. Koliko ima celih brojeva z koji zadovoljavaju uslov:

a) $\frac{1}{4}<\frac{2-z}{7}<\frac{11}{12}$; b) $||z|-1|<100$?

192. Za koje vrednosti k jednačina (po nepoznatoj x)

a) $\frac{k+4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3x-k}{4}+1-x$ ima rešenje koje nije veće od -1;

b) $\frac{kx}{2}-3=2(x-k)$ ima negativna rešenja?

193. U selima A, B i C živi redom 300, 200 i 100 učenika. Udaljenost sela je: $AB=3$ km, $BC=2$ km i $AC=4$ km. Gde treba izgraditi zajedničku školu da bi ukupan broj kilometara, koji bi prelazili svi učenici, bio najmanji?

194. Ako je zbir dva broja veći od njihovog proizvoda i manji od njihove razlike, dokaži da su ta dva broja različitog znaka.

195. Cena olovke je ceo broj para. Ukupna cena 9 olovaka je veća od 11, a manja od 12 dinara, a ukupna cena za 13 olovaka je veća od 15, a manja od 16 dinara. Kolika je cena jedne olovke?

2.3. Linearna funkcija

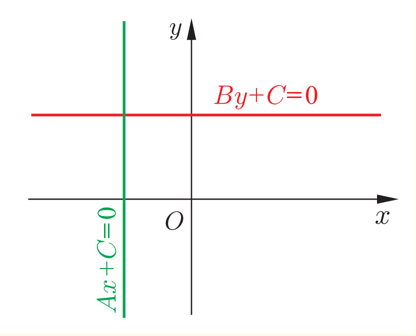
Linearna funkcija određena je formulom

$$y = kx + n, \quad k \neq 0$$

Grafička interpretacija linearne funkcije jeste prava linija u koordinatnom sistemu. Nagib ove prave u odnosu na osu Ox određen je koeficijentom k, kojeg nazivamo koeficijentom pravca. Gore navedena formula je eksplicitni oblik linearne funkcije, a formula

$$Ax + By + C = 0, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0$$

predstavlja implicitni oblik linearne funkcije. Zbog grafičke prezentacije ovu formulu nazivamo i jednačinom prave. Ova formula predstavlja pravu i ako je jedan od koeficijenata A ili B jednak nuli. Ako je $A = 0$, formula $By + C = 0$ predstavlja pravu paralelnu sa osom Ox na slici crveno obojena. Ako je $B = 0$, formula $Ax + C = 0$ predstavlja pravu paralelnu osi Oy, na slici zeleno obojena. Dve paralelne prave imaju u eksplicitnom obliku jednake koeficijente pravca: $k_1 = k_2$.



Ako tačka $P(x_1, y_1)$ leži na pravoj $Ax + By + C = 0$, onda je $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

Ako prava $Ax+By+C = 0$ seče x-osu u tački $M(x_0, 0)$, onda $x = x_0$ je nula odgovarajuće linearne funkcije. (Ako je $x = x_0$ nula funkcije, onda za $x = x_0$ odgovarajuća vrednost funkcije je $y_0 = 0$.)

Primer A). Data je linearna funkcija $y = (m^2 - 2)x + 4m^2 - 8$.

a) Odredi vrednost za m, tako da grafik funkcije prolazi kroz tačku $A(-3, 7)$.

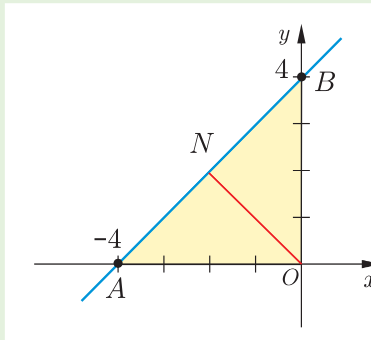
b) Izračunaj m, tako da grafik date funkcije bude paralelan grafiku funkcije $y = 2x + 3$.

c) Za $m = \sqrt{3}$ izračunaj rastojanje od koordinatnog početka do prave.

Rešenje. a) U datoj formuli zamenimo x sa -3 i y sa 7 i dobijamo: $7 = (m^2-2)\cdot(-3)+4m^2-8$. Odavde je $m^2 = 9$, pa je $m = 3$ ili $m = -3$.

b) Grafici date funkcije i funkcije $y = 2x + 3$ biće paralelni ako imaju jednake koeficijente pravca: $m^2 - 2 = 2$. Odavde je $m^2 = 4$ pa je $m = 2$ ili $m = -2$.

c) Za $m = \sqrt{3}$ imamo funkciju $y = x+4$, čiji grafik vidimo na slici. Traženo rastojanje je visina ON pravouglog trougla OAB. Kako je $AB = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}$, biće $ON = \dfrac{1}{2}AB = 2\sqrt{2}$ (osobina pravouglog jednakokrakog trougla).

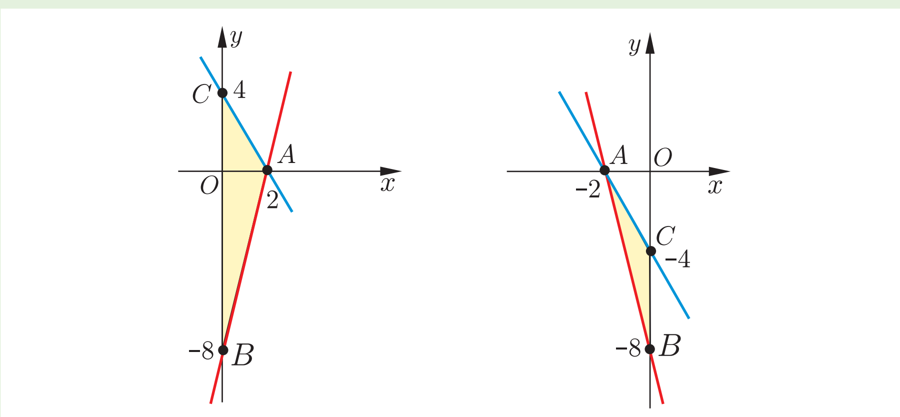


Primer B). Date su linearne funkcije: $y = ax - 8$ i $y = -2x + a$.

a) Odredi vrednost broja a, tako da ove funkcije imaju zajedničku nulu.

b) Za tako dobijenu vrednost broja a izračunaj površinu trougla čija su temena tačke preseka oba grafika sa osama Ox i Oy.

Rešenje. a) Oba grafika prolaza kroz tačku $(x_0, 0)$. Iz prve funkcije dobijamo: $0 = ax_0 - 8$, odakle je $x_0 = \dfrac{8}{a}$. Iz druge funkcije je $0 = -2x_0 + a$ odakle je $x_0 = \dfrac{a}{2}$. Sada iz $\dfrac{8}{a} = \dfrac{a}{2}$ dobijamo $a^2 = 16$, pa je $a = 4$ ili $a - 4$.



b) Imamo dva rešenja: za $a = 4$ (slika levo) i za $a = -4$ (slika desno).

U prvom slučaju za $a = 4$, dobijamo funkcije $y = 4x - 8$ i $y = -2x + 4$, koje imaju zajedničku tačku $A(0, 2)$. Preseci sa osom Oy su tačke $B(0, -8)$ i $C(0, 4)$, pa je u trouglu ABC stranica $BC = 12$ i odgovarajuća visina $OA = 2$. Dakle, površina trougla ABC je $P = \frac{1}{2}BC \cdot OA = \frac{1}{2}12 \cdot 2 = 12$.

U drugom slučaju imamo funkcije $y = -4x - 8$ i $y = -2x - 4$, pa su temena trougla tačke: $A(-2, 0)$, $B(0, -8)$ i $C(0, -4)$. Prema slici desno je $BC = 4$, visina $OA = 2$, pa je površina $P = \frac{1}{2}BC \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

196. Data je linearna funkcija $y = -2x + 2$.

a) Odredi dužinu odsečka grafika ove funkcije određenog presecima sa koordinatnim osama.

b) Izračunaj normalno rastojanje koordinatnog početka od grafika funkcije.

197. Teme A trougla ABC je nula linearne funkcije $y = \frac{3}{4}x + 12$, a teme B je nula linearne funkcije $y = -\frac{4}{3}x + 12$. Teme C je zajednička tačka grafika ovih funkcija.

a) Dokaži da je trougao ABC pravougli.

b) Izračunaj obim i površinu trougla ABC.

198. U koordinatnoj ravni xOy date su tačke $M(3, 4)$ i $N(x_0, 0)$. Odredi jednačine pravih OM i MN, ako je površina trougla OMN jednaka 14.

199. Date su linearne funkcije $y = 3x + a$, $y = -2x + b$ i $y = x + 1$. Izrazi a preko b, ako grafici datih funkcija imaju jednu zajedničku tačku.

200. Date su linearne funkcije: $y = \left(2m - \frac{1}{2}\right)x - 3$ i $y = (7m + 2)x - 4$. Odredi vrednost za m, tako da

a) grafici datih funkcija budu paralelne prave;

b) prva funkcija bude rastuća;

c) druga funkcija bude opadajuća.

201. Data je linearna funkcija $y = \frac{x}{k-4} + 10$. Odredi broj k, tako da grafik ove funkcije odseca jednake odsečke na koordinatnim osama, pa izračunaj površinu dobijenog trougla.

202. Data je jednačina prave: $4x+3y=n$, gde je n realni broj. Normalno rastojanje od koordinatnog početka do te prave je 12. Odredi n i površinu trougla kojeg data prava odseca od koordinatnih osa.

203. Data je linearna funkcija $y=(m+0,25)x+(1-2m)$.

a) Odredi vrednost broja m, tako da grafik funkcije prolazi kroz tačku $A(-4,\,6)$.

b) Za tako dobijeno m izračunaj površinu trougla kojeg grafik funkcije odseca na koordinatnim osama.

204. Data je linearna funkcija $y=(2m+1)x+6$.

a) Odredi m, tako da grafik funkcije prolazi kroz tačku $M(4,\,3)$.

b) Za tako određeno m izračunaj normalno rastojanje od koordinatnog početka do grafika funkcije.

205. Odredi sve parove realnih brojeva k i n, takve da grafik funkcije $y=kx+n$ sadrži tačku $P(4,\,6)$, a sa grafikom linearne funkcije $y=x+2$ i osom Ox određuje trougao površine 36.

2.4. Apsolutne vrednosti

Apsolutna vrednost broja a je veći od brojeva a i $-a$. U zavisnosti od znaka imamo vezu:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{ako je } \ a\geqslant 0\\ -a, & \text{ako je } \ a\leqslant 0\end{cases}$$

Nejednakost $|x|<3$ označava interval: $-3<x<3$. Ako bi, pak, bilo $|x|>5$, onda bi to predstavljalo dva intervala: $x<-5$ i $x>5$.

Izračunavanje izraza i rešavanje jednačina i nejednačina sa apsolutnim vrednostima svodimo na "obične" izraze, jednačine i nejednačine, bez znaka apsolutne vrednosti. Pri tome strogo vodimo računa o intervalima za koje je dozvoljeno odgovarajuće brisanje oznaka za apsolutnu vrednost.

Apsolutna vrednost se dobija i iz definicije kvadratnog korena ($\sqrt{a^2}=a$ za $a\geqslant 0$ i $\sqrt{a^2}=-a$, za $a<0$). Ističemo to sledećom jednakošću: $\sqrt{a^2}=|a|$.

Primer A). Izračunaj vrednost izraza:
$\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x^2+4x}-\sqrt{2}$, za $x=3-\sqrt{2}$.

Rešenje. Sredimo polinom pod korenom i dobijamo:
$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{2}=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{2}=|x-2|-\sqrt{2}=|3-\sqrt{2}-2|-\sqrt{2}=|1-\sqrt{2}|-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1$. ($1-\sqrt{2}<0$, pa je $|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})$.)

Primer B). Reši jednačinu: $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=2000$.

Rešenje. Imamo: $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=2000$, odakle dobijamo: $|x+1|+|x-1|=2000$. Koristićemo šemu znaka za brisanje oznake apsolutne vrednosti (slika desno). Očigledno, moramo razlikovati tri intervala vrednosti promenljive x.

		-1	1
Znak $(x+1)$	$--$	$++$	$++$
Znak $(x-1)$	$--$	$--$	$++$

1) Za $x \leqslant -1$ oba izraza, $x+1$ i $x-1$, su negativni, pa kad izbrišemo oznake apsolutne vrednosti, ispred zagrada treba promeniti znake: $-(x+1)-(x-1)=2000$. Odavde dobijamo $x=-1000$. Važno je da uočimo: $-1000 \leqslant -1$, pa $x=-1000$ predstavlja rešenje jednačine.

2) Za $-1 \leqslant x \leqslant 1$ izraz $x+1$ je pozitivan, a $x-1$ negativan, pa brisanjem oznaka apsolutne vrednosti dobijamo: $x+1-(x-1)=2000$, odnosno $2=2000$, što nije moguće. Dakle, u intervalu $-1 \leqslant x \leqslant 1$ nema rešenja.

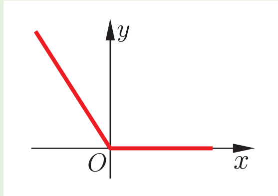
3) Za $x \geqslant 1$ oba izraza su pozitivna, pa dobijamo jednačinu $x+1+x-1=2000$, odakle je $x=1000$. Kako je $1000 \geqslant 1$, to je $x=1000$ drugo rešenje jednačine.

Primer C). Reši nejednačinu: $||x|-1| \leqslant 20$ u skupu celih brojeva.

Rešenje. Data nejednačina je ekvivalentna sa: $-20 \leqslant |x|-1 \leqslant 20$, odnosno: $-19 \leqslant |x| \leqslant 21$. Međutim, $|x| \geqslant 0$, pa je odavde: $0 \leqslant |x| \leqslant 21$, ili $-21 \leqslant x \leqslant 21$. Celobrojna rešenja su $-21, -20, -19, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, 21$. Ima ih 43.

Primer D). Nacrtaj grafik funkcije $y = |x - |x||$.

Rešenje. Kako je, po definiciji: $|x| = x$, za $x \geqslant 0$ i $|x| = -x$, za $x \leqslant 0$, to je: $x - |x| = x - x = 0$, za $x \geqslant 0$ i $x - |x| = x + x = 2x$, za $x \leqslant 0$. Dakle: za $x \geqslant 0$, $y = |x - |x|| = |0| = 0$ i za $x \leqslant 0$. $y = |x + x| = |2x| = -2x$. Grafik vidimo na slici desno (crvena linija).



206. Izračunaj $\sqrt{(x^2-4x-5)(x^2-x-2)(x^2-7x+10)}$, za $x=2-\sqrt{3}$.

207. Izračunaj vrednost izraza $A = x + 1 + \sqrt{x^2}$, za $x = \sqrt{5} - 1999$.

208. Dokaži da za $5 \leqslant a \leqslant 10$ važi jednakost:

$$\sqrt{a + 3 - 4\sqrt{a-1}} + \sqrt{a + 8 - 6\sqrt{a-1}} = 1.$$

Reši jednačine u zadacima **209-212.**

209. a) $|2x - 3| = \dfrac{(2x+3)^2}{6} - \dfrac{4x^2 + 2x + 3}{6}$;

b) $\left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{49\cdot 50}\right)|x - 5| = 98$;

c) $|2x - 1| + 2x = 3$; d) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| = 1$.

210. a) $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{3}{2} - x\right|$; b) $|x - 1| + |x + 3| = 2x + 2$;

c) $|x^2 + 2x + 100| - |x^2 + 200| = 3898$.

211. $|1 - |x|| = 2$.

212. a) $\dfrac{2x-5}{3} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{x-2}{6} - \dfrac{x-4}{2}$, gde je $x \in N$;

b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 13$;

c) $|x + 1| + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x$.

213. Reši sistem jednačina: $|x| + |y| = 2000$, $y - x = 2$.

214. Reši sistem jednačina: $|x| + |y| = 5$, $|x| - |y| = 3$.

Reši nejednačine u zadacima **215, 216 i 217.**

215. a) $|x| + 1999 > 5x$; b) $x - 2|x| > 2$; c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} < 1999$.

216. $||2x+1|-5| > 2$.

217. $\dfrac{1999}{1+|x-1|} > 1$.

218. Predstavi u koordinatnoj ravni skup tačaka dat jednakošću:

a) $y = |x| + x$;   b) $y = \dfrac{x^2}{|x|}$;

c) $y = |x+4| - |x-2|$;   d) $x + |x| = y + |y|$.

219. Za koje vrednosti broja a jednačina $||x|-1| = a$ ima najviše rešenja?

220. Šest brojeva je raspoređeno u temenima pravilnog šestougla. Zbir svih brojeva jednak je 1 i svaki od njih jednak je apsolutnoj vrednosti razlike dvaju prethodnih brojeva, posmatrajući ih u smeru kretanja kazaljki na satu. Koji su to brojevi?

2.5. Linearne diofantske jednačine

Starogrčki matematičar Diofant (Diofantos) napisao je delo "Aritmetika" u kome je posebno obradio problem rešavanja algebarskih jednačina u skupu celih brojeva. To je razlog zbog kojeg ćemo takve jednačine nazivati diofantske (ili Diofantove) jednačine. Proučićemo odvojeno linearne i nelinearne.

Budući da imamo ograničenje da rešenja budu celi (prirodni) brojevi, često se rešenje može naći diskutovanjem mogućih slučajeva. Postoje i uopšteni načini rešavanja, koje ćemo ovde obraditi.

Primer A). Jednačinu $3x - 4y = 5$ reši u skupu celih brojeva.

Rešenje. *Prvi način.* Rešavamo po x i dobijamo: $3x = 4y + 5$, odakle $x = \dfrac{4y+5}{3} = \dfrac{3y+3+y+2}{3} = \dfrac{3(y+1)}{3} + \dfrac{y+2}{3} = y+1+\dfrac{y+2}{3}$. Da x i y budu celi brojevi, mora i $\dfrac{y+2}{3}$ biti celi broj. Stavimo $\dfrac{y+2}{3} = z$. Odavde je $y = 3z - 2$. Ako je z celi broj tada je sigurno i y celi broj. Izrazimo i x preko z, pa imamo sva cela rešenja date jednačine:
$x = 4z - 1$, $y = 3z - 2$, za svaki celi broj z.

Drugi način. Nije teško dokazati tvrđenje: ako jednačina $ax + by = c$ ima jedno celo rešenje: (x_0, y_0), tada su sva cela rešenja ove jednačine $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, gde je t celi broj.

U našem slučaju vidimo da je $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ rešenje, jer $3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 5$. Sva cela rešenja naše jednačine su $x = 3 - 4t$, $y = 1 - 3t$.

Lako se dokazuje još jedna interesantna osobina:

– Jednačina $ax + by = c$ ima rešenja u skupu celih brojeva ako i samo ako je najveći zajednički delilac brojeva a i b, tj. $D(a, b)$, ujedno i delilac broja c.
– Važna posledica ove osobine je: ako je $D(a, b) = 1$, jednačina $ax + by = c$ ima rešenja u skupu celih brojeva.

Primer B). U skupu prirodnih brojeva reši po x jednačinu: $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$. (Po definiciji ("en faktorijel"): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

Rešenje. Ako je $x = 1$, imamo jednačinu: $1! = y^2$, tj. $1 = y^2$, pa je i $y = 1$. To je jedno rešenje. (Po definiciji je $1! = 1$.)

Ako je $x = 2$, iz $1! + 2! = y^2$, tj. iz $3 = y^2$, vidimo da ne može biti $x = 2$. (Znamo da je $2! = 1 \cdot 2 = 2$.)

Ako je $x = 3$, imamo: $1! + 2! + 3! = y^2$, tj. $1 + 2 + 6 = y^2$, pa je $y = 3$. To je drugo rešenje, jer je $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Ako je $x = 4$, iz $1! + 2! + 3! + 4! = y^2$, tj. iz $33 = y^2$, vidimo da za $x = 4$ nema rešenja. (Po definiciji je $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.)

Kako je $5! = 120$, to za $x > 4$ imamo uslov: $1! + 2! + 3! + 4! + 10k = y^2$, tj. $33 + 10k = y^2$, a ona nema rešenja, jer se broj $33 + 10k$ završava cifrom 3, a takvo y^2 ne postoji.

Primer C). Grafitna olovka staje pola evra, hemijska olovka jedan evro, a naliv pero pet evra. Kako ćemo za 20 evra kupiti 20 artikala?

Rešenje. Uslove možemo zapisati kao: $\frac{x}{2} + y + 5z = x + y + z$ i $x + y + z = 20$. Iz prve jednačine dobijamo $x = 8z$, pa zamenom u drugu dobijamo $y + 9z = 20$. Očigledno je $z = 1$ ili $z = 2$. Ako je $z = 1$, tada je $y = 11$ i $x = 8$, a ako je $z = 2$, onda je $y = 2$ i $x = 16$ (dva rešenja).

Primer D). Koje godine XX veka je rođen Boško, ako je on 1999. godine napunio onoliko godina koliko iznosi zbir cifara godine njegovog rođenja?

Rešenje. Godina rođenja Boška je $\overline{19xy}$, pa imamo jednačinu: $1999-(1900+\overline{xy})=1+9+x+y$. Stavljajući $\overline{xy}=10x+y$, dobijamo jednačinu $11x+2y=89$, gde su x i y cifre. Očigledno je x neparna cifra. Budući da je $y\leqslant 9$, jasno je da ne može biti $x=1$, ni $x=3$, ni $x=5$. Ne može biti ni 9, jer je $9\cdot 11=99$. Dakle $x=7$, pa je $y=6$. Dakle, Boško je rođen 1976. godine.

221. U skupu celih brojeva reši jednačine:

a) $3x-5y=7$; b) $9x+10y=1999$;

c) $x!+2y=25$; d) $p^2-x!=2$, gde je p prost broj.

222. U koordinatnoj ravni xOy data je prava jednačinom $4x+7y=99$. Koliko data prava u prvom kvadrantu ima tačaka kojima su obe koordinate prirodni brojevi?

223. U nizu od šest prirodnih brojeva treći i svaki sledeći jednak je zbiru dva prethodna. Nađi te brojeve, ako je peti po redu broj 7.

224. Grupa dečaka i devojčica sakupila je 170 dinara za rođendanski poklon Ninoslavu. Devojčice su davale po 20 dinara, a dečaci po 30. Koliko je bilo dečaka i devojčica, ako je cela grupa imala neparan broj članova?

225. Cifra desetica trocifrenog broja je 1. Ako se ta jedinica izostavi dobija se broj koji je tačno devet puta manji od pomenutog trocifrenog broja. Odredi taj trocifreni broj.

226. U svlačionici se nalaze stolice sa tri i sa četiri noge. Kada na sve stolice sednu članovi košarkaške ekipe, u svlačionici je ukupno 69 nogu (svi sede). Koliko ima stolica sa tri i sa četiri noge?

227. Džoni je kupio knjigu za 5 centi, pa kako nije imao gotovine, napisao je ček, tako da mu kusur posluži za sledeću planiranu kupovinu. Blagajnik je, međutim, pobrkao dolare i cente i vratio pogrešno kusur. Kasnije je Džoni utvrdio da ima dva puta više novca nego što je na čeku bilo napisano. Koja je suma napisana na čeku?

228. a) Razlomak $\dfrac{59}{42}$ izrazi kao zbir dva razlomka sa jednocifrenim imeniocima.

b) Razlomak $\dfrac{9}{91}$ izrazi kao zbir ili kao razliku dva razlomka, oba manja od 1, sa imeniocima prostim brojevima.

229. Na koliko načina možemo za 50 dinara kupiti 30 poštanskih maraka, tako da uzmemo samo tri vrste: od dinar, od dva dinara i od šest dinara, i to obavezno sve tri vrste?

230. (Fibonačijev problem) Neko je za 30 novčanica jednake vrednosti kupio 30 ptica. Za svaka tri vrapca platio je jednu novčanicu, za svake dve čavke jednu novčanicu i za svakog goluba po dve novčanice. Koliko je kupio ptica od svake vrste?

2.6. Nelinearne diofantske jednačine

Najčešće, nelinearne jednačine svodimo na rešavanje linearnih. Pri tome često se koristimo metodama rastavljanja polinoma na činioce.

Primer A). U skupu prirodnih brojeva reši jednačinu:
$x^2 - 2xy + 2x + 6y = 15$.

Rešenje. Iz $x^2 + 2x - 15 = 2xy - 6y$, odnosno: $(x + 5)(x - 3) = 2y(x - 3)$, dobijamo: $(x - 3)(x + 5 - 2y) = 0$. Odavde je $x - 3 = 0$ ili $x + 5 - 2y = 0$, pa je u prvom slučaju $x = 3$ i y je proizvoljan prirodni broj. U drugom slučaju je $x = 2y - 5$, za svaki prirodni broj y, $y > 2$.

Primer B). U skupu celih brojeva reši jednačinu:
$x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 4y$.

Rešenje. Izvršimo transformaciju: $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + z^2 = 5$, odnosno: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 5$. U skupu celih brojeva ovo važi ako je $(x - 1)^2 = 0$, $(y + 2)^2 = 1$ i $z^2 = 4$, ili $(x - 1)^2 = 0$, $(y + 2)^2 = 4$ i $z^2 = 1$, ili $(x-1)^2 = 1$, $(y+2)^2 = 0$, $z^2 = 4$, ili $(x-1)^2 = 1$, $(y+2)^2 = 4$, $z^2 = 0$, ili $(x-1)^2 = 4$, $(y+2)^2 = 1$, $z^2 = 0$, ili $(x-1)^2 = 4$, $(y+2)^2 = 0$, $z^2 = 1$.

Prvi slučaj daje rešenja: $x = 1$, $y + 2 = \pm 1$ i $z = \pm 2$, koja treba kombinovati. Trojka (x, y, z), koja predstavlja rešenje u prvom slučaju može biti $(1, -1, 2)$, $(1, -1, -2)$, $(1, -3, 2)$, $(1, -3, -2)$. Slično postupamo i u ostalim slučajevima.

Primer C). Odredi prirodne brojeve x, y, z, takve da je $x > y+1$, $y > z+1$ i $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{y+2} + \dfrac{3}{z+3} = 1$.

Rešenje. Iz uslova sledi: $x+1 > y+2 > z+3$, pa je $1 = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{y+2} + \dfrac{3}{z+3} < \dfrac{1}{z+3} + \dfrac{2}{z+3} + \dfrac{3}{z+3} = \dfrac{6}{z+3} > 1$. Odavde je $z+3 < 6$, tj. $z < 3$. Dakle, $z = 1$ ili $z = 2$. Neka je $z = 2$. Data jednakost postaje: $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{y+2} = \dfrac{2}{5}$. Slično prethodnom rasuđivanju zaključimo da $\dfrac{3}{y+2} > \dfrac{2}{5}$, pa je $y+2 < \dfrac{15}{2} = 7{,}5$. Kako je $y+2 > z+3 = 5$, to je $6 \leqslant y+2 \leqslant 7$, odnosno $y = 4$ ili $y = 5$. Sada lako izračunamo: za $y = 4$ je $x = 14$, a za $y = 5$ za x ne dobijamo prirodni broj. Dakle, rešenje je: $x = 14$, $y = 4$, $z = 2$.

Postupajući slično, za $z = 1$ dobijamo još dva rešenja: $x = 35$, $y = 7$, $z = 1$ i $x = 19$, $y = 8$, $z = 1$.

Primer D). Dokaži da jednačina $x^2 - 3y = 17$ nema rešenja u skupu celih brojeva.

Dokaz. Broj x ne može biti deljiv sa 3, jer ni 17 nije deljivo sa 3. Dakle, $x = 3k \pm 1$. Tada jednačina prelazi u $9k^2 \pm 6k + 1 - 3y = 17$, odnosno $3(3k^2 \pm 2k - y) = 16$. Ova jednačina nema rešenja za celi broj k, jer je leva strana deljiva sa 3, a desna nije.

231. U skupu prirodnih brojeva reši jednačine:

a) $xy + x - 3y = 10$; b) $xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 2000$;

c) $x^2 - 1998 = y^2$; d) $x^2 + 3x + 24 = y^2$;

e) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$, $x < y < z$.

232. U skupu celih brojeva reši jednačine:

a) $xy + 3y - 5x - 12 = 0$; b) $m^2 + n^2 = 2019$;

c) $x^2 + y^2 = 2x$; d) $y^2 = x^2 + 5x + 29$;

e) $x^{2000} + y^6 + z^4 + 146 = 2x^{1000} + 16y^3 + 18z^2$.

233. Dokaži da sledeće jednačine nemaju rešenja u skupu celih brojeva:

a) $m^2 + 1954 = n^2$; b) $x^2 - y^2 = 2018$;

c) $x^2 + y^2 = 1998$; d) $x^2 - y^2 = 2x + 1$.

234. Mile ima tri albuma maraka. U prvom se nalazi petina svih maraka, u drugom nekoliko sedmina i u trećem 303 marke. Koliko maraka ima u sva tri albuma?

235. Nađi broj k koji ima osobinu da postaje kvadrat celog broja, ako se uveća za 2 ili umanji za 7.

236. Brojevi 12 i 60 imaju interesantno svojstvo: njihov proizvod je tačno deset puta veći od njihovog zbira. Ima li još takvih parova prirodnih brojeva?

237. Nađi prirodne brojeve a, b, c, d, takve da važi jednakost:
$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$.

238. Nađi sve pravougaonike kojima su dužine stranica izražene prirodnim brojevima, a obim i površine se izražavaju jednakim brojevima.

239. Dužina jedne katete pravouglog trougla je 21 cm, a dužine ostalih dveju stranica izražavaju se celim brojevima centimetara. Koliko ima takvih trouglova?

240. Broj 2001 može se predstaviti kao zbir dva uzastopna prirodna broja: $1000 + 1001 = 2001$. Utvrdi na koliko još raznih načina možemo broj 2001 izraziti kao zbir nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva.

2.7. Problemi s jednom nepoznatom

Jedna od elementarnih primena matematike jeste rešavanje tzv. *problema*. To su specifični zadaci u kojima su različite situacije opisane tekstom. Na osnovu teksta sastavljaju se jednačine, koje se potom klasično rešavaju. Ponekad je vrlo teško tekst pretočiti u jednačine. Bitno je tekst pažljivo čitati i neophodno je pravilno shvatiti brojne odnose među veličinama iz teksta. Kad se shvati zahtev, treba imenovati "*nepoznatu*", tj. veličinu koja se traži.

Radi lakšeg matematičkog modeliranja, navodimo neke uobičajene formulacije, kojima odgovaraju standardne matematičke interpretacije.

Neka su A i k pozitivni brojevi. Tada:

- **za** k **veći** od A je broj $A + k$;
- **za** k **manji** od A je broj $A - k$;
- ako je $k > 1$, onda k **puta veći** od A je broj $k \cdot A$;
- ako je $k > 1$, onda k **puta manji** od A je broj $\frac{A}{k}$, ili $\frac{1}{k} \cdot A$;
- $\frac{2}{3}$ broja A je broj $\frac{2}{3} \cdot A$;
- 5% broja A je $0,05A$ ili $\frac{5}{100} \cdot A$;
- broj A uvećan za 12% je $1,12 \cdot A$, i slično.

Ako je reč o negativnom broju B, recimo $B < 0$, tada mnoge od navedenih formulacija imaju sasvim suprotnu interpretaciju. Na primer, broj $5B$ je "pet puta manji" od negativnog broja B. Stoga se mora biti oprezan, ako nije potpuno jasno da li govorimo o pozitivnim ili o negativnim veličinama.

Ovde ćemo razmotriti probleme čije rešavanje svodimo na jednu linearnu jednačinu s jednom nepoznatom.

Primer A). Četvrtina količine neke robe prodata je sa 5% zarade, a polovina sa gubitkom od 10%. Sa koliko procenata zarade treba prodati ostatak robe da bi se pokrio gubitak?

Rešenje. Neka je Q ukupna količina robe, x planirana cena i p odnos (procenat) prodajne cene ostatka robe u odnosu na planiranu cenu x. Na osnovu uslova dobijamo jednačinu:

$$\frac{Q}{4} \cdot 1,05x + \frac{Q}{2} \cdot 0,9x + \frac{Q}{4} \cdot p \cdot x = Q \cdot x.$$

Ova jednačina može da se skrati sa $Q \cdot x$ i pomnoži sa 4, pa se dobije: $1,05 + 1,8 + p = 4$. Odavde je $p = 1,15$. Dakle, ostatak, a to je četvrtina od ukupne količine, treba da se proda sa zaradom od 15%.

Primer B). Međusobna udaljenost mesta A i B je 38 km. Iz A u B u 10 časova i 30 minuta pošao je jedan biciklista krećući se brzinom 8 km na čas. Sledećeg dana u 13 časova on je krenuo obrnutim smerom (iz B u A) brzinom 10 km na čas. I prvog i drugog dana on je prešao preko mosta koji se nalazi na tom putu u isto vreme. Odredi vreme prelaska bicikliste preko mosta.

Rešenje. Ako sa t časova označimo vreme za koje je biciklista stigao iz mesta B na most, onda je prvog dana biciklista stigao na most za $(t+2,5)$ časova. Na osnovu toga sastavimo jednačinu: $8(t+2,5)+10t = 38$, odakle dobijemo $t = 1$ čas. Biciklista je preko mosta prešao u 14 časova.

Primer C). Voz je ušao u tunel za 15 sekundi. Dok je poslednji vagon izašao iz tunela, prošlo je još pola minuta. Kolika je dužina voza i kojom se brzinom voz kretao ako je dužina tunela 300 m?

Rešenje. Ako je v brzina voza, onda je $30v = 300$, pa je $v = 10$ metara u sekundi. Prema tome, voz se kretao brzinom od 36 km/h. Dužina voza je $d = 10 \cdot 15 = 150$ m.

Primer D). Učenik je krenuo u školu između 8 i 9 sati ujutro i to u trenutku kada su se velika i mala kazaljka poklopile. Vratio se kući između 2 i 3 sata popodne, u trenutku kad su kazaljke zatvarale opružen ugao. Koliko je vremena proteklo od polaska do povratka?

Rešenje. Označimo sa x broj minuta za koliko je prošlo 8 sati u prvom slučaju. Dok velika kazaljka prođe celi krug, mala prođe dvanaesti deo, a to je podeok koji odgovara petoj minuti. Mala kazaljka startuje sa broja 8, tj. sa četrdesetog podeoka, a velika sa broja 12, tj. sa početnog položaja. U momentu poklapanja kazaljki važiće jednakost: $40+\dfrac{x}{12} = x$. Odavde je $x = \dfrac{480}{11}$.

U drugom slučaju položaji kazaljki razlikuju se za 30 podeljaka, pa ako označimo sa y broj minuta za koliko je prošlo 2 sata, imamo jednačinu: $10 + \dfrac{y}{12} = y - 30$, gde y označava broj minuta posle 2 sata, kada kazaljke zatvaraju ispružen ugao. Odavde je $y = \dfrac{480}{11}$. Dakle, $x = y$, pa je od polaska u školu do povratka prošlo ravno 6 sati.

Izbor zadataka za samostalan rad u ovom i u sledećem odeljku je takav, da bi za sticanje potrebnog iskustva bilo neophodno uraditi sve zadatke (ima ih 55). Onima koji gaje ozbiljne ambicije preporučujemo da to učine obavezno, pre svega zbog raznovrsnosti problema. Posle samostalnog rešavanja uporedite svoj rad sa našim idejama.

241. Ako se nekom dvocifrenom broju dopiše cifra 5, i to jednom na početku, a drugi put na kraju, dobijamo dva nova broja. Ako od većeg oduzmemo manji, dobijamo 252. Koji je taj dvocifreni broj?

242. Ako dvocifrenom broju dopišemo sleva i zdesna cifru 1, dobićemo četvorocifreni broj koji je 23 puta veći od početnog. Koji je taj dvocifreni broj?

243. Odredi najmanji prirodni broj koji počinje cifrom 7, takav da se premeštanjem te sedmice sa prvog na poslednje mesto (na mesto jedinica) dobija broj četiri puta manji od traženog broja.

244. Jednocifrenom broju x dopisana je sleva cifra 1 (kao cifra desetica) i time je broj x uvećan za neki procenat. Uvećamo li dobijeni dvocifreni broj za isti broj procenata, kao prvi put, dobijamo broj 72. Odredi broj x.

245. Postoji pravi razlomak veći od $\frac{1}{3}$, sa sledećim osobinama:

a) postoji prirodni broj x, takav da razlomak ne menja vrednost ako se brojilac uveća za x, a imenilac pomnoži sa x;

b) brojilac i imenilac su uzajamno prosti brojevi.

Odredi sve takve razlomke.

246. Posuda je napunjena stopostotnim alkoholom. Odlijemo dva litra alkohola i dolijemo isto toliko destilisane vode. Ovaj postupak ponovimo još jednom, tj. odlijemo dva litra mešavine i dolijemo dva litra destilisane vode. Na taj način u posudi dobijamo rastvor sa 36% alkohola. Koliko litara rastvora sadrži ova posuda?

247. Dva trgovca južnim voćem vrše razmenu. Prvi je drugom za 16 kivija dao onoliko komada limuna, koliko je kivija dobio za tri tuceta limunova (tuce = 12 komada). Koliko će komada kivija drugi trgovac dati prvom za tuce limunova?

248. Posle sniženja cene za 20%, za iznos od 240 dinara može se kupiti 1 metar platna više nego što se pre sniženja moglo kupiti za 270 dinara. Kolika je bila cena tog platna pre sniženja?

249. Nekoliko braće podelilo je izvesnu količinu zlatnika. Prvi je uzeo 100 zlatnika i jednu šestinu ostatka. Drugi je potom uzeo 200 zlatnika i šestinu ostatka. Treći je posle toga uzeo 300 zlatnika i šestinu najnovijeg ostatka, itd. Poslednji brat je uzeo sve što je ostalo od njegovih prethodnika. Ispostavilo se da su svi dobili jednak broj zlatnika. Koliko je bilo braće?

250. Moj pradeda je rođen u XIX veku. Koje godine je on slavio svoj osamdeseti rođendan, ako je one godine čiji je redni broj bio x^2, imao tačno x godina?

251. Ja sad imam četiri puta vise godina nego što je imala moja sestra kada je bila dva puta mlađa od mene. Koliko godina imam ja, a koliko sestra, ako ćemo kroz 15 godina imati zajedno 100 godina?

252. Nekoliko minuta posle 12 časova Nemanja je počeo da radi domaći zadatak i u tom momentu je pogledao na sat. Kad je završio, ponovo je pogledao na sat i utvrdio da su kazaljke međusobno zamenile mesta. Kada je Nemanja počeo, a kada završio izradu domaćeg zadatka?

253. Prednja guma motocikla istroši se posle pređenih 25 000 kilometara, a zadnja posle 15 000 kilometara. Posle koliko pređenih kilometara treba promeniti mesta gumama, da bi se obe istrošile istovremeno? Posle koliko pređenih kilometara motociklista mora kupiti nove gume?

254. Četrdeset krava popase jednu livadu za pedeset dana. Istu livadu šezdeset krava popase za trideset dana. Za koliko bi dana tu livadu popaslo dvadeset krava? Koliko krava može da popase ovu livadu za sedamdeset pet dana?

255. Prvi traktor može izorati neko polje za 15 sati, a drugi za 20 sati. Nakon jednog sata oranja prvim traktorom, u pomoć je došao drugi traktor i zajedno su poorali celo polje. Koliko su sati ovi traktori orali zajedno?

256. Idući od sela A prema autobuskoj stanici, pošto je prvog časa prešao 3 km, pešak je utvrdio da će zakasniti na autobus 30 min ako bude nastavio da ide ovom brzinom. Zbog toga je preostali deo puta prelazio brzinom od 4 km/h i tako je stigao na stanicu 40 minuta pre polaska autobusa. Odredi koliko je udaljena autobuska stanica od sela A.

257. Dva pešaka pođu istovremeno iz mesta A u mesto B. Prvi pešak, tokom prve polovine vremena kretanja, ide brzinom od 5 km na čas, a ostatak puta pređe brzinom od 4 km na čas. Drugi pešak prvu polovinu puta prešao je brzinom od 5 km na čas, a drugu polovinu brzinom od 4 km na čas.

Koji će pešak pre stići u mesto B? Koliko će kilometara u tom momentu biti ispred sporijeg, ako je od A do B 18 km?

258. Dva sela su jedno od drugog udaljena 12 km. Jedan pešak je pošao iz svog sela u 9 časova i 25 minuta i stigao u drugo selo u 13 časova i 15 minuta. Sutradan se vratio, ali je krenuo u 11 časova i stigao u selo u 14 časova i 40 minuta. Odredi na kom se rastojanju od njegovog sela nalazi mesto na putu, na kojem je pešak prolazio oba dana u isto vreme i u koliko je časova on prolazio pored tog mesta?

259. Biciklista je pošao u 12 časova iz grada A u grad B brzinom od 24 km/h. U gradu B se zadržao 20 minuta i onda se vratio u grad A brzinom od 20 km/h. U grad A stigao je u 16 časova. Istim putem krenuo je i automobil iz grada A u 14 časova, brzinom od 60 km/h. Kada su se susreli automobil i biciklista? Kada je biciklista stigao u grad B?

260. Rastojanje između mesta A i B je a km. Biciklista se prvi put prevezao od A do B i nazad stalnom brzinom. Drugi put je od A do B vozio brzinom za 6 km/h većom, a nazad 4 km/h manjom nego prvi put. U oba slučaja ceo put je prešao za isto vreme. Izračunaj brzinu kretanja bicikliste u prvoj vožnji. Da li rezultat zavisi od dužine a?

261. Biciklista, koji vozi brzinom od 10 km na čas, planira da ode u susedno mesto, tako da tamo stigne u 12 časova. Međutim, kad je stigao na pola puta, polomi mu se bicikl. Ostali deo puta prešao je pešice, hodajući brzinom od 5 km na čas i stigao je na određeno mesto u 14 časova. Odredi koliko je kilometara prešao i u koliko je časova krenuo.

262. Trgovački putnik je na poslovni sastanak krenuo automobilom. U toku prvog sata prevezao je 60 km. Tada je izračunao da će za 30 minuta zakasniti na sastanak, ako put nastavi istom brzinom. Zbog toga je brzinu povećao na 80 km/h i tako stigao na cilj 40 minuta pre početka sastanka. Koliko daleko je putovao?

263. Voz je pošao iz stanice sa zakašnjenjem od 15 minuta. Da bi nadoknadio vreme vozi prosečnom brzinom za 20% većom od normalne, sve dok ne nadoknadi vreme. Za koliko je minuta nadoknadio zakašnjenje?

264. Rastojanje između mesta A i B voz je prešao za 23 časa, i to: polovinu puta brzinom od 80 km/h, trećinu puta brzinom 60 km/h, a ostatak puta brzinom 40 km/h. Odredi rastojanje između mesta A i B.

265. Voz se kreće iz mesta A u mesto B brzinom 60 km/h. Zatvoren signal prisili mašinovođu da zaustavi voz na pruzi. Tu se voz zadržao 3 minuta. Zatim je nastavio vožnju brzinom 75 km/h i u mesto B stigao tačno po redu vožnje. Koliko kilometara ispred mesta B stoji pomenuti signal?

2.8. Problemi sa više nepoznatih

Primer A). Nepažljivi učenik je "skratio" razlomak $\dfrac{306}{204}$ tako što je precrtao i izostavio nule. Tako je ipak dobio tačan rezultat: $\dfrac{36}{24}$. Odredi uslov koji zadovoljavaju cifre a, b, c, d, ako se razlomak $\dfrac{\overline{a0b}}{\overline{c0d}}$ može skratiti na isti način. Proveri dobijeni uslov.

Rešenje. Treba odredi pod kojim uslovom važi jednakost: $\dfrac{\overline{a0b}}{\overline{c0d}} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, odnosno $\dfrac{100a+b}{100c+d} = \dfrac{10a+b}{10c+d}$. Sređivanjem dobijemo uslov: $ad = bc$, ili $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Provera. $\dfrac{100a+b}{100c+d} = \dfrac{b\left(100\dfrac{a}{b}+1\right)}{d\left(100\dfrac{c}{d}+1\right)} = \dfrac{b}{d}$, jer su izrazi u zagradama jednaki zbog uslova $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Slično: $\dfrac{10a+b}{10c+d} = \dfrac{b\left(10\dfrac{a}{b}+1\right)}{d\left(10\dfrac{c}{d}+1\right)} = \dfrac{b}{d}$. Dakle, tačno je.

Primer B). U zlatarskoj radionici mora se načiniti 9 kg legure u kojoj će zlato i srebro biti u razmeri 7 : 11. Na skladištu imaju dve legure. U jednoj leguri količine zlata i srebra nalaze se u razmeri 4 : 5, a u drugoj 2 : 5. Koliko treba uzeti od svake legure, da bi se načinila nova u zadatoj razmeri?

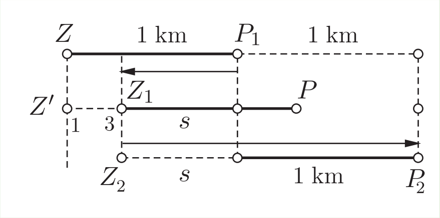
Rešenje. U 9 kg smese treba da bude 3,5 kg zlata i 5,5 kg srebra $(3,5 : 5,5 = 7 : 11$ i $3,5 + 5,5 = 9)$. Pretpostavimo da brojevi 4, 5, 2 i 5 u datim razmerama 4 : 5 i 2 : 5 označavaju brojeve kg zlata i srebra. Ako bismo uzeli x delova legure sa razmerom 4 : 5 i y delova legure sa razmerom 2 : 5 dobili bismo sistem linearnih jednačina $4x + 2y = 3,5$ i $5x + 5y = 5,5$. Rešenje je $x = \dfrac{13}{20}$ i $y = \dfrac{9}{20}$. Prema tome, treba uzeti $\dfrac{13}{20}(4+5) = \dfrac{117}{20}$ kg $= 5,85$ kg prve legure i $\dfrac{9}{20}(2+5) = \dfrac{63}{20}$ kg $= 3,15$ kg druge legure.

Primer C). Dva radnika su dva puta ispunjavali iste zadatke. Prvi put, posle zajedničkog trodnevnog rada, drugi radnik je završio ostatak posla za 15 dana. Drugi put, posle zajedničkog šestodnevnog rada, drugi radnik je sam završio ostatak posla za 6 dana. Za koliko dana može svaki radnik sam da obavi ovaj posao?

Rešenje. Označimo sa x, odnosno sa y, broj dana koji je potreban prvom, odnosno drugom radniku, da sam uradi celi posao. Tada prvi radnik za jedan dan uradi $\frac{1}{x}$-ti deo, a drugi $\frac{1}{y}$-ti deo celog posla. Prema datim uslovima, imamo sistem jednačina: $\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{15}{x}=1$, $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}+\frac{6}{y}=1$. Njegovo rešenje je: $x=22$ dana, $y=16,5$ dana.

Primer D). Vojnička kolona ima dužinu 1 km i kreće se ravnomernom brzinom. Kurir sa čela kolone dotrči na začelje kolone, preda poruku i otrči na čelo kolone. Kolona za to vreme pređe 1 km. Koliki put je prešao kurir?

Rešenje. Neka se kurir kreće brzinom x, kolona brzinom y i neka je s put koji kurir pretrči sa čela do začelja kolone. Tada je, prema slici desno, kurir prešao put $P_1Z_1=s$, u tački Z_1 susreo začelje kolone, zatim je prešao put $Z_2P_2=s+1$ i stigao na početak kolone. Prešao je ukupno $(2s+1)$ kilometara. Dok je kurir prešao put s, začelje kolone je prešlo put $Z'Z_1=1-s$. Od ovoga dobijamo jednakosti: $\frac{s}{x}=\frac{1-s}{y}$, odakle je $\frac{s}{1-s}=\frac{x}{y}$ i $\frac{s+1}{x}=\frac{s}{y}$, odakle je $\frac{s+1}{s}=\frac{x}{y}$. Sada iz $\frac{s}{1-s}=\frac{s+1}{s}$ dobijamo $2s^2=1$, pa je $s=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Kurir je prešao put $2s+1=(\sqrt{2}+1)$ km, što iznosi približno 2414 metara.



Primer E). Dva čoveka se penju pokretnim stepenicama, koje se kreću nagore. Prvi se penje dva puta brže od drugog (brzinom dva puta većom). Prvi je stao na 15 stepenika, a drugi na 10 stepenika. Koliko stepenika (vidljivih) ima to pokretno stepenište?

Rešenje. Zamislimo da se ova dva čoveka penju jednim stepeništem i da su jednovremeno nagazili na prvi stepenik. Pretpostavimo da ovo stepenište ima $(k+1)$ vidljivih stepenika i da prvi stepenik stigne do vrha za t sekundi. Da bi se teret podigao za 1 stepenik, treba $\frac{t}{k}$ sekundi. Prvi čovek se sam popeo za 14 stepenika, pa je vreme za koje se on popeo do vrha: $t_1 = t - 14\dfrac{t}{k} = t\left(1 - \dfrac{14}{k}\right)$. Drugi čovek se sam popeo za 9 stepenika i do vrha mu je trebalo $t_2 = t\left(1 - \dfrac{9}{k}\right)$ sekundi. Neka su v_1 i v_2 brzine kretanja (stajanja na stepenike) prvog i drugog čoveka. Tada je $v_1t_1 = 15$, a $v_2t_2 = 10$ i još je $v_1 = 2v_2$, pa je $2v_2t_1 = 15$. Odavde nalazimo da je: $\dfrac{2v_2t_1}{v_2t_2} = \dfrac{15}{10}$, a odavde je $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{3}{4}$.

Dalje je: $\dfrac{t\left(1 - \dfrac{14}{k}\right)}{t\left(1 - \dfrac{9}{k}\right)} = \dfrac{3}{4}$. Skratimo sa t i rešimo po k i dobijemo: $k = 29$. Prema tome, ima 30 vidljivih stepenika.

266. Imamo dve legure bakra i cinka. U prvoj leguri količine ovih metala se odnose kao $2:3$, a u drugoj kao $3:7$. Koliko treba uzeti od svake legure da bi se dobilo 8 kg nove legure u kojoj će bakar i cink biti u razmeri $5:11$?

267. Neka roba, koja staje 455 din, plaćena je sa 23 novčanice, čije su vrednosti od 5 din, 10 din i 50 din. Broj novčanica od 5 din je najmanji. Sa koliko je novčanica od 5 din, 10 din i 50 din plaćena ova roba?

268. Za izvršeni posao dva su radnika međusobno podelila svotu od 16320 dinara. Kada je prvi potrošio tri petine svoga dela, a drugi od svoga dela tri sedmine, onda su imali jednake svote. Koliko je dobio svaki radnik?

269. Tri seljaka, Zoran, Dušan i Nikola, došli su na vašar sa svojim ženama. Imena žena su: Branka, Irena i Maja. Utvrdi ko je s kim oženjen, ako je poznato sledeće: svako od ovih šest lica platilo je za svaku kupljenu stvar onoliko dinara koliko je stvari kupilo; svaki muškarac potrošio je 63 dinara više od svoje žene; osim toga, Zoran je kupio 23 stvari vise od Irene, a Dušan 11 više od Branke.

270. Neka suma novca treba da se podeli između tri radnika A, B i C, u odnosu $8:7:6$. Kasnije su se dogovorili da sumu podele u odnosu $7:6:5$. Jedan od radnika je zbog toga dobio 50 dinara manje nego što je prvobitno predviđeno. Kolika je suma podeljena i koliko je svako dobio?

271. Od 65-procentnog i 40-procentnog rastvora kuhinjske soli treba pripremiti 15 litara 55-procentnog rastvora. Po koliko litara treba da se uzme od svakog rastvora?

272. Kako se može napraviti 70 kg bronze, pri čemu odnos bakra i kalaja treba da bude 4 : 1, od dve postojeće vrste bronze, kod kojih je pomenuti odnos bakra i kalaja 8 : 3 i 5 : 1?

273. Komad legure cinka i bakra mase 40 kg, kad se sasvim potopi u vodu, izgubi u masi 5 kg. Nađi koliko u njemu ima cinka, a koliko bakra, ako je poznato da u vodi cink gubi $14\frac{2}{7}\%$, a bakar $11\frac{1}{9}\%$ svoje mase.

274. U tri posude nalazi se voda. Ako polovinu vode iz prvog suda prespemo u drugu posudu, zatim trećinu tako dobijene količine prespemo iz drugog suda u treću posudu, i najzad, četvrtinu vode iz treće posude prespemo u prvu posudu, tada se u svakoj posudi nalazi po 6 litara vode. Koliko je bilo vode u svakoj posudi pre presipanja?

275. U dve posude ima 35 litara tečnosti. Ako iz leve prespemo u desnu onoliko tečnosti koliko je u desnoj do tada bilo, onda će u jednoj od njih biti pet litara tečnosti više nego u drugoj. Odredi količine tečnosti u posudama, ako se zna da je u svakoj bio celi broj litara.

276. Ako voda zauzima 75% zapremine posude, onda masa posude zajedno s vodom iznosi 8100 g, a ako živa zauzima pet dvanaestina zapremine te iste posude, onda masa posude zajedno sa živom iznosi 49 386 g. Izračunaj zapreminu posude i njenu masu, ako je gustina žive 13,596 g/cm^3.

277. Dragan ima dva puta više braće nego sestara, a njegova sestra Milena ima pet puta više braće nego sestara. Koliko je braće i sestara?

278. Nikola ima dva puta više godina nego što je Nemanja imao kada je Nikoli bilo toliko godina koliko je sada Nemanji. Zajedno sada imaju 35 godina. Koliko je star svaki od njih?

279. U jezero se uliva potok koji svakodnevno unese istu količinu vode. Za jedan dan (24 časa) 183 konja mogu popiti svu vodu iz jezera, a 37 konja bi, počev od danas, svu vodu popili za pet dana. Za koliko bi dana, počev od danas, jedan konj popio svu vodu?

280. Četiri radnika treba da urade jedan posao. Ako bi prvi, drugi i treći radili zajedno, završili bi za 6 sati, a ako bi radili prvi, drugi i četvrti, završili bi za 7,5 sati. Međutim, ako rade samo treći i četvrti, za taj posao im treba 10 sati. Za koliko sati će završiti, ako celi posao rade svi istovremeno?

281. Dva radnika mogu da završe posao za 12 dana. Posle zajedničkog rada od 5 dana, jedan radnik se razboli, pa je drugi sam produžio sa radom i završio posao za narednih 17,5 dana. Za koliko dana može da završi taj posao svaki radnik radeći sam?

282. Tri jednaka traktora obrađuju dva polja različitih površina. Ako ta tri traktora najpre preoru prvo polje, a zatim dva od njih preoru i drugo, posao ukupno traje 12 sati. Ako sva tri traktora završe polovinu ukupnog posla, a drugu polovinu obavi jedan traktor, ukupno je potrebno 20 sati. Za koliko vremena dva traktora mogu preorati prvo polje?

283. Četiri radnika, ako rade zajedno, završe posao za devet dana. No, oni nisu počeli da rade istovremeno, nego su počinjali jedan za drugim u jednakim vremenskim intervalima. Tako su završili posao kada je prvi radio pet puta duže od poslednjeg. Za koliko je dana završen posao, uz pretpostavku da svi radnici rade jednako brzo?

284. Lice A kretalo se čamcem nizvodno po reci prelazeći put iz mesta A u mesto B za 10 časova. Razdaljina između A i B iznosi 20 km. Naći brzinu toka reke kad se zna da je za isto vreme lice A prelazilo 2 km uzvodno, a 3 km nizvodno.

285. Pešak je silazio niz pokretne stepenice koje su u pokretu i izbrojao je 50 stepenika. Drugi, koji je silazio tri puta brže, izbrojao je 75 stepenika. Brzine pešaka i stepenica su ravnomerne. Koliko je vidljivih stepenika (kad nisu u pokretu)?

286. Avion leti iz Beograda u Podgoricu i vraća se nazad. Pri kakvim vremenskim uslovima će taj avion preći celi put brže: po vetru koji stalno istom snagom duva od Beograda ka Podgorici, ili po mirnom nebu, bez vetra?

287. Dva automobila polaze istovremeno iz mesta A u mesto B. Prvi ide polovinu vremena brzinom u, a drugu polovinu brzinom v. Drugi ide polovinu puta brzinom u, a drugu polovinu puta brzinom v. Koji će automobil pre stići na cilj?

288. Automobil je prešao rastojanje od grada A do grada B za pet sati, a u obrnutom smeru, od B do A, za četiri sata. Pri tome se uzbrdo kretao brzinom 60 km/h, po ravnom putu brzinom od 72 km/h i nizbrdo brzinom od 90 km/h. Koliko je rastojanje od grada A do grada B?

289. Jedan biciklista je krenuo iz sela A ka gradu B, koji je od sela udaljen 28 km. Nakon 2 km vožnje biciklistu je sustigao kamion, koji je posle izvesnog vremena stigao u grad B, zadržao se u gradu 22 minuta i pri povratku u selo A sreo biciklistu na udaljenosti 8 km od grada B. Odredi brzine kretanja kamiona i bicikliste, ako je biciklista stigao u grad B u istom trenutku kada je kamion stigao u selo A.

290. Voz je prešao most dug 225 m, vozeći stalnom brzinom, za 27 sekundi (računajući vreme od nailaska lokomotive na most do silaska poslednjeg vagona sa mosta). Zatim je voz prošao pored jednog pešaka, koji se kretao suprotno smeru kretanja voza, za 9 sekundi. Za to vreme pešak je prešao

9 m. Odredi dužinu voza u metrima i njegovu brzinu kretanja u kilometrima na sat.

291. Dva voza istovremeno polaze iz mesta A i B u susret jedan drugom. Svaki od njih, čim stigne u suprotno mesto, odmah se vraća nazad. Prvo susretanje vozova dešava se na 50 km od mesta A, a drugo na 30 km od mesta B. Kolika je udaljenost između mesta A i B? (Pretpostavlja se da su brzine kojima se kreću vozovi stalne.)

292. Voz je prešao neko rastojanje stalnom brzinom. Ako bi prelazio na sat 6 km više, ostao bi na tom putu 4 sata manje, a ako bi prelazio na sat 6 km manje, ostao bi na tom putu 6 časova više. Nađi to rastojanje.

293. Voz se kreće uzbrdo konstantnom brzinom. Tokom kretanja voz susreće Lanu, koja se kreće nizbrdo duž pruge brzinom od 6 km/h, i prođe pored nje za 12,6 sekundi. Malo kasnije voz sustiže Stefana, koji se kreće uzbrdo brzinom od 3,6 km/h, i prođe pored njega za 15 sekundi. Odredi dužinu i brzinu voza.

294. Mesta A i B povezuje pruga dužine 300 km. Iz mesta A ka mestu B polazi voz V_A brzinom $v_1 = 40$ km/h. Istovremeno iz mesta B ka mestu A polazi voz V_B brzinom $v_2 = 80$ km/h. U trenutku polaska vozova, iz mesta A ka vozu V_B poleće lasta. Kad stigne do voza V_B, lasta leti nazad ka vozu V_A, sve dok ga ne susretne, pa ponovo leti ka vozu V_B, itd.

Ako lasta leti stalnom brzinom od 120 km/h, koliko će kilometara preleteti do trenutka susreta vozova?

295. Motociklista se kreće od mesta A ka mestu B brzinom od 18 km/h po ravnom delu puta. Put od A ka B ima 3 km uzbrdice i 6 km nizbrdice i 12 km ravnog dela. Motociklista je od A do B putovao sat i 7 minuta, a u povratku, krećući se istom brzinom, putovao je 9 minuta duže. Odredi brzine kretanja motocikliste uzbrdo i nizbrdo.

2.9. Primene proporcija. Procenti

Proporciju određuju dve jednake razmere:

iz $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$, sledi $a : m = b : n$, odnosno $a : b = m : n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$.

Više jednakih razmera određuju produženu proporciju, na primer:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}, \quad \text{što zapisujemo ovako:}$$

$a:b:c=x:y:z$, gde su svi brojevi a, b, c, x, y, z različiti od nule.

Ako jednake vrednosti razmera označimo sa k:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k, \quad \text{onda je: } a=k\cdot x,\ b=k\cdot y,\ c=k\cdot z.$$

Dakle, iz $a:b:c:d=x:y:z:u$, sledi: $a=kx$, $b=ky$, $c=kz$, $d=ku$.

Koristeći ovu osobinu lako se dokazuju mnoge osobine, kao:

Iz $a:b:c=x:y:z$, sledi $(a+b+c):(x+y+z)=\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$,

ili iz $a:b=m:n$, sledi $(a+b):(m+n)=(a-b):(m-n)=\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=k$.

Primer A). Od proporcija $x:y=5:6$ i $y:z=3\frac{1}{9}:2\frac{1}{3}$ sastavi produženu proporciju $x:y:z=\cdots$

Rešenje. Uprostimo poslednju razmeru, tj., dovedimo je na oblik količnika dva uzajamno prosta broja (koji se ne mogu skratiti),

$$3\frac{1}{9}:2\frac{1}{3}=\frac{28}{9}:\frac{7}{3}=\frac{28}{9}\cdot\frac{3}{7}=\frac{4}{3}=4:3, \quad \text{pa je } y:z=4:3.$$

Sada proporcija napišemo u obliku $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{6}$ i $\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{3}$. Ovo ne možemo pisati odmah kao produženu proporciju, jer nisu jednake razmere: $\dfrac{y}{6}\neq\dfrac{y}{4}$. Međutim, ako prvu proporciju proširimo sa $\dfrac{1}{2}$, a drugu sa $\dfrac{1}{3}$, dobićemo jednake razmere:

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{6}\Big/\cdot\frac{1}{2} \quad \text{daje:} \quad \frac{x}{10}=\frac{y}{12}, \quad \text{a} \quad \frac{y}{4}=\frac{z}{3}\Big/\cdot\frac{1}{3} \quad \text{daje:} \quad \frac{y}{12}=\frac{z}{9}.$$

Sada je očigledno $\dfrac{x}{10}=\dfrac{y}{12}=\dfrac{z}{9}$, odnosno $x:y:z=10:12:9$.

Drugi način. Uočimo proporcije $x:y=5:6$ i $y:z=4:3$, u kojim promenljivoj y odgovaraju različiti brojevi 6 i 4. Onda ćemo ove brojeve dovesti na NZS, proširivanjem brojevnih razmera u datim proporcijama. Kako je NZS za 6 i 4 broj 12, proširićemo prvu sa 2, a drugu sa 3.

$x:y=5:6^{|2}$ daje $x:y=10:12$ i $y:z=4:3^{|3}$ daje $y:z=12:9$. Onda je $x:y:z=10:12:9$.

Primer B). Ako je $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_4}$ dokaži da je:
$\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3}{a_2+a_3+a_4}\right)^3=\dfrac{a_1}{a_4}$, gde su a_1, a_2, a_3, a_4 različiti od nule.

Dokaz. Stavimo $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_4}=k$, pa na osnovu osobina produžene proprocije $a_1:a_2:a_3=a_2:a_3:a_4$ važe jednakosti

$$(a_1+a_2+a_3):(a_2+a_3+a_4)=a_1:a_2=a_2:a_3=a_3:a_4=k,$$

odnosno:

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_2+a_3+a_4}=\frac{a_1}{a_2},\quad \frac{a_1+a_2+a_3}{a_2+a_3+a_4}=\frac{a_2}{a_3},\quad \text{i}\quad \frac{a_1+a_2+a_3}{a_2+a_3+a_4}=\frac{a_3}{a_4}.$$

Pomnožimo ove tri jednakosti, skratimo na desnoj strani i dobićemo traženu jednakost.

Primer C). Na okružnom takmičenju iz matematike naše drugarice: Mia, Ivona i Lana osvojili su drugo, treće i peto mesto, tim redom. Nastavničko veće škole odlučilo je da ih nagradi sa ukupno 15500 dinara, s tim da ovu sumu podele obrnuto srazmerno osvojenom mestu. Koliko je svaka od njih dobila kao nagradu?

Rešenje. Mia je osvojila 2. mesto, Ivona 3. i Lana 5. Označimo sa M, I i L iznose nagrada, koje su obrnuto srazmerne brojevima 2, 3 i 5. Dakle, $M:I:L=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{5}$. (Obrnuto srazmerno je srazmerno recipročnim vrednostima.) Uprostimo desnu stranu, proširujući je sa NZS za 2, 3, i 5, a to je 30: $M:I:L=15:10:6$. Odavde je $M=15k$, $I=10k$ i $L=6k$. Znamo da je $M+I+L=15\,500$ dinara, pa je $15k+10k+6k=15\,500$, odnosno $31k-15\,500$.
Odavde je $k=15\,500:31=500$ dinara.

Nagrade su: $M=15k=15\cdot 500=7500$ dinara, $I=10k=10\cdot 500=5000$ dinara i $L=6k=6\cdot 500=3000$ dinara.

Primer D). Tek oboreno stablo merilo je 2,25 tona i sadržalo je 64% vode. Posle nedelju dana, zbog sušenja, to stablo je imalo 46% vode. Za koliko se smanjila masa stabla za tih sedam dana?

Rešenje. Suvi deo stabla (bez vode) predstavlja 36% tek oborenog stabla, a to je $0,36 \cdot 2,25\,\text{tona} = 0,81$ tona. Posle sedam dana to će predstavljati 54% (to je $100 - 46$) stabla. Masa osušenog stabla je $0,81 : 0,54 = 1,5$ tona. Masa stabla smanjila se za $2,25 - 1,5$, odnosno za 0,75 tona.

Napomena. Račun sa procentima može se izvršiti i pomoću proporcija. Na primer, 36% od 2,25 tona mogli smo računati ovako: $2,25 : x = 100 : 36$, odakle je $x = \dfrac{2,25 \cdot 36}{100} = 0,81$ tona, itd.

Primer E). Petina robe je prodata po ceni koja je za 20% veća od planirane cene, a šestina je prodata sa viškom od 5%. Trećina robe je bila oštećena, pa je prodata po ceni za 10% nižoj od planirane cene. Ostatak robe prodat je za 2850 dinara po kilogramu, tako da je ostvarena planirana dobit. Ukupna količina robe prodata je za 840000 dinara. Koliko je robe prodato i kolika je planirana cena?

Rešenje. Neka je planirana prodaja x kg robe po ceni od c din po kilogramu. Prema opisanim uslovima načinimo odgovarajuću jednačinu: $\dfrac{x}{5} \cdot 1,2c + \dfrac{x}{6} \cdot 1,05c + \dfrac{x}{3} \cdot 0,9c + \dfrac{3x}{10} \cdot 2850 = x \cdot c$. (Po ceni od 2850 dinara prodato je $\left(1 - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}\right) x = \dfrac{3}{10}x$ kg robe.) Jednačinu skratimo sa x i posle sređivanja dobijamo: $21,45c + 25650 = 30c$. Odavde je $c = 3000$ dinara. Onda iz $x \cdot c = 840000$, dobijamo $x = 280$ kg. Dakle, prodato je 280 kg robe, a planirana je cena od 3000 dinara po kilogramu.

296. Na osnovu proporcija $a : b = 1\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4}$ i $a : c = 2\frac{2}{3} : 4\frac{4}{5}$, sastavi produženu proporciju.

297. Zoran, Dušan i Nikola nasledili su sumu od 277500 dolara. Prema testamentu, delovi koje dobijaju Zoran i Dušan odnose se $3 : 2$, a deo koji pripada Nikoli, prema Zoranovom, stoji u razmeri $4 : 5$. Koliko je svaki od njih nasledio?

298. Ako je $\dfrac{ay - bx}{c} = \dfrac{cx - az}{b} = \dfrac{bz - cy}{a}$, gde su a, b, c, x, y i z različiti od nule, dokaži da je $x : y : z = a : b : c$.

299. Ako je $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$, dokaži da je:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

300. Pet radnika je uradilo neki posao, naplativši za uslugu 210000 dinara. Novac su podelili tako da su prvi i drugi zajedno dobili $\frac{2}{5}$ od ukupnog dela ostale trojica. Prva dva su svoj deo podelili u razmeri $2:3$, a druga tri svoj deo u razmeri $3:4:5$. Koliko je zaradio svaki od njih?

301. U jednoj školi ima manje od 400 učenika. Šest odeljenja imaju jednak broj učenika, veći od 25. U ostalim odeljenjima ukupno ima učenika 15% više nego u ovih šest odeljenja. Koliko učenika ima u školi?

302. Učenici VII razreda radili su kontrolnu vežbu iz matematike. Prvi zadatak rešilo je 77,5% od ukupnog broja učenika, drugi zadatak 67,5% i treći 75%. Prvi i drugi zadatak rešilo je 55% učenika, prvi i treći 60% učenika, a drugi i treći 55%. Sva tri zadatka rešilo je 20 učenika.

Ako je svaki učenik rešio bar jedan zadatak, koliko je učenika radilo kontrolnu vežbu?

303. Ruda sadrži 50% primesa, a metal iz nje dobijen sadrži 5% primesa. Koliko tona metala dobijamo iz 255 tona rude?

304. Pre nedelju dana u 100 tona tek iskopanog uglja bilo je 2% vlage. Do danas taj ugalj je upio u sebe izvesnu količinu vode, tako da on sada sadrži 12,5% vlage. Koliko tona sada meri ovaj (navlaženi) ugalj?

305. Komad bronze od 15 kg sadrži 72% bakra. Kada se ovaj komad stopi sa drugim komadom bronze, dobije se 20 kg legure koja sadrži 70% bakra. Koliko je procenata bakra bilo u drugom komadu bronze?

Glava 3

SLIČNOST

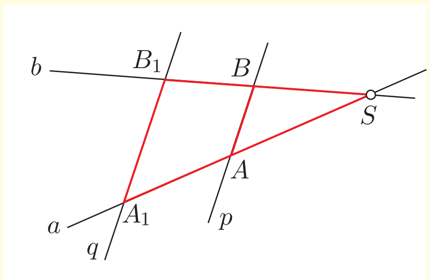
- **Proporcionalne duži. Talesova teorema**
- **Slične figure**
- **Pitagorina teorema**

Sličnost

Problemi vezani za sličnost figura mogu biti veoma komplikovani. U mnogim slučajevima rešavanje zadatka podrazumeva upotrebu dosta složenog računskog, gotovo čisto algebarskog aparata. U tim računima najčešće se potpuno izgubi tzv. geometrijska očiglednost, karakteristična za primene podudarnosti. Zbog toga je potrebno dosta vežbanja da bi se ušlo u tajne osobina sličnih figura.

3.1. Proporcionalne duži. Talesova teorema

Ako za duži a, b, c, d važi $a : b = c : d$, odnosno $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tada su a, b, c i d proporcionalne duži.



Ako je $a : x = x : b$ ili $x : a = b : x$, onda je duž x geometrijska sredina za duži a i b. Tada je $x^2 = a \cdot b$.

Za izučavanje proporcionalnih duži izuzetno su važne teoreme:

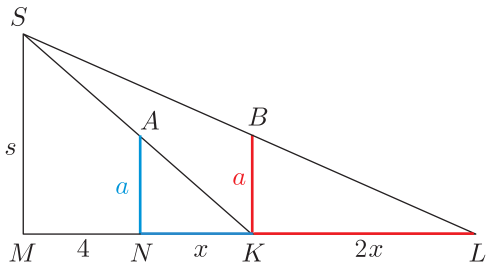
Talesova teorema. Neka su a i b dve prave koje se seku u tački S. Ako paralelne prave p i q seku pravu a u tačkama A i A_1 i pravu b u tačkama B i B_1, tada je $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1}$.

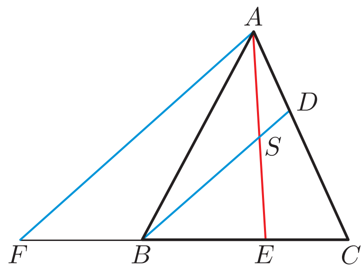
Obrnuta Talesova teorema. Ako su dve poluprave Sa i Sb presečene dvema pravim p i q, tako da su odgovarajući odsečci na Sa i Sb proporcionalni, onda su prave p i q paralelne.

Zaključci navedeni u ovim teoremama važe i u slučaju da je tačka S između tačaka A i A_1.

Primer A). Ana stoji na 4 m udaljena od ulične svetiljke. Na kraju njene senke stoji Branka, koja je visoka koliko i Ana. Brankina senka je duplo duža od Anine. Izračunaj dužine Anine i Brankine senke.

Rešenje. Na slici levo, duž AN predstavlja Anu, a duž BK Branku. Tačka S je svetiljka, $NK = x$ je Anina senka i KL Brankina. Prema Talesovoj teoremi imamo: $MK : NK = SM : AN$, tj. $(4+x) : x = s : a$, gde je s visina svetiljke i a visina Ane. Takođe je $ML : KL = SM : BK$, odnosno $(4+3x) : 2x = s : a$. Prema tome, iz $(4+x) : x = (4+3x) : 2x$, nalazimo Aninu senku: $x = 4$ m. Brankina senka je dužine 8 m.



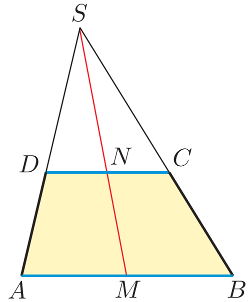


Primer B). Na stranici AC trougla ABC data je tačka D, takva da je $AD : DC = 2 : 3$, a na stranici BC data je tačka E, takva da je $BE : EC = 2 : 1$. Duži BD i AE seku se u S. Odredi razmeru $AS : SE$.

Rešenje. Odredimo tačku F iza B u odnosu na C, tako da je $BF = BE$. Očigledno je $BC : BE = 3 : 2$, pa je $BC : BF = 3 : 2$. Sada imamo proporciju $BC : BF = CD : DA = 3 : 2$. Na osnovu osobina proporcije, odavde sledi: $(BC + BF) : (CD + DA) = CB : CD$, tj. $CF : CA = CB : CD$. Iz poslednje proporcije, na osnovu obrnute Talesove teoreme, sledi da je $AF \| BD$. Po konstrukciji tačka B je središte duži EF, što znači da je BS srednja linija trougla AEF i zbog toga je $AS : SE = 1 : 1$.

Primer C). Dokaži da prava koja sadrži tačku u kojoj se seku produženi krakova trapeza i središte jedne osnovice, polovi drugu osnovicu trapeza.

Dokaz. Neka je S presek produženih krakova, M središte osnovice AB i N presek prave SM sa osnovicom CD. Na osnovu Talesove teoreme važi: $AM : DN = SM : SN$, kao i $MB : NC = SM : SN$. Odavde sledi da je $AM : DN = MB : NC$. Budući da je $AM = MB$, sledi da je i $DN = NC$, što se i tvrdilo.



306. Dat je trougao ABC stranice $BC = a$ cm i odgovarajuće visine h cm. Izračunaj dužinu stranice kvadrata $MNPQ$, čija su temena M i N na stranici BC, teme P pripada duži AC i teme Q je na duži AB.

307. Na stranici AC trougla ABC uočimo tačku M, takvu da je $AM : MC = 1 : 4$, a na stranici BC tačku N, takvu da važi $BN : NC = 1 : 5$. Neka je S presek duži AN i BM. Izračunaj razmeru $BS : SM$.

308. Dat je četvorougao $ABCD$. Neka je E tačka na pravoj BD, takva da je $AE \| CD$, a F tačka na pravoj AC, takva da je $DF \| AB$. Dokaži da je $EF \| BC$.

309. U nejednakokrakom trapezu $ABCD$ dijagonale AC i BD seku se u tački S. Kroz S su konstruisane prave paralelne kracima AD i BC, koje seku osnovicu AB redom u tačkama M i N. Dokaži da je $AM = BN$.

310. U trapezu $ABCD$ središte S osnovice AB povezano je sa tačkama C i D. Neka su M i N presečne tačke duži SD i SC redom, sa dijagonalama BD i AC. Dokaži da je prava MN paralelna sa osnovicama i da je njen odsečak između krakova trapeza tačkama M i N podeljen na tri jednake duži.

311. Neka je K središte težišne linije CC_1 trougla ABC i neka prava AK seče BC u tački M. Dokaži da je $CM : MB = 1 : 2$.

312. Na stranici AD paralelograma $ABCD$ data je tačka N, takva da je $AN = \frac{1}{4}AD$. Duž BN i dijagonala AC imaju zajedničku tačku M. Dokaži da je $AM = \frac{1}{5}AC$.

313. Prava p, paralelna osnovicama AB i CD trapeza $ABCD$, seče krake AD i BC u tačkama K i N i dijagonale AC i BD u tačkama L i M. Dokaži da je $KL = MN$.

314. Dokaži da prava, koja je određena presečnom tačkom dijagonala i presečnom tačkom produžetaka krakova trapeza, polovi obe osnovice trapeza.

315. Dat je ugao mOn, tačke M i P na kraku Om i tačke N i Q na kraku On, takve da je MN paralelno sa PQ. Prava a kroz tačku A, paralelna sa NP, seče krak Om u tački R. Dokaži da je duž OP geometrijska sredina duži OM i OR.

3.2. Slične figure

Radi proučavanja sličnih figura potrebno je, pre svega, dobro izučiti sličnost trouglova, od stavova sličnosti, do specijalnih osobina sličnih trouglova.

Slični trouglovi imaju proporcionalne odgovarajuće duži. Tako važi: $a : a_1 = O : O_1 = h : h_1 = r : r_1 = R : R_1 = t : t_1$. ($O$ je obim, a r i R poluprečnici upisanog i opisanog kruga.)

Ako su P i P_1 površine sličnih figura, tada je $P : P_1 = a^2 : a_1^2$.

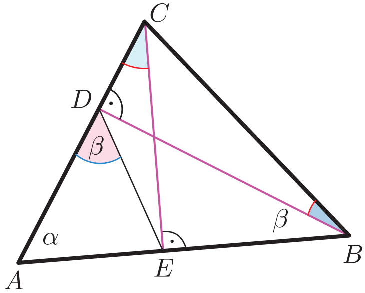
Nije teško dokaži da za svaki trougao ABC važi proporcija: $a : b = h_b : h_a$ (sledi iz formule za površinu: $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$).

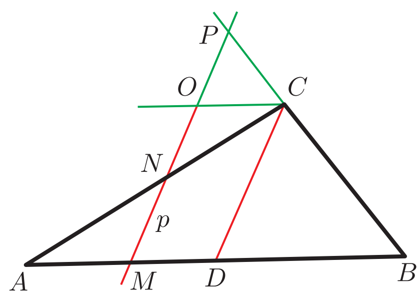
U pravouglom trouglu je hipotenuzina visina geometrijska sredina odsečaka koje ona gradi na hipotenuzi, tj. $h_c^2 = p \cdot q$.

Skrećemo pažnju na osobinu koju dokazujemo u **primeru C**.

Primer A). U oštrouglom trouglu ABC duži BD i CE su visine. Dokaži da je $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACE + \sphericalangle CBD$.

Dokaz. Pravougli trouglovi ABD i ACE imaju zajednički oštar ugao α, pa su prema drugom stavu slični, slika dole levo. Zbog toga je: $AD : AB = AE : AC$, odnosno $AD : AE = AB : AC$. Sada su trouglovi ADE i ABC slični po prvom stavu. Onda su njihovi odgovarajući uglovi jednaki i $\sphericalangle ADE = \beta$. Međutim $\beta = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD$, pa je i $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD$. Ali, kod sličnih trouglova ABD i ACE je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACE$, pa je konačno $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACE + \sphericalangle CBD$. To se i tvrdilo.



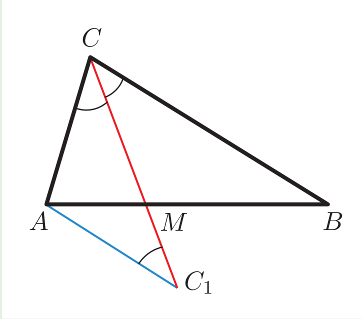


Primer B). Kroz tačku M stranice AB trougla ABC konstruisana je prava p, paralelna težišnoj liniji CD, koja seče prave AC i BC redom u N i P. Dokaži da je $MN + MP = 2CD$.

Dokaz. Neka je O tačka duži NP, takva da je $CO \| AB$, poslednja slika. Trouglovi OCP i DBC slični su, pa je $OP : OC = CD : BD$. Takođe su slični trouglovi OCN i DAC, odakle je $ON : OC = CD : AD$. Kako je $BD = AD$, sledi da je $OP : OC = ON : OC$, odakle je $OP = ON$. Dalje je $MN + MP = MN + (MN + ON + OP) = (MN + ON) + (MN + OP) = 2MO = 2CD$, jer je četvorougao $COMD$ paralelogram i $OM = CD$.

Primer C). Na stranici AB trougla ABC data je tačka M, takva da je $AM : MB = AC : CB$. Dokaži da je prava CM simetrala ugla ACB. Da li važi i obrnuto, tj. ako je CM simetrala ugla ACB, da li je $AM : MB = AC : CB$?

Dokaz. Neka je C_1 tačka u kojoj prava kroz A, paralelna sa BC, seče pravu CM. Tada je $AC_1 : CB = AM : MB$. Po uslovu je i $AC : CB = AM : MB$, pa je $AC_1 = AC$, tj. trougao AC_1C je jednakokraki i $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle AC_1C$. Međutim, zbog $AC_1 \| BC$ je i $\sphericalangle BCC_1 = \sphericalangle AC_1C$, pa je $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BCC_1$, što znači da je CM simetrala ugla ACB.



Dokažimo da važi i obrnuto. Neka je CM simetrala ugla ACB. Konstruišimo tačku C_1, kao što je već opisano. Tada, zbog $AC_1 \| BC$, važi da je $AC_1 : CB = AM : MB$. Ali, uglovi sa paralelnim kracima AC_1C i BCC_1 su jednaki, pa kako je BCC_1 polovina ugla ACB, to je $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle AC_1C$. Dakle, trougao ACC_1 je jednakokraki i $AC = AC_1$. Kad ovo smenimo u gornju proporciju, dobićemo traženi zaključak, tj. $AC : CB = AM : MB$.

316. Da li postoji trougao čije su visine: $h_a = 3$ cm, $h_b = 6$ cm i $h_c = 7$ cm?

317. U svakom trouglu ortocentar deli visine, tako da su proizvodi parova odsečaka svake visine jednaki među sobom. Dokaži.

318. Simetrala ugla β trougla ABC seče stranicu AC u tački D. Normala na BD kroz središte M duži BD seče pravu AC u tački E. Dokaži da je $AE \cdot CE = DE^2$.

319. Ugao ACB trougla ABC je 120°. Simetrala ovog ugla seče stranicu AB u tački D. Izračunaj dužinu duži CD, ako je $BC = 12$ cm i $AC = 6$ cm.

320. Ugao na osnovici jednakokrakog trougla je 72°. Koliki je krak, ako je osnovica 6 cm?

321. U trouglu ABC konstruisane su normale BE i CF na simetralu AD ugla BAC. Dokaži da je: $AE \cdot DF = AF \cdot DE$.

322. Simetrala pravog ugla u trouglu deli hipotenuzu u odnosu $m : n$. Dokaži da podnožje visine deli hipotenuzu u odnosu $m^2 : n^2$.

323. Hipotenuzina visina deli hipotenuzu u razmeri $16 : 25$. U kojoj razmeri simetrala pravog ugla deli hipotenuzu?

324. U jednakokrakom trouglu ABC, sa kracima $AC = BC = 12$ cm, konstruisana je visina CD na osnovicu AB. Kroz središte S visine CD konstruisana je prava p paralelna jednom kraku. Prava p seče druge dve stranice u tačkama M i N. Izračunaj dužinu duži MN.

325. Polukrug nad stranicom pravougaonika kao prečnikom, deli dijagonalu u odnosu $9 : 1$. Kako se odnose stranice pravougaonika?

326. Iz temena C paralelograma $ABCD$ $(AC > BD)$ povučene su normale CE i CF na produžetke stranica AB i AD. Dokaži da je $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

327. Tetiva BD kruga opisanog oko jednakokrakog trougla ABC, seče AC u tački E. Ako je $AB = BC = 12$ cm i $BE = 9$ cm, izračunaj dužinu tetive BD.

328. Dijagonale pravouglog trapeza obrazuju prav ugao. Dokaži da je visina trapeza geometrijska sredina osnovica.

329. Dat je krug k i tačka M van kruga. Konstruisane su tangenta i sečica iz tačke M. Tangenta dodiruje krug u tački C, a sečica seče krug u A i B, tako da je $MA = 4$ cm i $MB = 9$ cm. Izračunaj odsečak MC tangente.

330. Kroz tačku M van datog kruga k postavljene su sečice a i b, koje seku krug u tačkama, redom: A, C, B i D. Ako je $MA = 2$ cm, $MC = 6$ cm i $MB = 3$ cm, kolika je dužina tetive BD?

331. Ako su M i N tačke u kojima krug k, određen temenima A, B i C paralelograma $ABCD$, seče prave AD i CD, dokaži da je $MB : MC = MN : MD$.

332. Ako u trouglu ABC važi $\alpha = 2\beta$, onda je $a^2 - b^2 = bc$, a važi i obrnuto, tj. ako je $a^2 - b^2 = bc$, onda je $\alpha = 2\beta$. Dokaži.

333. Kroz središte stranice AB trougla ABC konstruisana je prava paralelna simetrali ugla ACB. Ova paralela seče pravu BC u tački D i pravu AC u tački E. Dokaži da je $BD = AE$.

334. Hipotenuzina visina trougla ABC je duž CD. Ako su O i S centri krugova upisanih u trouglove BCD i ACD, dokaži da je trougao DOS sličan trouglu ABC.

335. Na prečniku AA_1 kruga k data je tačka C. Neka je B tačka tog kruga za koju važi $AB = CA_1$. Dokaži da se u trouglu ABC simetrala unutrašnjeg ugla kod A, težišna linija iz temena B i visina iz temena C seku u jednoj tački.

3.3. Pitagorina teorema

Primenom sličnosti na pravougli trougao dolazi se do teoreme koja ima veoma jednostavnu formulaciju, ali i izuzetno važnu primenu.

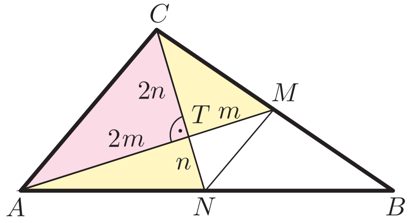
Pitagorina teorema. Ako je ABC pravougli trougao sa pravim uglom ACB, tada je $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (kvadrat hipotenuze jednak je zbiru kvadrata kateta).

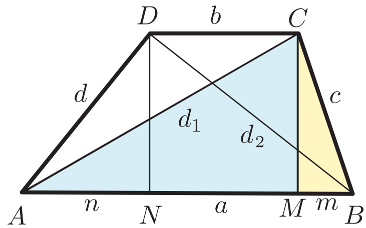
Važi i obrnut stav.

Obrnuta Pitagorina teorema. Ako je u trouglu zbir kvadrata dveju stranica jednak kvadratu treće stranice, onda je taj trougao pravougli i prav ugao je naspram najduže stranice, hipotenuze.

Primer A). U trouglu ABC sa stranicama $AB = 32$ cm i $BC = 24$ cm, težišne linije AM i CN seku se pod pravim uglom. Izračunaj dužinu stranice AC.

Rešenje. Neka je T težište trougla, sledeća slika levo. Ako uvedemo oznake $TM = m$ i $TN = n$, tada je $AT = 2m$ i $CT = 2n$. Četvorougao $ACMN$ podeljen je na četiri pravougla trougla, na koje ćemo primeniti Pitagorinu teoremu, vodeći računa o datim dužima: $AN = \frac{1}{2}AB = 16$ cm i $CM = \frac{1}{2}BC = 12$ cm. Imamo najpre: $m^2 + n^2 = MN^2$ i $4m^2 + 4n^2 = AC^2$. Zatim, iz trougla ANT je $n^2 + 4m^2 = AN^2 = 256$, a iz trougla CMT je $m^2 + 4n^2 = CM^2 = 144$. Sabiranjem poslednje dve jednakosti dobijamo: $5m^2 + 5n^2 = 400$, odakle je $m^2 + n^2 = 80$, a $4m^2 + 4n^2 = AC^2 = 320$. Prema tome: $AC = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ cm.





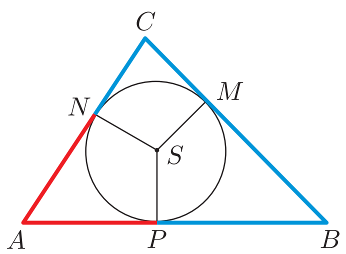
Primer B). Dokaži da je zbir kvadrata dijagonala proizvoljnog trapeza jednak zbiru kvadrata krakova, uvećanom za dvostruki proizvod osnovica.

Dokaz. Izrazimo visinu CM iz pravouglih trouglova ACM i BCM, slika gore desno: $d_1^2 - (a - m)^2 = CM^2 = c^2 - m^2$ i dobićemo: $d_1^2 = a^2 + c^2 - 2am$. Slično, iz pravouglih trouglova ADN i BDN dobijemo: $d_2^2 = a^2 + d^2 - 2an$. Saberemo ove jednakosti: $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2a^2 - 2am - 2an = c^2 + d^2 + 2a(a - m - n) = c^2 + d^2 + 2ab$, jer je $a - m - n = b$.

Primer C). Neka su a i b katete, c hipotenuza i h hipotenuzina visina proizvoljnog pravouglog trougla. Dokaži da su duži $a + b$, h i $c + h$ stranice nekog pravouglog trougla.

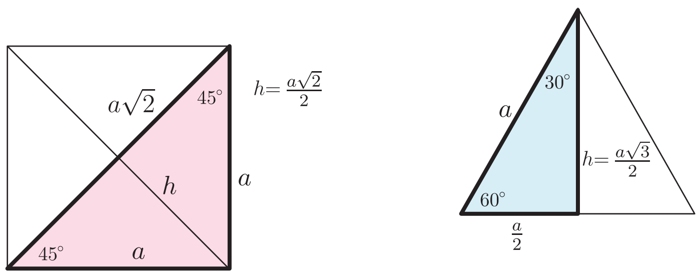
Dokaz. Koristićemo jednakost $a \cdot b = c \cdot h$, i kvadrat binoma: $(a + b)^2 + h^2 = a^2 + 2ab + b^2 + h^2 = (a^2 + b^2) + 2ab + h^2 = c^2 + 2ch + h^2 = (c + h)^2$. Dakle, iz $(a + b)^2 + h^2 = (c + h)^2$, na osnovu obrnute Pitagorine teoreme, sledi da su $(a + b)$ i h katete i $(c + h)$ hipotenuza pravouglog trougla.

Primer D). U trougao ABC upisan je krug koji dodiruje stranicu AB u tački P, slika desno. Dokaži: ako je $AC \cdot BC = 2AP \cdot BP$, onda je trougao ABC pravougli.



Dokaz. Iz podudarnosti trouglova APS i ANS sledi da je $AP = AN$. Slično je $BP = BM$ i $CM = CN$, pa je $BC - AC = BM + CM - CN - AN = BM - AN = BP - AP$ (slika). Odavde je $(BC - AC)^2 = (BP - AP)^2$, odnosno: $BC^2 - 2AC \cdot BC + AC^2 = BP^2 - 2AP \cdot BP + AP^2$. Zamenimo $2AC \cdot BC = 4AP \cdot BP$ i dobijemo: $BC^2 + AC^2 = BP^2 + 2AP \cdot BP + AP^2 = (BP + AP)^2 = AB^2$. Prema obrnutoj Pitagorinoj teoremi trougao ABC je pravougli, sa hipotenuzom AB.

Kad je reč o standardnoj primeni Pitagorine teoreme, treba posebno istaći i trajno zapamtiti dva specijalna pravougla trougla: **jednakokraki pravougli**, koji predstavlja polovinu kvadrata i pravougli trougao sa oštrim uglovima od $30°$ i $60°$, koji predstavlja **polovinu jednakostraničnog trougla**.



Prepoznavanje ovih trouglova može bitno olakšati rešavanje nekih izuzetno složenih zadataka. Posebno je to važno kod izračunavanja dimenzija rogljastih tela. Ove trouglove prepoznajemo ili po uglovima, što je očigledna i lakša varijanta, ili po specifičnom odnosu stranica. Kod jednakokrakog pravouglog trougla je karakterističan faktor $\sqrt{2}$, a kod polovine jednakostraničnog trougla to je $\sqrt{3}$, kao i činjenica da je **manja kateta jednaka polovini hipotenuze**.

336. Hipotenuzina težišna linija ima dužinu 20 cm. Kroz središte hipotenuze postavljena je normala na hipotenuzu, do preseka sa katetom. Dužina ove normale je 15 cm. Izračunaj dužine kateta.

337. U pravouglom trouglu sa pravim uglom C težišne linije su vezane relacijom: $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$. Dokaži.

338. Dokaži da je zbir kvadrata dijagonala proizvoljnog paralelograma jednak zbiru kvadrata njegovih stranica.

339. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokaži da je zbir kvadrata dijagonala jednak zbiru kvadrata osnovica tog trapeza.

340. Dokaži da u svakom pravouglom trouglu važi relacija:
$\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, gde je h_c hipotenuzina visina.

341. Kateta pravouglog trougla je dužine 6 cm, a dužine ostalih stranica izražavaju se takođe celim brojem centimetara. U kom odnosu hipotenuzina visina deli hipotenuzu?

342. Hipotenuzina visina deli hipotenuzu na odsečke dužina 9 cm i 16 cm. Kroz središte ove visine i teme većeg oštrog ugla povučena je prava. Izračunaj dužinu odsečka ove prave, određenog stranicama trougla.

343. Ako su a i b katete i c hipotenuza nekog pravouglog trougla, dokaži da je $a + b < c\sqrt{2}$. Kada važi znak jednakosti?

344. Izračunaj katete pravouglog trougla, ako mu je hipotenuza dužine 2 cm i oštar ugao $\alpha = 22°30'$.

345. Brodovi A i B kreću se pravolinijski, po putanjama koje se seku pod pravim uglom u zamišljenoj tački O. Brod A je od tačke O udaljen 300 km i kreće se brzinom od 40 km/h, a brod B je od tačke O udaljen 100 km i kreće se brzinom od 30 km/h. Oba broda se kreću ka tački O. Posle koliko časova će rastojanje između brodova ("vazdušna linija") biti najmanje?

346. Ako su a i b katete i h hipotenuzina visina, dokaži nejednakost $c + h > a + b$.

347. Za stranice pravougaonika važi $a : b = \sqrt{2} : 1$. Dokaži da podnožja normala iz dva naspramna temena na dijagonalu dele tu dijagonalu na tri jednaka dela.

348. Vrt ima oblik pravougaonika sa temenima A, B, C i D. U vrtu raste jablan koji je od A udaljen 7 m, od B udaljen 2 m i od C udaljen 6 m. Koliko je jablan udaljen od temena D?

349. Pravougaoni list hartije dimenzija 16 cm i 12 cm presavije se tako da se dva suprotna temena poklope. Izračunaj dužinu duži po kojoj je papir presavijen.

350. Osnovica jednakokrakog trougla je dužine $8\sqrt{2}$ cm, a težišna linija koja odgovara kraku je 10 cm. Odredi dužinu kraka.

351. U trouglu ABC je dato: $a = 20$ cm, $b = 15$ cm i $\alpha - \beta = 90°$. Kolika je dužina stranice $c = AB$?

352. Kvadrat površine 10 dm^2 treba popločati sa 10 kvadratnih pločica ivice 10 cm. Dozvoljeno je samo nekoliko pločica razrezati po jednim pravim rezom na dva dela. Koliko je napakovano celih pločica?

353. Dat je krug poluprečnika dužine 6 cm. Kolika je dužina tetive AB ovog kruga, ako joj odgovara centralni ugao od 210°?

354. Dužine stranica trougla su tri uzastopna prirodna broja, ne manja od 3. Dokaži da visina trougla spuštena na srednju po veličini stranicu deli tu stranicu na delove čija je razlika 4.

355. Dat je kvadrat $MNPQ$ sa stranicama dužine 1 m. Na stranicama tog kvadrata istaknute su tačke A, B, C. Tačka A je na $\frac{1}{3}$ stranice NP od tačke N, tačka B je na $\frac{2}{3}$ stranice MQ od tačke M, tačka C je središte stranice MN. Trougao ABC nije pravougli. Na koju stranu i za koliko treba pomeriti tačku C, tako da trougao ABC bude pravougli?

356. Ortocentar oštrouglog trougla je H. Neka je $AH = x$, $BH = y$ i $CH = z$. Dokaži da važi jednakost: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(xh_a + yh_b + zh_c)$.

357. U jednakokrakom trouglu ABC osnovica je $AB = 24$ cm i krak $AC = 20$ cm. Izračunaj rastojanje od ortocentra do težišta tog trougla.

358. Nad datom duži $AB = a$ kao prečnikom opisan je polukrug sa centrom O i u tom polukrugu upisana su nad OA i OB, kao nad prečnicima, još dva manja polukruga. Nacrtaj krug koji dodiruje veći polukrug iznutra, a manje polukrugove dodiruje spolja. Zatim, izračunaj dužinu poluprečnika tog kruga, ako je $a = 12$ cm.

359. Duž AB ima dužinu 8 cm. Iz krajnjih tačaka A i B te duži opisane su kružnice sa poluprečnikom AB. Neka je M jedna od njihovih presečnih tačaka. U tako dobijeni "krivolinijski trougao" ABM upisana je kružnica. Odredi poluprečnik te upisane kružnice.

360. U kvadrat čija je stranica dužine a cm upisan je krug k. Zatim su u kvadrat upisana još četiri kruga, tako da svaki od njih dodiruje spolja krug k i dve stranice kvadrata. Izračunaj poluprečnike svih krugova.

Glava 4

MNOGOUGAO

- Proizvoljni mnogouglovi
- Pravilni mnogouglovi

Mnogougao

4.1. Proizvoljni mnogouglovi

Osim **primera B)** i **zadatka 367**, rešavaćemo isključivo probleme sa **konveksnim** mnogluglovima.

Zbir unutrašnjih uglova mnogougla: $S_n = (n-2)\cdot 180^\circ$.

Zbir spoljašnjih uglova svakog konveksnog mnogougla je $S = 360^\circ$.

Broj dijagonala mnogougla je: $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Primer A). Broj dijagonala mnogougla osam puta je veći od broja stranica. Koliki je zbir unutrašnjih uglova tog mnogougla?

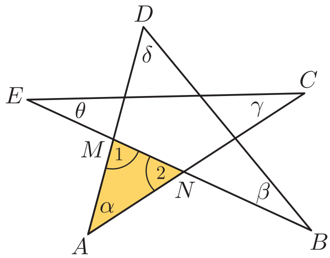
Rešenje. Prema uslovu je $\dfrac{n(n-3)}{2} = 8n$, odnosno $n(n-3) = 16n$. Odavde je $n-3 = 16$, pa je $n = 19$.

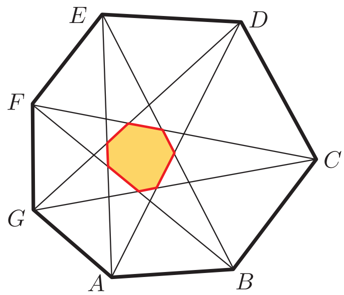
Zbir unutrašnjih uglova je $S_{19} = 17\cdot 180^\circ = 3060^\circ$.

Primer B). Koliki je zbir pet unutrašnjih uglova u šiljcima proizvoljne petokrake zvezde, kao na sledećoj slici?

Rešenje. Uočimo, na primer, trougao AMN. Njegov unutrašnji ugao $\sphericalangle 1$ predstavlja spoljašnju ugao za trougao MBD. Zbog toga je $\sphericalangle 1 = \beta + \delta$. Slično je $\sphericalangle 2 = \gamma + \theta$. U samom trouglu AMN je $\alpha + \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180^\circ$. Sledi da je $\alpha + (\beta+\delta) + (\gamma+\theta) = 180^\circ$, pa je $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\theta = 180^\circ$. To je traženi zbir.

Primer C). Povučene su sve dijagonale konveksnog sedmougla. One dele sedmougao na manje mnogouglove disjunktnih oblasti. Koliko najviše stranica može da ima jedan takav mnogougao?





Rešenje. Najveći broj stranica može imati onaj manji mnogougao kojeg određuju parovi susednih dijagonala, jer između njih ne prolazi nova prava koja bi dalje delila mali mnogougao na još manje mnogouglove. Jedan takav mnogougao obojen je na poslednjoj slici. Neka su AD i AE susedne dijagonale. Mali mnogougao može imati najviše po jednu stranicu na svakoj od ovih dijagonala. Slično zaključujemo i za susedne dijagonale BE i BF iz temena B i dalje za parove dijagonala CF i CG, pa DG i DA, pa EA i EB, pa FB i FC i na kraju GC i GD. Maksimalni broj stranica malog mnogougla je 7 (parova dijagonala) puta 2, pa to podeljeno sa 2 (jer je svaka dijagonala računata po 2 puta, sa 2 kraja, na primer, dijagonale AD i DA). Dakle, maksimalni broj stranica je 7.

361. Kad se broj stranica mnogougla udvostruči, onda se broj njegovih dijagonala poveća za 1998. Za koliko se pritom povećao zbir njegovih unutrašnjih uglova?

362. Da li postoji mnogougao kod koga je broj dijagonala za 2016 veći od broja stranica?

363. Ako se broj stranica mnogougla poveća za 5, onda se broj dijagonala poveća za 45. Koliko stranica ima prvobitni mnogougao?

364. Kada se broj koji označava zbir unutrašnjih uglova mnogougla pomnoži brojem dijagonala, dobije se broj 97200. Koliko stranica ima taj mnogougao?

365. Postoji li mnogougao koji ima

a) 1710 dijagonala; b) 2002 dijagonala; c) 2017 dijagonala?

Koliko stranica ima taj mnogougao?

366. Dat je mnogougao obima 1 dm. Dokaži da se taj mnogougao može pokriti krugom poluprečnika 25 milimetara.

367. Nacrtaj zvezdasti sedmougao (jednim potezom), tako da svaka njegova stranica seče tačno dve druge stranice. Koliki je zbir S unutrašnjih uglova u vrhovima zvezde?

368. U petouglu $ABCDE$ data je stranica $AE = 4$ cm. Neka su P, Q, S i T redom središta duži AB, CD, BC i DE, a M i N redom središta duži PQ i ST. Odredi dužinu duži MN.

369. Dokaži da je zbir dužina dijagonala petougla veći od obima tog petougla.

370. Naspramne stranice šestougla $ABCDEF$ paralelne su među sobom. Dokaži da je površina trougla ACE jednaka površini trougla BDF.

371. Iz proizvoljne unutrašnje tačke konveksnog mnogougla spuštene su normale na njegove stranice. Dokaži da bar jedno od podnožja ovih normala mora biti na samoj stranici, a ne na njenom produžetku.

372. Tačke X i Y pripadaju stranicama ili unutrašnjosti mnogougla. Ako je duž XY maksimalne dužine, dokaži da su X i Y temena mnogougla.

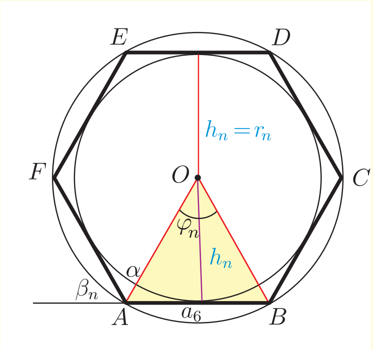
373. Dokaži da u svakom sedmouglu postoje dve dijagonale, takve da se prave koje ih sadrže seku pod uglom manjim od $13°$, ili su paralelne.

374. Dat je petougao $ABCDE$, takav da je $AB = AE = CD = 1$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEA = 90°$ i $BC + DE = 1$. Izračunaj površinu ovog petougla.

375. Sva temena konveksnog mnogougla nalaze se u unutrašnjosti kvadrata čija je stranica dužine 1. Dokaži da je zbir kvadrata dužina svih stranica tog mnogougla manji od 4.

4.2. Pravilni mnogouglovi

Mnogougao je pravilan ako su mu jednake sve stranice i svi unutrašnji uglovi. Po definiciji, spoljašnji ugao je suplementan odgovarajućem unutrašnjem uglu, pa su spoljašnji uglovi pravilnog mnogougla jednaki među sobom.



Spoljašnji ugao je: $\beta_n = \dfrac{360°}{n}$.

Unutrašnji ugao pravilnog mnogougla je: $\alpha = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ i $\alpha = 180 - \beta_n$.

Pravilni mnogougao ima opisani i upisani krug, kao pravilni šestougao na prethodnoj slici.

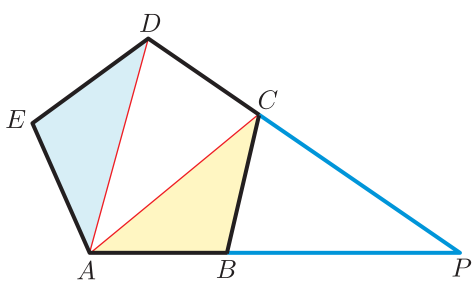
Za pravilni mnogougao važan je tzv. karakteristični trougao, na slici obojeni trougao OAB. To je jednakokraki trougao kome je osnovica stranica mnogougla. Ugao $\sphericalangle AOB$ je centralni ugao φ_n i $\varphi_n = \dfrac{180^\circ}{n} = \beta_n$.

Primer A). Dokaži da za svaki pravilni petougao važi:

a) sve dijagonale jednake su međusobno;

b) ako dve nesusedne stranice produžimo do međusobnog preseka, taj produžetak jednak je dijagonali.

Dokaz. a) Iz svakog temena imamo po dve dijagonale, kao AC i AD na slici. Vidimo da su trouglovi ABC i AED podudarni po stavu SUS ($AB = AE$ i $BC = ED$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AED$, kao stranice i uglovi pravilnog mnogougla). Iz ove podudarnosti sledi: $AC = AD$. Slično se dokazuje da su i ostale dijagonale jednake među sobom.

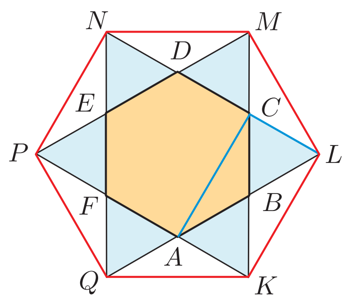


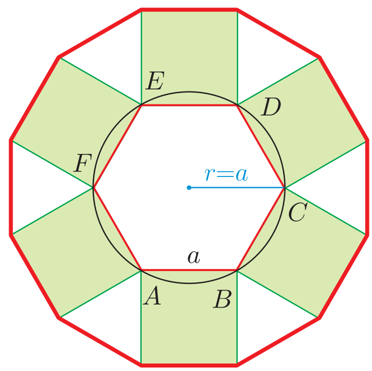
b) Trougao ABC je jednakokraki, pa kako je $\sphericalangle B = 108^\circ$, sledi da $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 36^\circ$. U trouglu BCP uglovi $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCD$ su spoljašnji i oba mere po 108°. Onda je $\sphericalangle CBP = \sphericalangle BCP = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Sledi da je $\sphericalangle P = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$. Dakle, $\sphericalangle CAP = 36^\circ = \sphericalangle APC$, pa je trougao APC jednakokraki i $CP = AC$, što se i tvrdi.

Primer B). Van pravilnog šestougla $ABCDEF$ date su tačke: K, L, M, N, P, Q, takve da su trouglovi ABK, BCL, CDM, DEN, EFP, FAQ jednakostranični. Dokaži da je mnogougao $KLMNPQ$ pravilni šestougao, čija je stranica jednaka manjoj dijagonali šestougla $ABCDEF$.

Dokaz. Trouglovi KBL, LCM, MDN, NEP, PFQ i QAK su podudarni po stavu SUS. (Dve stranice, jednake stranici datog šestougla, zahvataju ugao od 120°, slika dole levo.) Zbog toga je $KL = LM = MN = NP = PQ = QK$. Izračunavanjem uglova uverićemo se da su svi unutrašnji uglovi mnogougla $KLMNPQ$ jednaki 120° (svaki: $30^\circ + 60^\circ + 30^\circ$).

Nije teško uveriti se da je četvorougao $AKLC$ pravougaonik, pa je $KL = AC$, što se i tvrdilo.





Primer C). Konstruiši pravilni dvanaestougao kome je stranica jednaka datoj duži a.

Rešenje. Konstrukciju možemo izvršiti pomoću karakterističnog trougla. (To je jednakokraki trougao osnovice a sa uglom od 30° naspram osnovice.)

Na slici gore desno dato je sledeće rešenje. U krug poluprečnika a upišemo pravilni šestougao $ABCDEF$. Zatim nad svakom stranicom ovog šestougla konstruišemo kvadrat. Lako je dokazati da temena ovih kvadrata određuju traženi pravilan dvanaestougao. Dokaz prepuštamo čitaocima.

Primer D). Dat je pravilni 2019-ougao. Na koliko se načina mogu izabrati njegova tri temena, tako da ona istovremeno predstavljaju temena jednakokrakog trougla?

Rešenje. Izborom dva temena jednoznačno je određeno i treće teme. Naime, ako smo izabrali temena A i B, onda s jedne strane prave AB imamo paran broj temena datog mnogougla, a s druge strane neparan broj. Simetrala tetive AB sadrži treće teme traženog jednakokrakog trougla. To teme nalazi se sa neparne strane tetive AB. Dva temena, a to je osnovica jednakokrakog trougla, možemo izabrati na $\dfrac{2019 \cdot 2018}{2}$ načina, a to je $2019 \cdot 1009 = 2037171$ načina. Pritom, imamo 673 jednakostranična trougla: $A_1A_{674}A_{1347}, A_2A_{675}A_{1348}, \ldots, A_{673}A_{1346}A_{2019}$. Ali, svaki od 673 jednakostraničnih trouglova računat je po tri puta. Dakle, ukupni broj traženih jednakokrakih trouglova je $2037 - 2 \cdot 673 = 2035825$.

376. Izračunaj broj dijagonala pravilnog mnogougla koji ima spoljašnji ugao od $13°20'$.

377. Zbir broja dijagonala i broja stranica pravilnog mnogougla je 153. Koliki je unutrašnji ugao tog mnogougla?

378. Stranica pravilnog mnogougla je 10 cm. Koliki je obim tog mnogougla, ako on ima 252 dijagonale?

379. Unutrašnji ugao pravilnog mnogougla M za 50% je veći od unutrašnjeg ugla pravilnog mnogougla M_1. Odredi sve parove ovakvih mnogouglova.

380. Od pravilnog mnogougla odsečen je jednakokraki trougao ABC, gde su A, B i C uzastopna temena. Na najdužoj stranici AC tog trougla postoji tačka K, takva da su i trouglovi ABK i BCK jednakokraki. Koliko stranica može imati taj pravilni mnogougao?

381. Koji deo površine pravilnog osmougla $ABCDEFGH$ pokriva trougao AEH?

382. Pravilni osmougao $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ upisan je u krug poluprečnika 6 cm. Dat je pravougaonik A_1BCA_7, u kome leži teme A_4. Osmougao i pravougaonik imaju jednake površine. Izračunaj površinu dela pravougaonika koji je van osmougla.

383. U pravilnom petouglu $ABCDE$ izabrana je tačka F, tako da je trougao ABF jednakostranični. Koliki je ugao $\sphericalangle EFC$?

384. Izračunaj površinu pravilnog dvanaestougla upisanog u krug poluprečnika 6 cm.

385. Izračunaj obim pravilnog dvanaestougla koji je upisan u krug poluprečnika r. Kolika je stranica ovog mnogougla ako je $r = \sqrt{2}$ cm?

386. Najmanja dijagonala pravilnog dvanaestougla ima dužinu $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm. Izračunaj površinu i obim ovog dvanaestougla.

387. Pravilni dvanaestougao $A_1A_2\ldots A_{12}$ upisan je u krug poluprečnika 1 dm. Izračunaj površinu četvorougla $A_1A_3A_4A_5$.

388. U pravilnom mnogouglu $A_1A_2\ldots A_n$ je $\sphericalangle A_3A_1A_4 = 6°$. Koliko dijagonala ima ovaj mnogougao?

389. U pravilnom šestouglu $ABCDEF$ izabrana je proizvoljna tačka M. Dokaži da je zbir površina trouglova MAB, MCD i MEF jednak zbiru površina trouglova MBC, MDE, MFA.

390. Pravilni osmougao $ABCDEFGH$ ima stranicu $a = 8$ cm. Kolika je površina trougla ABE?

391. Ako je a stranica pravilnog desetougla $ABCDEFGHIJ$ i r poluprečnik opisanog kruga, dokaži da je $AD = a + r$.

392. Dokaži da se ravan ne može pokriti parketnim pločicama u obliku pravilnih petouglova i pravilnih desetouglova, čije su stranice iste dužine.

393. Neka su AB i BC dve susedne stranice pravilnog devetougla upisanog u krug čiji je centar tačka O. Ako je M središte stranice AB i N središte poluprečnika OX, normalnog na BC, dokaži da je $\sphericalangle OMN = 30°$.

394. Dokaži da je u pravilnom devetouglu razlika najduže i najkraće dijagonale jednaka stranici tog devetougla.

395. Dat je pravilni sedmougao $ABCDEFG$, kome je stranica dužine 1 cm. Dokaži da je $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD} = 1$.

Glava 5

KRUG

- Uglovi kruga
- Tetive i tangente kruga
- Tetivni i tangentni četvorougao
- Konstruktivni zadaci o krugu

Krug

5.1. Uglovi kruga

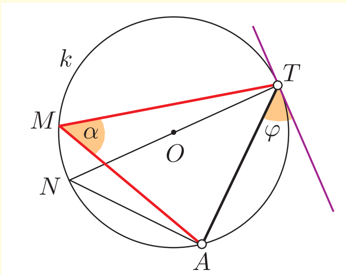
Dve tetive sa zajedničkom krajnjom tačkom određuju *periferijski* ugao.

Ugao određen sa dva poluprečnika naziva se *centralnim* uglom.

– Centralni ugao je dva puta veći od odgovarajućeg periferijskog ugla (periferijskog ugla nad istom tetivom).

– Periferijski ugao nad prečnikom je prav.

– Periferijski uglovi nad jednom tetivom u datom krugu, sa jedne strane date tetive, jednaki su među sobom.



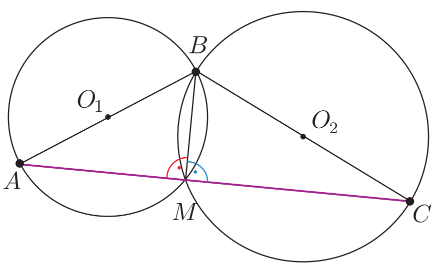
– Dva periferijska ugla nad jednakim tetivama u jednom krugu, ili u jednakim krugovima, jednaki su ili su suplementni.

– Ugao zahvaćen tetivom i tangentom koja je konstruisana u krajnjoj tački tetive (*tangentni ugao*), jednak je periferijskom uglu, koji je sa druge strane tetive. (Na slici je tetivni ugao α jednak tangentnom uglu φ.)

– Jednakim tetivama u krugu odgovaraju jednaki centralni uglovi i jednaka centralna rastojanja (normale iz centra).

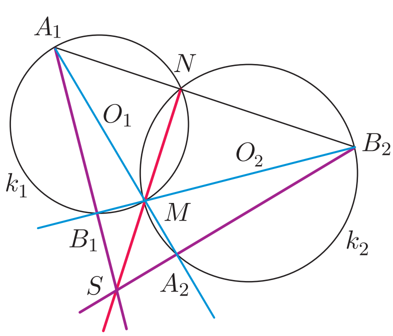
Primer A). Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke i neka je M, $M \neq B$, zajednička tačka kružnica konstruisanih nad prečnicima AB i BC. Dokaži da su tačke A, C i M kolinearne.

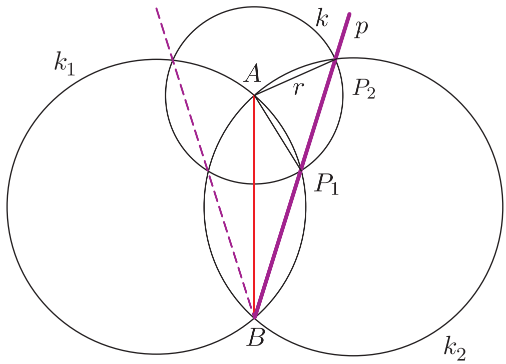
Dokaz. Uglovi AMB i BMC su pravi, kao periferijski nad prečnicima. Zbog toga je $\sphericalangle AMB + \sphericalangle BMC = 180^\circ$, što znači da su A, M i C tačke jedne prave, vidi sliku.



Primer B). Krug k_1 sa centrom O_1 i krug k_2 sa centrom O_2 imaju zajedničku tetivu MN. Prava O_1M seče k_1 i k_2 u tačkama A_1 i A_2, a prava O_2M seče k_1 i k_2 u tačkama B_1 i B_2. Dokaži da prave MN, A_1B_1 i A_2B_2 imaju jednu zajedničku tačku.

Dokaz. Prema prethodnom primeru, tačke A_1, N i B_2 pripadaju jednoj pravoj. Neka je S presečna tačka pravih A_1B_1 i A_2B_2, slika levo. Uglovi A_1B_1M i B_2A_2M su pravi (nad prečnicima), što znači da su A_1A_2 i B_1B_2 visine trougla A_1B_2S. Onda je tačka M ortocentar tog trougla, pa je NM treća visina (normalna je na A_1B_2) i prolazi kroz tačku S. Tačka S je zajednička za prave A_1B_1, A_2B_2 i MN.



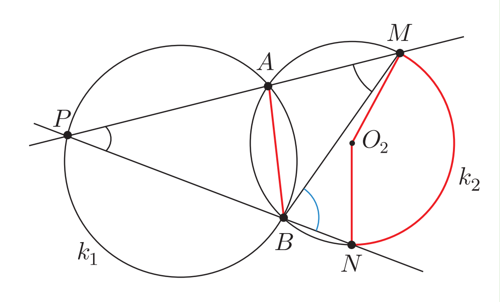


Primer C). Dva jednaka kruga k_1 i k_2 imaju zajedničku tetivu AB. Krug k, sa centrom A, seče date krugove. Dokaži da tačka B, jedna presečna tačka krugova k i k_1 i jedna presečna tačka krugova k i k_2, pripadaju jednoj pravoj.

Dokaz. Uočimo tačke B, P_1 i P_2, slika gore desno. Ugao ABP_1 je periferijski nad tetivom $AP_1 = r$ u krugu k_1, gde je r poluprečnik kruga k. Ugao ABP_2 je periferijski ugao nad tetivom $AP_2 = r$ u krugu k_2. Kako su k_1 i k_2 podudarni, to je $\sphericalangle ABP_1 = \sphericalangle ABP_2$, pa se prave BP_1 i BP_2 poklapaju. Tačke B, P_1 i P_2 su na jednoj pravoj.

Primer D). Krugovi k_1 i k_2 imaju zajedničku tetivu AB. Ako iz ma koje tačke P kruga k_1, koja je van kruga k_2, kroz tačke A i B povučemo sečice kruga k_2 koje seku k_2 u tačkama M i N, dokaži da veličina centralnog ugla MO_2N ne zavisi od izbora tačke P.

Dokaz. Uočimo tetivu BM, slika desno. Za svaku tačku P ugao APB je nepromenljiv, jer je on periferijski nad tetivom AB u krugu k_1. Slično utvrdimo da je ugao AMB, periferijski u krugu k_2, nepromenljiv. Onda se ne menja ni veličina $\sphericalangle MBN$, jer je $\sphericalangle MBN = \sphericalangle APB + \sphericalangle AMB$ (spoljašnji ugao trougla MBP). Kako je $\sphericalangle MO_2N$ centralni, a $\sphericalangle MBN$ periferijski nad istim lukom u krugu k_2, biće i $\sphericalangle MO_2N = 2 \cdot \sphericalangle MBN$ nepromenljive veličine.



396. Dokaži da je svaki trapez upisan u krug obavezno jednakokraki.

397. Oko trougla ABC opisan je krug. Ako je H ortocentar tog trougla i AP prečnik opisanog kruga, dokaži da je četvorougao $BHCP$ paralelogram.

398. U raznostranom trouglu ABC tačka H je ortocentar i O centar opisanog kruga. Prave CH i CO seku opisani krug u tačkama M i N. Dokaži da su tačke A, B, M i N temena jednakokrakog trapeza.

399. Na krugu su date redom tačke: A, B, C, D, E, F, tako da je $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BEC$. Dokaži da je $AB \| CF$.

400. U datom trouglu ABC je $\sphericalangle CAB = 50^\circ$. Izaberimo tačku D van trougla, takvu da su A i D sa raznih strana prave BC, pri čemu je $\sphericalangle CBD = 30^\circ$ i $\sphericalangle BAD = 20^\circ$. Izračunaj ugao BCD.

401. Za unutrašnje uglove trougla ABC važi $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 4$. Prava, koja je određena tačkom C i centrom O opisanog kruga, seče stranicu AB u tački D. Izračunaj razmeru $AD : DB$.

402. Dat je pravougli trougao ABC, takav da je $AB > AC > BC$. Nad katetom AC, kao prečnikom, konstruisan je krug koji hipotenuzu seče u tački D. Kroz D je konstruisana tangenta ovog kruga. Ako tangenta seče katetu BC u tački E, dokaži da je $BE = CE$.

403. Data su tri kruga k_1, k_2, k_3, takva da svaki dodiruje ostala dva. Dodirne tačke određuju u svakom od krugova po jednu tetivu. Dokaži da prave određene dvema tetivama seku treći krug u dijametralno suprotnim tačkama (tj. u krajevima jednog prečnika).

404. Neka su A, B, C, D, četiri proizvoljne tačke neke kružnice. Središta četiri luka, određena susednim tačkama (npr. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$), određuju prave. Dokaži da među ovim pravim postoje dve koje su normalne jedna na drugoj.

405. Izračunaj unutrašnje uglove trougla ABC, ako težišna linija, simetrala ugla i visina iz temena C dele ugao ACB na četiri jednaka dela.

406. U krug je upisan četvorougao $ABCD$. Dijagonale AC i BD seku se u tački S, tako da $\sphericalangle ABC = 76^\circ$, $\sphericalangle BCD = 82^\circ$ i $\sphericalangle ASD = 100^\circ$. Koliki je ugao ABD?

407. Duž AB je zajednička tetiva dvaju krugova, od kojih jedan prolazi kroz centar O drugog kruga. Dokaži da prava AO polovi ugao određen tangentom prvog kruga u tački A i zajedničkom tetivom.

408. Krugovi k_1 i k_2 imaju zajedničku tetivu AB. Sečice p i q sadrže tačku A i seku k_1 i k_2 još u tačkama: P_1 i Q_1 kruga k_1 i tačkama P_2 i Q_2 kruga k_2. Dokaži da je $\sphericalangle P_1BP_2 = \sphericalangle Q_1BQ_2$.

409. U trougao ABC upisan je krug sa centrom S. Ako tačka M polovi onaj luk AB opisanog kruga, kojem ne pripada teme C, dokaži da je $AM = BM = SM$.

410. U jednom krugu tetiva AB i prečnik AC odsecaju luk BC, čiji je centralni ugao od 60°. Tačka E polovi luk AB, a tačka F polovi luk AC. Tetiva EF seče tetivu AB u tački M i prečnik AC u tački N. Dokaži da je trougao AMN jednakokraki.

411. Ako su M, N, P, redom tačke u kojima simetrale unutrašnjih uglova α, β, γ trougla ABC seku opisani krug ovog trougla, dokaži da je $AM \perp NP$. (Takođe je $BN \perp MP$ i $CP \perp MN$.)

412. Na stranici BC trougla ABC data je tačka M. Ako su O_1 i O_2 centri krugova opisanih oko trouglova ABM i ACM, dokaži da je $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle BAC$.

413. Krugovi k_1 i k_2 imaju zajedničku tetivu AB. Ako su p i q proizvoljne sečice kroz tačku A, koje seku krug k_1 u tačkama P_1 i Q_1 i krug k_2 u tačkama P_2 i Q_2, dokaži da se prave P_1Q_1 i P_2Q_2 seku pod konstantnim uglom.

414. U trouglu ABC je $\sphericalangle BAC = 70^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 50^\circ$. Tačka M u trouglu, izabrana je tako da je $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = 40^\circ$. Odredi uglove AMB i BMC.

415. Dva kruga se seku u tačkama A i B. Njihova zajednička tangenta dodiruje jedan krug u tački M i drugi krug u tački N. Izračunaj zbir $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MBN$.

416. Data su dva jednaka kruga k_1 i k_2 sa centrima S_1 i S_2. Tačka S_2 je na krugu k_1. Dati krugovi imaju zajedničke tačke A i B. Neka je p proizvoljna prava kroz A, koja seče ove krugove u tačkama C i D. Dokaži da je trougao BCD jednakostranični.

417. Dva kruga jednakih poluprečnika seku se u tačkama A i B. Kroz tačku A konstruisana je proizvoljna prava m, koja date krugove seče još u tačkama M i N. Dokaži da je trougao BMN jednakokraki.

418. Na datom krugu izabrane su tačke A, B i C, tako da su dva luka, AB i AC, manji od polukruga. Tetiva DE, koja polovi ova dva luka, seče AB u tački F i AC u tački G. Dokaži da je $AG = AF$.

419. Dat je konveksni četvorougao $ABCD$ kome je $\sphericalangle ABD = 50°$, $\sphericalangle ADB = 80°$, $\sphericalangle ACB = 40°$. Izračunaj ugao DBC, ako je on od ugla BDC veći za $30°$.

420. Na tetivi AB kruga k izabrana je proizvoljno tačka C. Označimo sa D drugu zajedničku tačku kruga k i opisanog kruga trougla OAC, gde je O centar kruga k. Dokaži da je $CD = BC$.

421. Na prečniku AB datog kruga k izabrana je proizvoljna tačka C. Nad dužima AC i BC kao prečnicima, konstruisani su krugovi k_1 i k_2. Zatim je kroz tačku C konstruisana prava p, koja seče krug k_1 u tački K i krug k_2 u tački L. Ako su M i N presečne tačke prave p sa krugom k, dokaži da je $KM = LN$. (Takođe je i $KN = LM$.)

422. Date su redom tačke A, B, C, D, jedne prave. Neka su k i k_1 krugovi nad prečnicima AB i CD, sa zajedničkom tangentom p, koja ih dodiruje u tačkama P i P_1. Dokaži da prave AP, BP, CP_1 i DP_1 međusobnim presecima određuju pravougaonik čija je dijagonala normalna na AB.

423. Dva kruga k_1 i k_2, sa centrima S_1 i S_2, imaju zajedničku tetivu AB. Proizvoljna prava kroz A seče k_1 u tački C_1 i k_2 u tački C_2. Dokaži da je $\sphericalangle BC_1S_1 = \sphericalangle BC_2S_2$.

424. Visine oštrouglog trougla ABC seku opisani krug trougla u tačkama M, N i P. Dokaži da je ortocentar H trougla ABC istovremeno centar kruga upisanog u trouglu MNP.

425. Na polukrugu k sa centrom O i prečnikom AB izabrana je proizvoljno tačka M, različita od A i B. Neka su P i Q centri krugova k_1 i k_2, opisanih oko trouglova AOM i BOM. Prave AP i BQ seku se u tački S. Dokaži da je tačka S na krugu k.

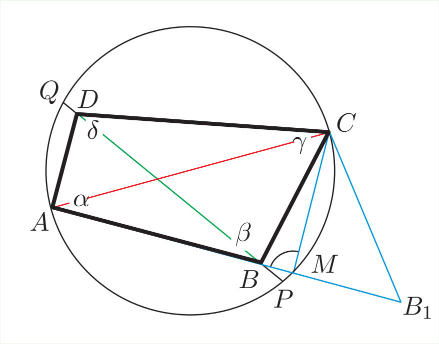
5.2. Tetive i tangente kruga

Odsečak tangente od jedne njene tačke P do dodirne tačke T, naziva se *tangentna duž* iz tačke P. Iz svake tačke van kruga možemo konstruisati dve tangentne duži.

Tangentne duži iz jedne tačke na dati krug jednake su među sobom.

Primer A). Četvorougao ima tri tupa ugla. Dokaži da je veća ona dijagonala koja sadrži teme oštrog ugla.

Dokaz. Neka je $ABCD$ dati četvorougao, sa oštrim uglom γ i tupim uglovima α, β i δ, slika. Konstruišimo krug k nad prečnikom AC. Dokažimo da teme tupog ugla mora biti u krugu. Teme B, na primer, ne može biti na krugu, jer bi ugao β bio prav, kao ugao nad prečnikom AC. Ako bi tačka B bila van kruga, na slici tačka B_1, tada bi stranica AB_1 imala sa krugom zajedničku tačku, recimo tačku M. Tada bi ugao AMC bio spoljašnji ugao trougla B_1CM, pa bi važila nejednakosti $\sphericalangle AMC > \sphericalangle MB_1C$, odnosno $90^\circ > \beta$, jer je AMC ugao nad prečnikom. Ovo nije moguće, jer je β tup ugao i nije manji od pravog ugla. Dakle, tačka B nije na krugu i nije van kruga, pa mora biti u krugu. Iz istih razloga je i tačka D u krugu, pa je u krugu i duž BD. Zbog toga je duž BD manja od tetive koja je sadrži, na slici to je tetiva PQ. Dijagonala AC je prečnik kruga k, pa kao najduža tetiva, sigurno je veća od PQ, pa je veća i od BD.



Primer B). U pravom uglu s temenom A upisan je krug, koji dodiruje krake u tačkama B i C. Ako se konstruiše tangenta p na dati krug, tako da ona seče duži AB i AC u tačkama M i N, dokaži da je

$$\frac{1}{3}(AB + AC) < MB + NC < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

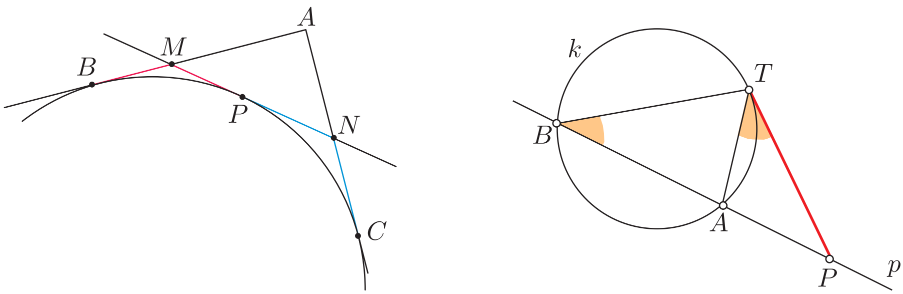
Dokaz. Označimo sa P dodirnu tačku tangente p, slika dole levo. Tada su jednaki parovi tangentnih duži: $MB = MP$ i $NC = NP$. Zbog toga je $MN = MP + PN$, odnosno $MN = BM + CN$. U trouglu AMN je $MN < AM + AN$. Ako saberemo dve poslednje relacije, dobićemo:

$$2MN < (AM + BM) + (AN + CN),$$

tj. $2MN < AB + AC$, ili

$$MN = BM + CN < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

S druge strane, MN je hipotenuza trougla AMN, pa je $MN > AM$ i $MN > AN$, odnosno $2MN > AM + AN$. Saberemo ovu nejednakost i jednakost $MN = BM + CN$ i dobijemo: $3MN > AB + AC$, odnosno $MN > \frac{1}{3}(AB + AC)$, pa je $\frac{1}{3}(AB + AC) < MB + NC$.

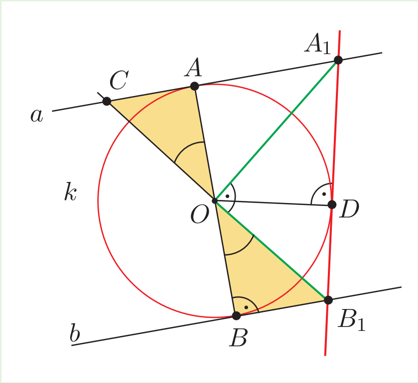


Primer C). Data je kružnica k, tačka P van kružnice i tangentna duž PT date kružnice. Ako proizvoljna sečica p kroz tačku P seče kružnicu u tačkama A i B, dokaži da je $PA \cdot PB = PT^2$.

Dokaz. Uglovi ATP i TBP su jednaki, kao tangentni i tetivni, poslednja slika. Trouglovi APT i TPB imaju još i zajednički ugao kod temena P, pa su slični. Otuda je $PT : PA = PB : PT$, odnosno $PA \cdot PB = PT^2$.

Budući da je sečica p izabrana proizvoljno, sledi da je za datu kružnicu i datu tačku P proizvod odsečaka $PA \cdot PB$ uvek isti, jednak PT^2. Ova konstanta naziva se potencijom tačke P u odnosu na krug k.

Primer D). Na krugu k sa centrom O dat je prečnik AB. Kroz tačke A i B konstruisane su tangente a i b kruga k. Na pravoj a izabrana je tačka A_1 i na pravoj b tačka B_1, tako da je $\sphericalangle A_1OB_1$ prav. Dokaži da je prava A_1B_1 tangenta kruga k.



Dokaz. Produžimo duž OB_1 preko O do tačke C na pravoj a, slika. Trouglovi AOC i BOB_1 podudarni su po stavu USU. (Jednaki unakrsni uglovi $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOB_1$ i jednaki pravi uglovi kod temena A i B i $OA = OB = r$.) Sledi da je $OC = OB_1$. Otuda su podudarni i pravougli trouglovi OA_1C i OA_1B_1. Dakle, $\sphericalangle OA_1C = \sphericalangle OA_1B_1$, pa je OA_1 simetrala ugla CA_1B_1. Zbog toga su jednake normale iz O na krake: $OA = OD = r$. Kako je $\sphericalangle D = 90^\circ$, sledi da je A_1MB_1 tangenta kruga k, što se i tvrdilo.

426. Ako je $2s$ obim i c hipotenuza pravouglog trougla, dokaži da je poluprečnik r upisanog kruga: $r = s - c$.

427. Dokaži da je u pravouglom trouglu zbir kateta jednak zbiru prečnika opisanog i upisanog kruga.

428. Data su dva kruga k_1 i k_2, koji se dodiruju iznutra. Ako su O_1 i O_2 centri datih krugova, a M centar proizvoljnog kruga koji dodiruje k_1 i k_2, dokaži da zbir $O_1M + O_2M$ ima konstantnu vrednost.

429. Dat je krug k i njegove tangente a, b i c. Pri tome su prave a i b paralelne, a prava c seče a i b u tačkama A i B. Dokaži da krug prečnika AB prolazi kroz centar datog kruga.

430. Dat je krug k sa centrom O i njegova tangenta a, koja ga dodiruje u tački A. U proizvoljnim tačkama D i E datog kruga konstruisane su tangente b i c, koje seku tangentu a u tačkama B i C. Dokaži da su uglovi BOC i DAE jednaki ili suplementni.

431. Produženi krakovi BC i AD trapeza $ABCD$ seku se u tački E. Dokaži da se opisani krugovi trouglova ABE i CDE dodiruju.

432. Data su dva kruga koji se dodiruju spolja u tački A. Jedna zajednička tangenta dodiruje date krugove u tačkama B i C. Dokaži da je ugao BAC prav.

433. Dat je polukrug prečnika AB i njegova tangenta p. Ako su A_1 i B_1 podnožja normala iz A i B na p, dokaži da je $AA_1 + BB_1 = AB$.

434. U tački T datog kruga postavljene su tangenta i tetiva. Iz središta jednog od lukova određenih tetivom, postavljene su normale na tetivu i tangentu. Dokaži da su ove normale jednake.

435. Nad prečnikom AB dat je polukrug k sa centrom O. Neka su C i D tačke duži AB, takve da je $AC = BD$, a E i F tačke polukruga, takve da je $CE \| DF$. Dokaži da su duži CE i DF normalne na EF.

436. Krugovi k_1 i k_2 dodiruju se spolja u tački A. Neka je p prava koja sadrži tačku A i seče date krugove još u tačkama M i N. Dokaži da su tangente datih krugova, kojima su M i N dodirne tačke, paralelne među sobom.

437. Dat je polukrug nad prečnikom AB. Ako je S proizvoljna tačka polukruga i k krug kojem je tačka S centar, a prava AB tangenta, dokaži da su tangente kruga k, povučene iz A i B, paralelne među sobom.

438. Date su dve kružnice sa zajedničkim tačkama A i B. Ako se kroz tačku A konstruiše proizvoljna sečica, koja date kružnice seče još i u tačkama C i D, i u tačkama C i D se postave tangente na date kružnice, dokaži da veličina ugla pod kojim se seku ove dve tangente ne zavisi od izbora sečice kroz tačku A.

439. Nad stranicom AB kvadrata $ABCD$ kao prečnikom, konstruisan je polukrug k. Zatim je konstruisan luk AC sa centrom B. Proizvoljan poluprečnik BL luka AC seče polukrug k u tački M. Ako je N podnožje normale iz L na AD, dokaži da je $LM = LN$.

440. Tri kruga sa centrima A, B, C, dodiruju se spolja u tačkama M, N, P. Dokaži da je upisani krug trougla ABC istovremeno opisan oko trougla MNP.

441. Dati su krugovi k i k_1 koji se dodiruju spolja u tački D. Dve proizvoljne sečice kroz D seku date krugove u tačkama A i A_1, odnosno B i B_1. Dokaži da su tetive AB i A_1B_1 paralelne.

442. Dati su krugovi k i k_1 sa poluprečnicima OA i O_1A_1, koji su paralelni među sobom. Prava AA_1 određuje na krugu k tetivu AB. U tačkama B i A_1 postavljene su tangente na date krugove. Ako je C presečna tačka ovih tangenti, dokaži da je $BC = A_1C$.

443. U pravouglom trouglu ABC konstruisana je hipotenuzina visina CD. Dokaži da je zbir poluprečnika krugova upisanih u trouglove ABC, ADC i BDC jednak visini CD.

444. U krug je upisan jednakostranični trougao ABC. Ako je M proizvoljna tačka onog luka BC, kojem ne pripada tačka A, dokaži da je $AM = BM + CM$.

445. Kroz teme A datog oštrog ugla i datu tačku S na simetrali tog ugla konstruisan je neki krug k. Dokaži da zbir tetiva, koje krug k odseca na kracima datog oštrog ugla ne zavisi od izbora kruga k.

5.3. Tetivni i tangentni četvorougao

Četvorougao oko kojeg se može opisati kružnica naziva se *tetivnim*. (Opisana kružnica prolazi kroz sva četiri temena četvorougla.)

Četvorougao u koji se može upisati krug naziva se *tangentnim*.

Iz poznatih osobina uglova kruga i osobina tangentnih duži proizlaze osobine tetivnih i tangentnih četvorouglova.

– Četvorougao je tetivni ako i samo ako su mu naspramni uglovi suplementni.

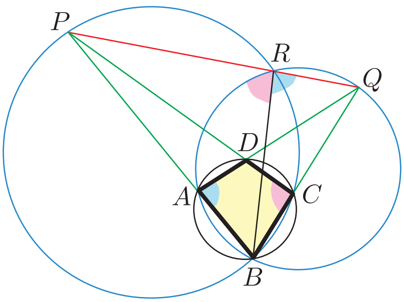
– Četvorougao $ABCD$ je tetivni ako i samo ako je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

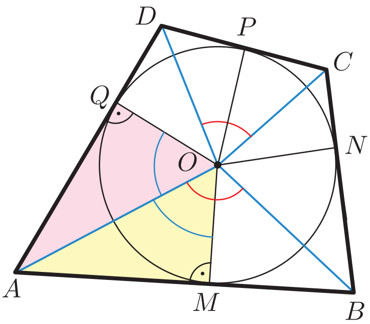
– Spoljašnji ugao tetivnog četvorougla jednak je unutrašnjem uglu kod naspramnog temena.

– Konveksni četvorougao je tangentni ako i samo ako mu je zbir dveju naspramnih stranica jednak zbiru drugih dveju stranica.

Primer A). Dat je tetivni četvorougao $ABCD$. Prave AB i CD seku se u tački P, a prave BC i AD seku se u tački Q. Opisani krugovi trouglova PBC i QAB imaju zajedničke tačke B i R. Dokaži da tačke P, Q i R pripadaju jednoj pravoj.

Dokaz. Uglovi PRB i PCB jednaki su, kao uglovi nad istim lukom $\widehat{PB}$. Takođe su jednaki uglovi BRQ i BAQ, sledeća slika levo. Uglovi BCP i BAQ su suplementni, kao naspramni uglovi tetivnog četvorougla $ABCD$, pa je zbog toga $\sphericalangle PRB + \sphericalangle BRQ = 180°$. Time je tvrđenje dokazano.

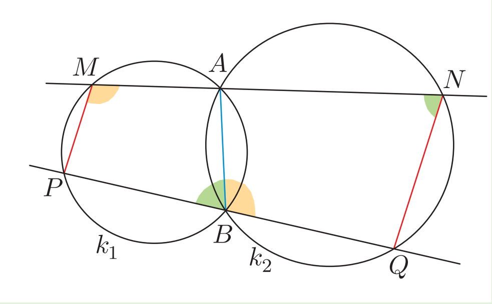




Primer B). Dat je tangentni četvorougao $ABCD$, kome je O centar upisanog kruga. Dokaži da je $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180^\circ$.

Dokaz. Neka su M, N, P, Q, redom podnožja normala iz O na stranice AB, BC, CD, DA. Tada je $OM = ON = OP = OQ$, jer su to poluprečnici upisanog kruga, slika gore desno. Nije teško dokazati da su trouglovi AOM i AOQ podudarni, odakle sledi da je AO simetrala ugla MOQ. Slično se dokaže da su prave BO, CO, DO simetrale uglova MON, NOP, POQ, pa je $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \frac{1}{2}(\sphericalangle QOM + \sphericalangle MON + \sphericalangle NOP + \sphericalangle POQ)$, odakle je $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

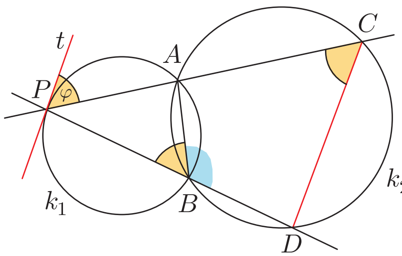
Primer C). Krugovi k_1 i k_2 seku se u tačkama A i B. Proizvoljna sečica kroz A seče krugove k_1 i k_2 u tačkama M i N, a proizvoljna sečica kroz B u tačkama P i Q. Dokaži da su tetive MP i NQ paralelne.

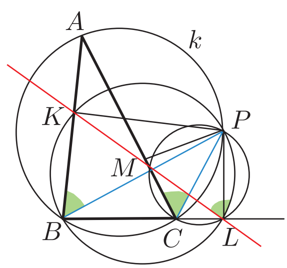


Dokaz. Neka su tačke M, N, P, Q raspoređene kao na slici desno. U tetivnom četvorouglu $ABPM$ za naspramne uglove važi: $\sphericalangle AMP + \sphericalangle ABP = 180^\circ$. Kako je $\sphericalangle ABP + \sphericalangle ABQ = 180^\circ$ (uporedni uglovi), to je $\sphericalangle AMP = \sphericalangle ABQ$. Međutim, u tetivnom četvorouglu $ABQN$ je $\sphericalangle ABQ + \sphericalangle ANQ = 180^\circ$, pa je i $\sphericalangle AMP + \sphericalangle ANQ = 180^\circ$. Odatle sledi da je $MP \| NQ$.

Primer D). Dva kruga, k_1 i k_2, seku se u tačkama A i B. Kroz ma koju tačku P onog luka kruga k_1, koji je van kruga k_2, povučene su prave PA i PB, koje seku k_2 u tačkama C i D. Dokaži da je tangenta kruga k_1 u tački P paralelna pravoj CD.

Dokaz. Ugao φ, kojeg tangenta određuje sa tetivom PA, jednak je odgovarajućem tetivnom uglu ABP. Ugao ABP je suplementan uglu ABD, slika dole levo, a istom uglu je suplementan i ugao ACD (naspramni ugao tetivnog četvorougla). Otuda sledi zaključak da je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABP = \varphi$. Uglovi ACD i φ imaju zajednički krak CP i jednaki su, pa su im druga dv kraka paralelna. Sledi da je tetiva CD paralelna tangenti t.





Primer E). Dokaži da podnožja normala iz ma koje tačke opisanog kruga trougla na stranice trougla, pripadaju jednoj pravoj.

Dokaz. Neka su K, L, M podnožja normala iz tačke P opisanog kruga k na prave AB, BC, CA, slika gore desno. Četvorouglovi $PKBL$ i $PMCL$ imaju po dva prava naspramna ugla, pa su tetivni, tj. oko njih se mogu opisati krugovi. Tada je: $\sphericalangle PLM = \sphericalangle PCM = \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PBK = \sphericalangle PLK$, t.j. $\sphericalangle PLM = \sphericalangle PLK$, pa tačka K pripada pravoj LM.

446. Dat je četvorougao $ABCD$. Neka su k_1, k_2, k_3, k_4 krugovi, od kojih svaki dodiruje jednu stranicu i dva produžetka susednih stranica datog četvorougla. Dokaži da centri ovih krugova pripadaju jednom krugu.

447. Dokaži da simetrala duži čiji su krajevi podnožja dveju visina trougla, polovi treću stranicu.

448. Na polupravoj MX uzete su redom tačke A, B, C, tako da je $MB = 2MA$ i $MC = 3MA$. U tački A je konstruisana normala na polupravu MX i na toj normali je izabrana tačka P, takva da je $AP = MA$. Neka je H podnožje normale iz B na PC. Dokaži da je:

a) četvorougao $ABHP$ tetivan;

b) prava MP tangenta na krug opisan oko četvorougla $ABHP$.

449. Dokaži: u pravouglom trouglu ABC teme A pravog ugla, podnožje visine AD i središta stranica, predstavljaju pet tačaka jednog kruga.

450. Dat je trougao ABC kod kojeg je ugao CAB jednak $60°$. Ako je M središte stranice BC, a B_1 i C_1 podnožja visina iz temena B i C, dokaži da je trougao MB_1C_1 jednakostraničan.

451. Ako je četvorougao $ABCD$ paralelogram i E tačka takva da je $AE \perp AB$ i $BC \perp EC$, dokaži da važi jedna od dve jednakosti: $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$ ili je $\sphericalangle AED + \sphericalangle BEC = 180°$.

452. Zajedničke spoljašnje tangente t_1 i t_2 krugova k_1 i k_2 sa centrima S_1 i S_2, seku zajedničke unutrašnje tangente u tačkama A, B, C, D. Dokaži da krug prečnika S_1S_2 prolazi kroz tačke A, B, C, D.

453. Dat je trougao ABC i krug k koji sadrži tačke A i B i seče stranice AC i BC u tačkama M i N. Dokaži da je tetiva MN paralelna tangenti t opisanog kruga datog trougla, povučenoj u temenu C.

454. Oko datog trougla opisan je krug. Dokaži da su poluprečnici ovog kruga, povučeni do temena trougla, normalni na dužima čiji su krajevi po dva podnožja visina trougla.

455. Dat je trougao ABC i tačka D na stranici BC. Neka su k_1 i k_2 krugovi koji sadrže tačku D, takvi da k_1 dodiruje pravu AB u tački B, a k_2 dodiruje pravu AC u tački C. Dokaži da druga zajednička tačka krugova k_1 i k_2 pripada opisanom krugu datog trougla.

456. Na krugu k sa centrom S date su tačke A i B. Kroz središte C luka AB konstruiši dve proizvoljne sečice koje seku tetivu AB u tačkama D i E, a krug k u tačkama F i G. Dokaži da je četvorougao $DEGF$ tetivni.

457. Neka je P proizvoljna tačka na manjem luku AB kruga opisanog oko pravougaonika $ABCD$, a L i M podnožja normala iz P na dijagonale AC i BD. Dokaži da dužina duži LM ne zavisi od položaja tačke P na manjem luku AB.

458. Središta stranica BC, CA, AB trougla ABC su redom tačke A_1, B_1, C_1. Dokaži da krugovi opisani oko trouglova AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 prolaze kroz centar kruga opisanog oko datog trougla ABC.

459. Ako su M, N, P proizvoljne tačke na stranicama BC, CA, AB trougla ABC, dokaži da opisani krugovi trouglova ANP, BMP i CMN imaju zajedničku tačku.

460. Neka su M, N, P proizvoljne tačke na stranicama BC, CA, AB trougla ABC i a, b, c tri paralelne prave koje sadrže po jedno teme datog trougla. Krugovi opisani oko trouglova ANP, BMP, CMN seku ove prave u tačkama A_1, B_1, C_1. Dokaži da zajednička tačka O ovih triju krugova i tačke A_1, B_1, C_1 pripadaju jednoj pravoj.

461. Date su četiri prave, takve da se svake dve seku, određujući pri tome četiri trougla. Dokaži da opisani krugovi oko ova četiri trougla imaju zajedničku tačku.

462. Ako je četvorougao $ABCD$ takav, da se krugovi k_1 i k_2, upisani u trouglove ABC i ACD dodiruju, dokaži da postoji krug k upisan u četvorougao $ABCD$. (Krug k dodiruje sve četiri stranice datog četvorougla.)

463. Na stranicama BC, CA, AB trougla ABC date su tačke M, N, P, takve da je M središte stranice BC, N središte stranice CA i P podnožje visine h_c. Simetrala ugla BAC, koji iznosi 50°, seče pravu MN u tački Q. Izračunaj uglove QPC i AQP.

464. U trouglu ABC tačke M i N su središta stranica BC i CA. Neka je S centar i duž SP poluprečnik upisanog kruga datog trougla, $P \in AC$. Ako je R presečna tačka pravih BS i MN, dokaži da je $\sphericalangle PCR = \sphericalangle PSR$.

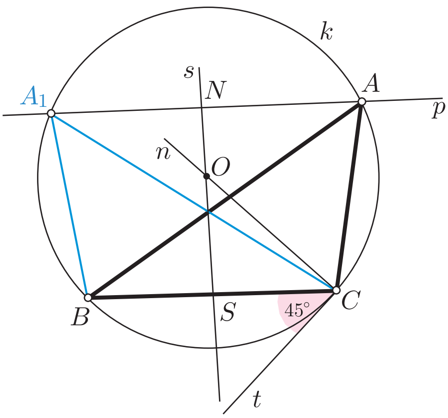
465. Neka su D i E tačke u kojima upisani krug k trougla ABC dodiruje stranice AC i BC. Ako je O centar tog kruga i tačka F presek pravih DE i AO, koliki je ugao AFB?

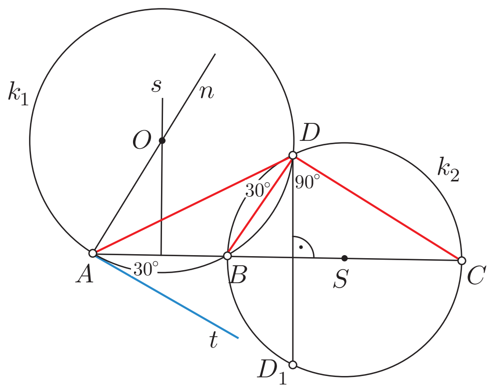
5.4. Konstruktivni zadaci o krugu

> Temeljna analiza kojom otkrivamo veze između datih i traženih elemenata predstavlja više od polovine rešenja zadatka.
>
> Pored osobina tetiva, tangenti, centralnih i periferijskih uglova, treba znati osobine tangentnih i tetivnih četvorouglova. Treba takođe imati na umu osobine simetrale duži i simetrale ugla.

Primer A). Konstruiši trougao ABC, tako da mu je stranica $a = BC = 3$ cm, ugao $\alpha = 45^\circ$ i visina $h_a = 2,5$ cm.

Rešenje. Konstruišemo najpre duž $BC = 3$ cm. Treće teme A treba odrediti da bude $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Koristićemo odnos između tangentnog i tetivnog ugla u odnosu na tetivu BC. Postupamo ovako: konstruišemo polupravu Ct, koja sa BC gradi ugao od 45°, leva slika. Zatim, konstruišemo polupravu Cn, normalnu na Ct, pa simetralu s duži BC. Simetrala s i normala Cn seku se u tački O, koja predstavlja centar kružnice k. Sada su svi periferijski uglovi iznad tetive BC jednaki 45°. Zatim, na simetrali s odredimo tačku N, tako da je $SN = 2,5\,\text{cm} = h_a$. Prava p kroz N, paralelna sa BC, seče kružnicu k u tačkama A i A_1. Imamo dva podudarna rešenja zadatka, trouglove ABC i A_1CB.

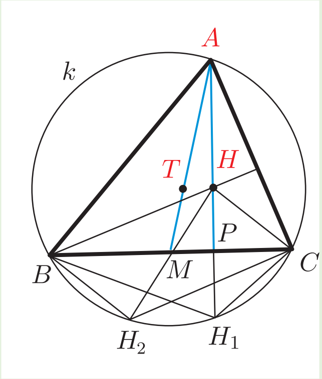




Primer B). Date su kolinearne tačke A, B, C, tim redom. Konstruiši tačku D, tako da bude $\sphericalangle ADB = 30^\circ$ i $\sphericalangle BDC = 90^\circ$.

Rešenje. Kao u prethodnom primeru, konstruišemo luk k_1 kome odgovaraju periferijski uglovi od 30° nad tetivom AB. Kako je $\sphericalangle BDC = 90^\circ$, tačku D nalazimo na polukrugu k_2 prečnika BC. (Ugao nad prečnikom je prav.) Tražena tačka D je presek lukova k_1 i k_2, slika gore desno. Ima još jedno rešenje, tačka D_1, koja je simetrična sa D u odnosu na pravu AB.

Primer C). Date su nekolinearne tačke A, H i T. Konstruiši trougao ABC, tako da tačka H bude njegov ortocentar, a tačka T težište.



Rešenje. Analiza. Neka je ABC trougao sa tačkama H i T kao što je traženo, i k opisani krug ovog trougla, kao na slici. Označimo sa M središte duži BC, a sa H_1 i H_2 redom tačke simetrične sa H u odnosu na pravu BC i tačku M. Neka je P podnožje visine iz temena A. Iz podudarnih trouglova BPH i BPH_1 ($BP = BP$, $PH = PH_1$) sledi da je $\sphericalangle CBH_1 = \sphericalangle CBH$. Kako je $\sphericalangle CBH = \sphericalangle CAH_1$ (sa normalnim kracima), to je $\sphericalangle CBH_1 = \sphericalangle CAH_1$. Sledi da je tačka H_1 na krugu k. Sada se lako dokazuje podudarnost trouglova BCH i BCH_1. Sem toga, četvorougao $BHCH_2$ je paralelogram (dijagonale se polove), pa je trougao CBH_2 podudaran trouglu BCH (polovine paralelograma). Samim tim, podudarni su trouglovi BCH_1 i CBH_2, odakle sledi: $\sphericalangle BH_1C = \sphericalangle BH_2C$. Dakle, i tačka H_2 je na krugu k.

Konstrukcija. Iza T u odnosu na A konstruišemo tačku M, tako da je $TM = \frac{1}{2}AT$, Zatim, konstruišemo pravu AH i iz M pravu a, normalnu na AH. Tako dobijemo podnožje P normale iz A na pravu a. Onda konstruišemo tačke H_1 i H_2, onako kako je opisano u analizi. Krug k opisan oko trougla AH_1H_2, seče pravu a u tačkama B i C.

466. Neka su A_1 i B_1 podnožja visina iz temena A i B trougla ABC. Konstruiši trougao ABC ako su date dužine duži: $AB = 5$ cm, $A_1B = 3$ cm i $A_1B_1 = 2$ cm.

467. Data je prava p i sa iste strane date prave tačke A_1 i B_1. Konstruiši trougao ABC tako da mu stranica AB pripada pravoj p, a tačke A_1 i B_1 su podnožja visina h_a i h_b.

468. Konstruiši trougao ABC, ako mu je data stranica $AB = 4$ cm, ugao $\gamma = 75^\circ$ i težišna linija $t_c = 25$ mm.

469. Konstruiši trougao ABC koji ima unutrašnji ugao $\beta = 60^\circ$ i težišne linije $t_a = 4,5$ cm i $t_b = 36$ mm.

470. Data je kružnica k, tačka M na kružnici i prava p. Konstruiši krug koji dodiruje pravu p i kružnicu k dodiruje u datoj tački.

471. Date su prave a i b i na pravoj a tačka A. Konstruiši krug k koji dodiruje obe date prave, i to pravu a u datoj tački A.

472. Konstruiši kvadrat $ABCD$, ako mu je dato teme A, proizvoljna tačka M stranice BC i proizvoljna tačka N stranice CD.

473. Date su tačke M i N u datom krugu k. Konstruiši tačku P na periferiji kruga, tako da dve tetive povučene iz P kroz tačke M i N, seku periferiju kruga k u dijametralno suprotnim tačkama.

474. U ravni su date tačke A, B, C i D. Konstruiši kružnicu k koja prolazi kroz tačke A i B, tako da su jednake tangentne duži te kružnice, koje su povučene iz tačaka C i D.

475. Dat je trougao ABC. Konstruiši tri kruga čiji su centri tačke A, B i C, tako da svaki od njih dodiruje ostala dva.

476. Data je prava a, tačka A na pravoj a i tačka B van prave a. Konstruiši tačke C i D na pravoj a, tako da je $AC = AD$ i $\sphericalangle CBD = 60^\circ$.

477. Konstruiši trougao ABC ako mu je stranica $a = 4,5$ cm, ugao $\alpha = 60^\circ$, a stranica AB je dva puta duža od stranice AC.

478. U datom krugu k data su dva poluprečnika, OA i OB. Konstruši tetivu koju ova dva poluprečnika dele na tri jednaka dela.

479. Date su paralelne prave a i b, tačka M na pravoj a i tačka P van datih pravih. Konstruiši pravu p kroz tačku P, tako da ona seče prave a i b u tačkama A i B i da je pritom $MA = MB$.

480. Na datoj kružnici k date su tačke A, B i C. Odredi tačku D na kružnici k, takvu da se u četvorougao $ABCD$ može upisati krug.

481. Date su nekolinearne tačke D, E i S. Konstruiši trougao ABC kojem je CD visina, a prava CE simetrala ugla, pri čemu je E tačke stranica AB i S centar opisanog kruga.

482. Podudarne kružnice k_1 i k_2 se dodiruju. Konstruiši pravu koja seče kružnice, tako da presečne tačke određuju na pravoj p tri jednake duži.

483. Date su dve podudarne kružnice k_1 i k_2, koje nemaju zajedničkih tačaka. Konstruiši pravu p koja seče ove dve kružnice u tačkama A, B, C i D, tako da je $AB = BC = CD$.

484. Na jednoj pravoj date su tačke A, B, C i D, tim redom. Kroz ove tačke treba konstruisati prave na a, b, c, d, tako da je prava a paralelna sa b i prava c paralelna sa d i da one u presecima određuju jedan kvadrat.

485. Na kraku Op datog ugla Opq date su tačke A i B. Konstruiši tačku C na kraku Oq, tako da ugao ACB bude najveći.

Glava 6

MERENJE RAVNIH FIGURA

- Obim i površine mnogouglova
- Dužine i površine delova kruga
- Problemi sa površinama

Merenje ravnih figura

6.1. Obim i površine mnogouglova

Za uspešno izračunavanje površina mnogouglova potrebno je dobro uvežbati osobine koje su posledice podudarnosti i sličnosti figura. Neophodne formule takođe treba imati u glavi. Podsećamo da ćemo se često susretati sa pravouglim trouglovima čiji su oštri uglovi 45°, 30° i 60°. Uopšte, pravi uglovi i Pitagorina teorema su neizbežni, jer površine (kasnije i zapremine) podrazumevaju izračunavanje visina, a visine su normalne na osnove.

Pored uobičajenih formula zapamtite i sledeće, koje se odnose na trougao.

$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ (poluobim trougla)

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Heronov obrazac za površinu trougla)

$r = \dfrac{P}{s}$ (poluprečnik upisanog kruga)

$R = \dfrac{abc}{4P}$ (poluprečnik opisanog kruga)

Specijalno za pravougli trougao, još i:

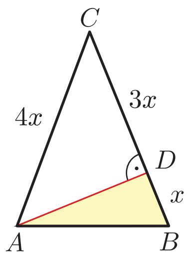
$r = s - c$ i $R = \dfrac{c}{2}$

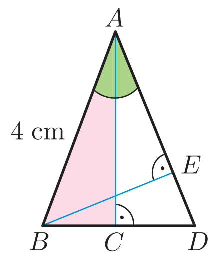
Za jednakostranični trougao:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Primer A). Dat je jednakokraki trougao ABC sa osnovicom $AB = 48$ cm. Visina AD, povučena na krak BC, deli površinu datog trougla u odnosu $1:3$. Odredi površinu trougla ABD.

Rešenje. Visina AD je zajednička za trouglove ABD i ABC, pa kako se površine trouglova ABD i ACD odnose kao $1:3$, sledi da je $BD : CD = 1 : 3$. Neka je $BD = x$, slika levo. Tada je $CD = 3x$ i $AC = 4x$. Primenjujući Pitagorinu teoremu na trouglove ABD i ACD dobijamo: $48^2 - x^2 = AD^2 = (4x)^2 - (3x)^2$. Odavde je $x^2 = 2 \cdot 12^2$, pa je $x = 12\sqrt{2}$. Sada je $AD^2 = 48^2 - x^2 = 14 \cdot 12^2$, pa je $AD = 12\sqrt{14}$ cm. Tražena površina trougla ABD je $P = \dfrac{1}{2}BD \cdot AD = 144\sqrt{7}$ cm^2.





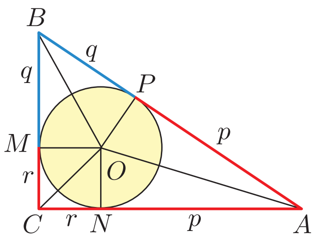
Primer B). Izračunaj površinu pravouglog trougla kome je hipotenuza dužine $c = 4$ cm, a oštri uglovi se odnose kao $3 : 1$.

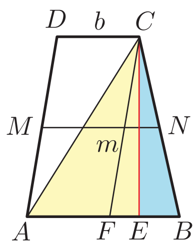
Rešenje. Vidi rešenje **zadatka 344**. Manji ugao ovog trougla je $22°30'$. Na slici gore desno odredili smo tačku D, tako da je $CD = BC$. Onda je trougao ADC podudaran trouglu ABC, pa je $\sphericalangle BAD = 45°$ i $BE = \dfrac{1}{2}AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm. Tražena površina je
$P = \dfrac{1}{2}P_{ABD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}AD \cdot BE = 2\sqrt{2}$ cm^2.

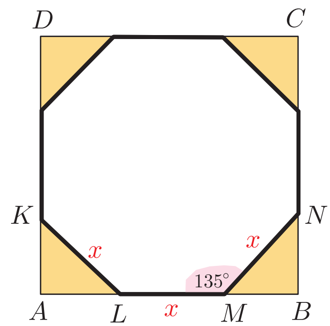
Primer C). Dokaži da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsečaka na koje dodirna tačka upisanog kruga deli hipotenuzu.

Rešenje. Vidi rešenje **primera D)** iz **odeljka 3.3**. Prema sledećoj slici levo je: $a = r + q$, $b = r + p$ i $c = q + p$, pa je: $P_{ABC} = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{(r+q)(r+p)}{2} = \dfrac{1}{2}(r^2 + pr + qr + pq)$. Međutim, vidimo da je $P_{ABC} = P_{ANOP} + P_{BMOP} + P_{CMON} = pr + qr + r^2$. Zamenom u prethodnu jednakost dobijamo: $2P = P + pq$, odakle je $P = pq$.

Primer D). Zbir dijagonala romba je 8 cm, a površina je 7 cm^2. Koliki je obim romba?







Rešenje. Dijagonale dele romb na četiri pravougla trougla kojima su katete $\dfrac{d_1}{2}$ i $\dfrac{d_2}{2}$, a hipotenuza je stranica a romba. Primenimo Pitagorinu teoremu: $\left(\dfrac{1}{2}d_1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}d_2\right)^2=a^2$, a odavde je $d_1^2+d_2^2=4a^2$. Iz površine: $\dfrac{1}{2}d_1\cdot d_2=7$, nalazimo da je $d_1\cdot d_2=14$. Zatim, iz datog uslova $d_1+d_2=8$, kvadriranjem dobijamo: $d_1^2+2d_1d_2+d_2^2=64$. Zamenimo iz prethodnih jednakosti $d_1^2+d_2^2$ i d_1d_2 i biće: $4a^2+28=64$. Odavde je $a=3$ cm, pa je obim 12 cm.

Primer E). U jednakokrakom trapezu srednja linija je dužine m, a dijagonala je dva puta duža od nje. Kolika je površina trapeza?

Rešenje. Neka je $ABCD$ dati trapez i neka su M i N krajnje tačke njegove srednje linije, slika u sredini. Znamo da je srednja linija jednaka poluzbiru osnovica: $MN=\dfrac{a+b}{2}=m$. Visina trapeza je $CE=\sqrt{AC^2-AE^2}$. Kako je $AC=2m$ i $AE=a-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b}{2}=m$, to je visina trapeza $CE=\sqrt{4m^2-m^2}=m\sqrt{3}$. Površina je:
$P=MN\cdot CE=m^2\sqrt{3}$.

Primer F). Od kvadrata ivice a cm odrezani su uglovi, tako da je preostala figura pravilni osmougao. Izračunaj površinu tog osmougla.

Rešenje. Ugao pravilnog osmougla je $135°$, pa su trouglovi ALK i BNM jednakokraki pravougli, poslednja slika desno. Ako je $LM = x$ stranica osmougla, onda je $AL = MB = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$. Otuda dobijamo jednakost: $AL + LM + MB = AB$, ili $x\sqrt{2} + x = a$, pa je $x(\sqrt{2}+1) = a$. Pomnožimo ovu jednakost sa $(\sqrt{2}-1)$ i dobijemo $x = a(\sqrt{2}-1)$ cm. Površinu osmougla dobićemo kad od površine kvadrata $ABCD$ oduzmemo površine četiri mala jednakokraka pravougla trougla. Od ova četiri trougla možemo načiniti kvadrat stranice x.

Dakle: $P = a^2 - x^2 = a^2 - a^2(\sqrt{2}-1)^2 = 2a^2(\sqrt{2}-1)$ cm^2.

486. U pravouglom trouglu čija je hipotenuza $AB = 20$ cm iz središta S hipotenuze povučena je normala na hipotenuzu, do preseka N sa dužom katetom. Dužina duži CN je 3,5 cm. Izračunaj površinu tog pravouglog trougla.

487. Katete pravouglog trougla su 30 cm i 40 cm. Tačka M tog trougla udaljena je 5 cm od svake katete. Izračunaj udaljenost tačke M od hipotenuze.

488. U trouglu ABC je $AC+BC = 2AB$. Dokaži da je prava, određena težištem i centrom upisanog kruga tog trougla, paralelna sa AB.

489. Izračunaj površinu jednakokrakog trougla, ako je visina koja odgovara osnovici 20 cm, a visina koja odgovara kraku 24 cm.

490. Simetrala ugla na osnovici jednakokrakog trougla deli naspramni krak na odsečke dužina 6 cm i 9 cm. Izračunaj površinu trougla.

491. Na stranicama AC i BC jednakokrakog trougla ABC, kome je $AB = AC = 5$ cm i $BC = 6$ cm, odabrane su tačke D i E redom, tako da je $AD = CE = 2$ cm. Duži AE i BD seku se u tački S. Izračunaj površinu trougla ABS.

492. Pravougli trougao ima katete dužina 60 cm i 80 cm. Neka su M i N središta ovih kateta. Kružnica prečnika MN seče hipotenuzu u tačkama P i Q. Izračunaj dužinu duži PQ.

493. Ortocentar H trougla ABC deli visinu AD, tako da važi proporcija $AH : HD = 1 : 1$ i visinu BE tako da je $BH : HE = 2 : 1$. Izračunaj razmeru $CH : HF$, u kojoj ortocentar deli treću visinu trougla.

494. Stranice romboida su 7 cm i 4 cm. Odredi odnos površina delova na koje je romboid podeljen simetralom jednog svog unutrašnjeg ugla.

495. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ dijagonale imaju dužine 1 m i 2 m. Duži koje spajaju središta naspramnih stranica četvorougla jednake su među sobom. Izračunaj površinu četvorougla $ABCD$.

496. Tačka M je središte stranice CD, a tačka N je središte stranice DA paralelograma $ABCD$. Prave AM i BN seku se u tački P. Koji deo površine paralelograma čini površina trougla ANP?

497. U jednakokrakom trouglu ABC osnovica je $AB = 12$ cm i odgovarajuća visina $CD = 8$ cm. Nad krakom AC, kao prečnikom, konstruisan je polukrug. Presečne tačke polukruga sa osnovicom AB i krakom BC su tačke D i E. Izračunaj površinu četvorougla $ADEC$.

498. Van kvadrata $ABCD$, nad svakom stranicom, konstruisani su jednakostranični trouglovi ABE, BCF, CDG i DAH. Dokaži da je četvorougao $EFGH$ kvadrat i izračunaj njegovu površinu, ako je stranica datog kvadrata dužine a cm.

499. Ako svaka dijagonala konveksnog četvorougla polovi njegovu površinu, dokaži da je taj četvorougao paralelogram.

500. Trapez ima dijagonale dužina 6 cm. Izračunaj površinu trapeza ako se dijagonale seku pod pravim uglom.

501. Dijagonale trapeza su 25 cm i 26 cm, a visina mu je 24 cm. Kolika je površina tog trapeza?

502. U jednakokrakom trapezu s krakom d osnovice stoje u razmeri $2 : 1$. Ugao na većoj osnovici je 75°. Izračunaj površinu trapeza.

503. Površina jednakokrakog trapeza jednaka je kvadratu srednje linije. Izračunaj rastojanje presečne tačke dijagonala od veće osnovice trapeza, ako je dužina veće osnovice a cm.

504. Dijagonale trapeza $ABCD$, čije su dužine $AC = 20$ cm i $BD = 15$ cm, seku se pod pravim uglom. Izračunaj površinu trapeza. Ako je kraća osnovica $CD = 4$ cm, koliki je obim trapeza?

505. Dat je pravougli trapez $ABCD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$. Tačka E pripada kraku AD, pri čemu je $\sphericalangle CEB = 90^\circ$. Izračunaj površinu i obim trapeza, ako je $CD = 3$ cm, $DE = 4$ cm i $AD = 11\frac{1}{5}$ cm.

6.2. Dužine i površine delova kruga

Pozabavićemo se izračunavanjem površina i obima kruga i njegovih delova.

$P = r^2\pi$ (površina kruga) $O = 2r\pi$ (obim kruga)

Broj π možemo ostaviti u obliku slova, a ako se insistira na brojnoj vrednosti, onda ćemo ga najčešće zameniti približno sa $\pi = 3,14$ ili sa $\pi = \frac{22}{7}$. Inače, π je iracionalni broj, pa ima beskonačno mnogo neperiodičnih decimala. Čitaocima preporučujemo da ovaj broj zapamte sa pet decimala pomoću rečenice:

"Eto, i broj π možeš zapamtiti"

(Svaka reč svojim brojem slova predstavlja jednu cifru, pa imamo: $\pi = 3,14159$.)

Podsetimo se još na formule:

$l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ (dužina kružnog luka)

$P_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ (površina kružnog isečka)

$P_i = \frac{r \cdot l}{2}$ (površina kružnog isečka)

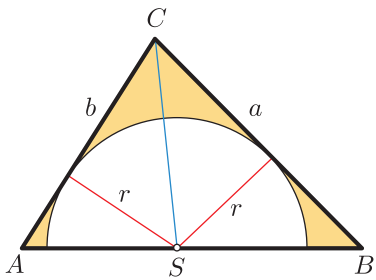
$P_o = P_i - P_\triangle$ (površina kružnog odsečka)

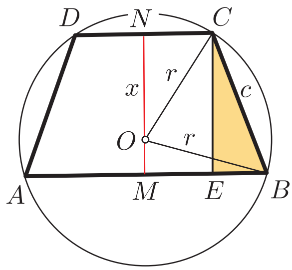
Podnožje normale iz centra kruga na tetivu predstavlja središte tetive, pa ako sa d označimo centralno rastojanje, a sa $2t$ dužinu tetive, imamo jednakost: $d^2 + t^2 = r^2$.

Formula $r = \frac{P}{s}$ za izračunavanje poluprečnika kruga upisanog u trouglu, koristi se i za ostale mnogouglove, koji imaju upisani krug. Odatle dobijamo površinu P opisanog mnogougla: $P = r \cdot s$.

Primer A). Dat je trougao sa stranicama: $a = 13$ cm, $b = 15$ cm i $c = 14$ cm. U trougao je upisan polukrug sa centrom na stranici c, koji dodiruje druge dve stranice. Izračunaj poluprečnik ovog polukruga i površinu dela trougla van polukruga.

Rešenje. Površinu datog trougla izračunamo, na primer koristeći Heronov obrazac (ili na neki drugi način) $P = 84$ cm^2. Neka je S centar polukruga, sledeća slika levo. Uočimo da duž CS deli dati trougao na trouglove ACS i BCS, čije površine izrazimo preko poluprečnika polukruga i na taj način izračunamo poluprečnik: $P_{ACS} + P_{BCS} = P_{ABC}$, odnosno: $\frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r = 84$. Odavde je $14r = 84$, pa je $r = 6$. Površina dela trougla, koja se traži, iznosi: $P = 84 - \frac{1}{2}r^2\pi = (84 - 18\pi)$ cm^2. To je približno 27,5 cm^2.





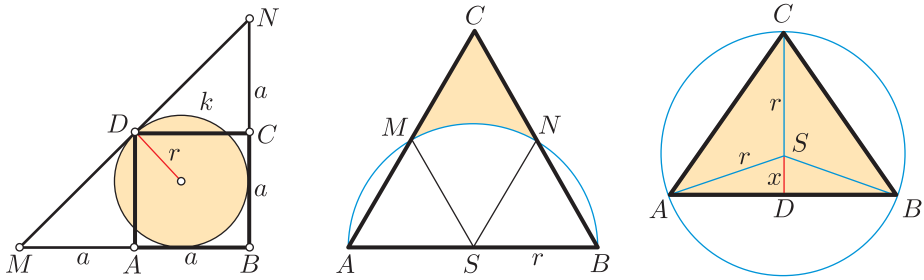
Primer B). Dat je jednakokraki trapez sa osnovicama $a = 24$ cm, $b = 10$ cm i krakom $c = 13\sqrt{2}$ cm. Izračunaj površinu kruga opisanog oko datog trapeza.

Rešenje. Neka su M i N središta osnovica AB i CD i O centar opisanog kruga, slika gore desno. Najpre iz pravouglog trougla BCE izračunamo visinu trapeza: $CE = 17\,\text{cm} = MN$. Neka je $ON = x$. Tada je $OM = 17 - x$ ili $OM = 17 + x$, zavisno od toga da li je O u trapezu, ili van trapeza. Možemo se uveriti da je ovde drugi slučaj nemoguć, pa poluprečnik r kruga izračunavamo, pošto prvo nađemo x iz jednačine: $x^2 + 5^2 = r^2 = (17 - x)^2 + 12^2$. Odavde je $x = 12$ cm, pa na kraju dobijemo $r = 13$ cm. Površina kruga je $P = 169\pi$ cm^2.

Primer C). Dat je kvadrat $ABCD$ stranice a cm. Izračunaj površinu kruga koji dodiruje stranice AB i BC i sadrži teme D.

Rešenje. Tangenta u tački D seče prave AB i BC pod uglom od $45°$, pa odseca jednakokraki pravougli trougao MBN, u kom je naš krug k upisani krug, sledeća slika levo. Stranice trougla MBN su: $2a$, $2a$ i

$2a\sqrt{2}$, pa je $r = s - c = 2a + a\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} = a(2-\sqrt{2})$. Površina kruga je: $P = a^2(2-\sqrt{2})^2\pi = a^2(6-4\sqrt{2})\pi$.



Primer D). Nad prečnikom $2r$ polukruga konstruisan je jednakostranični trougao stranice $2r$. Izračunaj površinu onog dela trougla koji je izvan kruga.

Rešenje. Ugao MSN na slici u sredini je 60°, pa se u krugu nalazi deo trougla ABC koji obrazuju jednakostranični trouglovi AMS i BNS i isečak, koji predstavlja trećinu polukruga. Tražena površina je: $P = (2r)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} - 2\cdot\dfrac{r^3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{6}r^2\pi = \dfrac{r^2\sqrt{3}}{2} - \dfrac{r^2\pi}{6} = \dfrac{r^3}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$.

Primer E). U krug poluprečnika 25 cm upisan je jednakokraki trougao kraka 40 cm. Koliko procenata površine kruga pokriva ovaj trougao?

Rešenje. Primenimo Pitagorinu teoremu na pravougle trouglove ACD i ASD. Dobićemo: $AC^2 - (r+x)^2 = AD^2$ i $r^2 - x^2 = AD^2$, gde smo uveli oznaku $SD = x$, slika gore desno. Odavde dobijamo: $40^2 - (25+x)^2 = 25^2 - x^2$, pa je $x = 7$ cm. Dalje je $AD^2 = 25^2 - 7^2 = 576$, pa je $AD = 24$ i $AB = 48$. Kako je visina jednakokrakog trougla $CD = r + x = 32$ cm, to površina trougla ABC iznosi $P = 24\cdot 32 = 768$ cm^2. Površina kruga je $25^2\pi$, što iznosi približno 1963,5 cm^2. Budući da je $768 : 1963,5 = 0,391\ldots$, traženi procenat je 39% približno.

506. Oko ekvatora postavljen je koncentrično obruč koji je za 1 m duži od ekvatora. Može li se mačka provući ispod tog obruča? (Uzeti da je Zemlja pravilna lopta.)

507. Izračunaj površinu kruga opisanog oko jednakokrakog trougla kome su osnovica i odgovarajuća visina dužine 8 cm.

508. Stranica trougla je dužine 10 cm, a ugao naspram nje je 150°. Izračunaj površinu opisanog kruga.

509. Dat je trougao sa stranicama: 13 cm, 20 cm i 21 cm. Izračunaj površinu onog dela opisanog kruga, koji je izvan datog trougla.

510. Na krugu poluprečnika 12 cm data je tetiva $AB = 12$ cm. Poluprečnici SA i SB presečeni su pravom koja je paralelna tetivi AB, tako da odsečak CD ove prave između poluprečnika, polovi obim isečka određenog datom tetivom. Odredi dužinu duži CD.

511. U trouglu ABC uočimo visinu CD i težišnu liniju CM. Izračunaj površinu opisanog kruga trougla CDM, ako su stranice datog trougla: $AB = 14$ cm, $BC = 15$ cm i $AC = 13$ cm.

512. Kružnica poluprečnika r cm dodiruje spolja kružnicu čiji je poluprečnik tri puta veći. Izračunaj površinu površi ograničene delovima datih kružnica i njihovom zajedničkom tangentom.

513. U kružnom isečku sa centralnim uglom od 60° upisan je novi krug. Odredi razmeru površina isečka i upisanog kruga.

514. U pravougli isečak poluprečnika r cm upisan je krug. Izračunaj površinu upisanog kruga.

515. U kvadratu stranice a cm upisana su tri kružna luka: dva polukruga sa prečnicima AB i AD i luk sa centrom A i tetivom BD. Ovi lukovi ograničavaju dve krivolinijske figure čije površine treba izračunati.

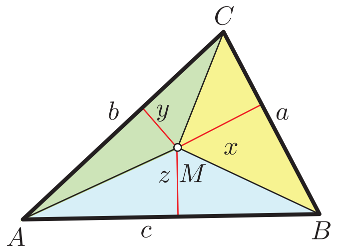
6.3. Problemi sa površinama

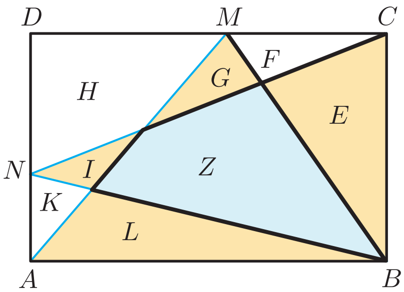
Primer A). Može li površina trougla biti veća od 100 cm^2, ako su sve visine trougla manje od 1 cm?

Rešenje. Može! Jednakokraki trougao ABC, kome je osnovica $AB = 1000$ cm i odgovarajuća visina $h = 0,4$ cm, ima površinu 200 cm^2, a visine manje od 1 cm. Ovu tvrdnju za drugu visinu treba da proverite.

Primer B). U trouglu ABC izabrana je proizvoljna tačka M, koja je od stranica a, b, c redom udaljena za dužine x, y, z. Dokaži da je $\dfrac{x}{h_a} + \dfrac{y}{h_b} + \dfrac{z}{h_c} = 1$, pri čemu su h_a, h_b, h_c visine datog trougla.

Dokaz. Duži AM, BM i CM dele trougao ABC na tri dela, slika levo. Koristeći činjenicu da je zbir površina trouglova BCM, CAM i ABM jednak površini P trougla ABC, dobijamo jednakost: $\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}cz = P$, odnosno $\frac{ax}{2P}+\frac{by}{2P}+\frac{cz}{2P}=1$. Smenjujući redom $2P = ah_a$, $2P = bh_b$, $2P = ch_c$, posle skraćivanja, dobijamo traženu jednakost.





Primer C). Na stranicama CD i DA pravougaonika $ABCD$ date su redom tačke M i N. Trouglovi ABM i BCN prekrivaju deo površine datog pravougaonika. Dokaži da je površina nepokrivenog dela pravougaonika $ABCD$ (neobojenog) jednaka površini zajedničkog dela trouglova ABM i BCN (koju pokrivaju istovremeno oba ova trougla – na slici gore desno plavo obojeno).

Dokaz. Označimo sa Z površinu zajedničkog dela trouglova ABM i BCN, a slovima E, F, G, H, I, K, L površine ostalih delova, kao što je označeno na slici. Tvrdimo da je $Z = F + H + K$.

Primetimo da je površina P_1 trougla ABM jednaka polovini površine P pravougaonika: $P_1 = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}P$. Slično je i površina P_2 trougla BCN jednaka $\frac{1}{2}P$. Zbog toga je: $P_1+P_2 = P$. Koristeći oznake površina delova sa slike, dobijamo: $(L + Z + G) + (E + Z + I) = Z + E + F + G+H+I+K+L$. Kad poništimo jednake delove sa leve i desne strane ove jednakosti, ostaje $Z = F + H + K$, što se i tvrdilo.

Primer D). Dokaži da se u krug poluprečnika $r = 19$ cm ne može smestiti 400 tačaka međusobno udaljenih više od 2 cm.

Dokaz. Ako je rastojanje između bilo koje dve tačke veće od 2, onda se oko svake tačke može opisati krug poluprečnika 1, tako da se ovi krugovi ne seku. U datom krugu tačke se mogu rasporediti i uz samu periferiju. Zbog toga razmatramo raspoređivanje malih krugova na većem krugu, poluprečnika 20 cm, koncentričnom sa datim krugom. Ako je traženo raspoređivanje moguće, površina ovog velikog kruga mora biti veća od zbira površina svih 400 malih krugova. Taj uslov nije ispunjen, jer je površina velikog kruga jednaka $20^2\pi = 400\pi$, a to je tačno koliko i $400 \cdot 1^2\pi$. To je kraj dokaza.

Primer E). Dokaži da u svakom pravouglom trouglu, između površine P i poluprečnika r i R, upisanog i opisanog kruga, važi nejednakost: $R + r \geqslant \sqrt{2P}$.

Dokaz. Znamo da je $P = \dfrac{ab}{2}$, $R = \dfrac{c}{2}$, gde je c hipotenuza, kao i da je $r = s - c = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} - c = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$. Prema tome: $R + r = \dfrac{a+b}{2}$, a na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine je $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = \sqrt{2P}$.

516. Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ seku se u tački O. Dokaži da je proizvod površina trouglova OAB i OCD jednak proizvodu površina trouglova OBC i OAD.

517. U raznostranom trouglu ABC dužina visine iz temena C na stranicu AB jednaka je zbiru dužina drugih dveju visina. Izrazi dužinu stranice AB u funkciji od dužina drugih dveju stranica. Zatim, dokaži da ne postoje trouglovi koji ispunjavaju dati uslov, a kojima je dužina stranice BC jednaka 6 i dužine drugih dveju stranica izražavaju se prirodnim brojevima.

518. U pravouglom trouglu, sa katetama a i b i hipotenuzinom visinom h, važi nejednakost $h \leqslant \sqrt{\dfrac{ab}{2}}$. Dokaži.

519. Dokaži da je u svakom trouglu: $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$, gde su h_a, h_b, h_c visine trougla, a r poluprečnik upisanog kruga.

520. Dat je trougao čije su stranice dužina 3 cm, 4 cm i 5 cm. Postoji li u tom trouglu tačka koja je od svake stranice udaljena manje od 1 cm?

521. Dat je trougao ABC i tačka M u trouglu. Dokaži da je $AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB \geqslant 4P$, gde je P površina trougla.

522. U unutrašnjosti pravougaonika dimenzija 45 cm puta 60 cm razbacana je 901 različita tačka. Dokaži da postoji krug poluprečnika 25 mm koji pokriva najmanje 5 od ovih tačaka.

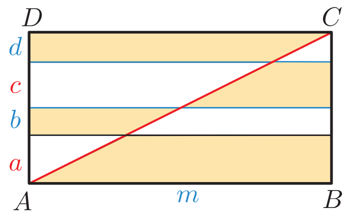
523. Dat je jednakostranični trougao stranice 2 dm, unutar koga je na proizvoljan način raspoređeno različitih 2001 tačka. Dokaži da postoji krug prečnika 12 mm koji pokriva najmanje 6 od raspoređenih tačaka.

524. Dat je kvadrat i devet različitih pravih u njegovoj ravni. Svaka od ovih pravih deli kvadrat na dva trapeza čije se površine odnose kao $2:3$. Dokaži da među datim pravim postoje tri koje imaju jednu zajedničku tačku.

525. Da li trougao čije su sve visine veće od 2 cm može imati površinu manju od 2 cm^2?

526. Kvadrat je podeljen na pet disjunktnih pravougaonika jednakih površina. Pritom temena kvadrata pripadaju različitim pravougaonicima, a peti pravougaonik nema zajedničkih tačaka sa stranicama kvadrata. Dokaži da je taj peti pravougaonik kvadrat.

527. Dat je pravougaonik $ABCD$, kao na slici. Ako je $a + c = b + d$, onda je zbir "belih" površina s leve strane dijagonale AC jednak zbiru "belih" površina s desne strane dijagonale AC. Dokaži.



528. Neka su M i K, tim redom, tačke na stranicama AB i CD paralelograma $ABCD$, takve da je $AM = CK$. Uzimamo proizvoljnu tačku P na stranici AD. Pritom, MK i PB seku se u tački E, a MK i PC seku se u tački F. Dokaži da je:

a) $P_{EPF} = P_{BME} + P_{CFK}$; b) $P_{BCFE} = P_{APEM} + P_{PDKF}$.

529. Dijagonale proizvoljnog trapeza dele taj trapez na četiri trougla. Površine trouglova kojima pripadaju osnovice iznose P_1 i P_2. Izračunaj površinu P trapeza.

530. Nad stranicama BC i CA trougla ABC, van trougla, konstruisani su kvadrati $BCDE$ i $CAFG$. Dokaži da su površine trouglova ABC i CDG jednake.

531. U ravni je dat zatvoren “lanac” od n kvadrata ($n > 3$), tako da je svaki kvadrat povezan sa dva susedna kvadrata temenima jedne svoje dijagonale. Preostala temena spojena su sa dve izlomljene linije, jedna je unutar prstena, a druga izvan. Tako su formirana dva “lanca” trouglova. Jedan je određen unutrašnjom izlomljenom linijom, a drugi spoljašnjom izlomljenom linijom. Dokaži da su površine ova dva “lanca” trouglova jednake.

532. Tačke D, E i F, redom, pripadaju stranicama AB, BC i CA jednakostraničnog trougla ABC. Pritom, duži DB, EC i FA jednake su trećini stranice datog trougla. Duži AE, BF i CD seku se u tačkama K, L i M. Izrazi površinu S trougla KLM pomoću date površine P trougla ABC.

533. Na produžecima stranica četvorougla $ABCD$ uočene su tačke K, L, M i N, takve da su B, C, D i A, redom središta duži AK, BL, CM i DN. Ako je S površina četvorougla $ABCD$, kolika je površina četvorougla $KLMN$?

534. Dat je pravougaonik $ABCD$. U njemu se bira proizvoljna tačka T, kroz koju se konstruišu dve prave paralelno stranicama pravougaonika. One dele dati pravougaonik na četiri manja pravougaonika. Dokaži da je površina bar jednog od pravougaonika koji sadrži tačku A ili tačku C, manja ili jednaka četvrtini površine celog pravougaonika.

535. Dva četvorougla imaju zajednička središta svih stranica. Dokaži da ovi četvorouglovi imaju jednake površine.

Glava 7

GEOMETRIJA U PROSTORU

- Kombinatorni problemi. Tačka, prava i ravan
- Površine i zapremine rogljastih tela
- Površine i zapremine obrtnih tela

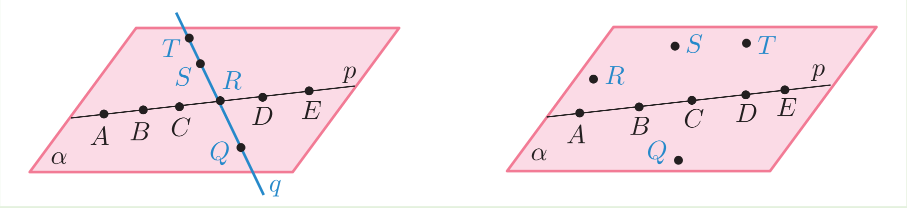
Geometrija u prostoru

7.1. Kombinatorni problemi. Tačka, prava i ravan

U ovom odeljku proučavamo uglavnom međusobne odnose tačaka, pravih i ravni u trodimenzionalnom prostoru. Koristićemo se iskustvima iz elementarne kombinatorike, bez korišćenja komplikovanih formula.

Primer A). U ravni α data je prava p i na njoj tačke A, B, C, D i E. Van prave p u istoj ravni date su i tačke Q, R, S, T. Koliko je najmanje, a koliko najviše pravih određeno sa ovih devet tačaka?

Rešenje. Date tačke određuju najmanje pravih ako su tačke Q, R, S i T kolinearne, t.j. pripadaju jednoj pravoj q i pritom se prave p i q seku u jednoj od tačaka Q, R, S ili T (vidi sliku levo). Znajući da dve različite tačke određuju tačno jednu pravu, nalazimo da 3 tačke prave q (na slici tačke Q, S i T) sa tačkama A, B, C D i E (sa 5 tačaka) određuju $3 \cdot 5 = 15$ pravih. Uz prave p i q to čini minimalni broj od $15 + 2 = 17$ pravih.



Najviše pravih određeno je ako među tačkama Q, R, S, T ne postoje tri kolinearne tačke i nijedna od 6 pravih, određenih tim tačkama (QR, QS, QT, RS, RT, ST) ne prolazi kroz neku od 5 datih tačaka prave p, slika desno. Tada je određeno ukupno $6 + 4 \cdot 5 + 1 = 27$ pravih.

Primer B). Posmatramo ponovo devet tačaka opisanih u **primeru A)**, ali tačke Q, R, S i T ne leže u ravni α. Koliko ove tačke mogu odrediti najmanje, a koliko najviše

a) trouglova; b) ravni?

Rešenje. Koristimo slike iz prethodnog primera.

a) Trougao je određen sa tri nekolinearne tačke, pa će najmanji broj trouglova biti određen u slučaju kad su tačke Q, R, S, T kolinearne. Tada svaka od duži određenih tačkama A, B, C, D, E (ima ih $\frac{5\cdot 4}{2}=10$) sa tri od 4 tačke Q, R, S, T, određuje po 4 trougla, a to je 40 trouglova. Takođe svaka od duži određenih tačkama Q, R, S, T (ima ih 6) sa svakom od tačaka A, B, C, D, E, određuje po 5 trouglova, što daje 30 trouglova. Dakle, minimalni broj trouglova je $40+30=70$.

Najviše trouglova određeno je ako među tačkama Q, R, S, T, nema kolinearnih trojki i nijedna od pravih određenih ovim tačkama ne prolazi kroz neku od tačaka A, B, C, D, E. Tada je određeno: $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{6}+10\cdot 4+6\cdot 5=74$ trougla. (Tačke Q, R, S, T određuje 4 trojke; svaka od 10 duži određenih tačkama A, B, C, D, E, sa tačkama Q, R, S, T određuju 4 trougla; svaka od 6 duži određenih tačkama Q, R, S, T, sa tačkama A, B, C, D, E, određuje po 5 trouglova.)

b) Najmanje ravni, samo jedna, određena je ako tačke Q, R, S, T leže na jednoj pravoj (na slici levo prava q), koja seče pravu p.

Najviše ravni određeno je ako su tačke Q, R, S, T nekomplanarne i prava p se mimoilazi sa svakom od 6 pravih određenih tačkama Q, R, S, T. (Nijedna od ovih 6 pravih ne seče pravu p i nije paralelna sa p.) Tada je određeno: $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{6}+6\cdot 5+1\cdot 4=38$ ravni. (Četiri tačke Q, R, S, T, određuju 4 ravni, svaka od 6 pravih, određenih tačkama Q, R, S, T, sa tačkama A, B, C, D, E, određuje po 5 ravni; prava p sa svakom od tačaka Q, R, S, T, određuje po jednu ravan.)

Primer C). Na jednom listu označena je 1001 tačka. Uroš se igrao tako što je dužima spajao neke od ovih tačaka. Dokaži sledeće tvrđenje: Bez obzira na ukupan broj duži i redosled povlačenja duži, postoje bar dve tačke iz kojih polazi isti broj duži.

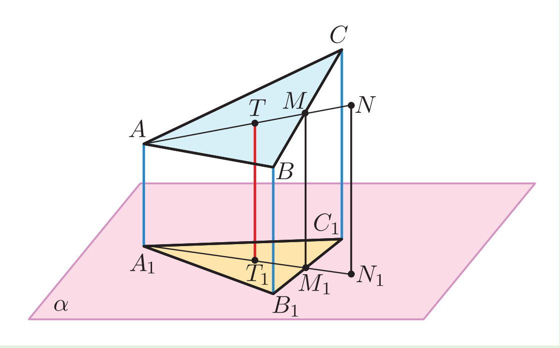
Rešenje. Obeležimo sa $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{1000}, A_{1001}$ označene tačke, a sa $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{1000}$ broj duži povučenih redom iz označenih tačaka. Brojevi $n_1, n_2, n_3, \ldots$ su elementi skupa $S = \{0, 1, 2, \ldots, 999\}$ ili skupa $S_1 = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, zavisno od toga da li ima tačaka iz kojih nije povučena nijedna duž (skup S) ili su sve tačke povezane sa nekim drugim tačkama (skup S_1). U oba slučaja imamo po 1000 mogućnosti za 1001 tačku, pa, po Dirihleovom principu, moraju postojati bar dve tačke sa jednakim brojem n. To su tačke iz kojih prolazi jednak broj duži.

Primer D). U tegli oblika kocke ivice 6 cm zatvoreno je 55 muva. Dokaži da u svakom momentu u tegli postoji prostor u obliku kocke stranice 2 cm u kojoj lete (ili miruju) 3 muve.

Rešenje. Sa 6 ravni, po dve paralelne naspramnim stranama, podelićemo kocku na 27 manjih kocki ivice 2 cm. Budući da je $55 = 2 \cdot 27 + 1$, po Dirihleovom principu postoje najmanje 3 muve koje su u jednoj maloj kocki ivice 2 cm.

Primer E). Iznad ravni α dat je trougao ABC, kome su temena od ravni α udaljena 25 cm, 30 cm i 38 cm. Koliko je od ravni udaljeno težište ovog trougla?

Rešenje. Na slici desno vidimo dati trougao ABC i njegovu projekciju $A_1B_1C_1$ na ravan α. Duž AM je težišna linija, a T je težište. Produžimo težišnu liniju do tačke N, tako da je $TM = MN$. Kako je $TM = \frac{1}{3}AM$, sledi da je T središte duži AN.



Poznate su duži: $AA_1 = 25$ cm, $BB_1 = 30$ cm i $CC_1 = 38$ cm (na slici plavo obojene), a tražimo duž TT_1 (crveno obojeno). Koristićemo osobinu srednje linije trapeza ($a + b = 2m$).

U trapezu AA_1N_1N je $AA_1 + NN_1 = 2TT_1$. Dodamo levoj i desnoj strani jednakosti TT_1, pa dobijemo $AA_1 + (NN_1 + TT_1) = 3TT_1$. Vidimo da u trapezu TT_1N_1N važi jednakost: $NN_1 + TT_1 = 2MM_1$, a u trapezu BB_1C_1C je $2MM_1 = BB_1 + CC_1$. Dakle, $NN_1 + TT_1 = 2MM_1 = BB_1 + CC_1$. Sada imamo jednakost: $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1$ ili $25 + 30 + 38 = 3TT_1$. Odavde je traženo rastojanje: $TT_1 = 31$ cm.

536. Između n datih tačaka ne postoje četiri komplanarne tačke. Broj ravni koje određuju ove tačke 22 puta je veći od broja tačaka. Koliko pravih određuju ove tačke?

537. Na pravoj p date su tačke A, B i C. Na pravoj q koja se mimoilazi sa p, date su tačke D i E, i data je tačka F van svih pravih određenih parovima tačaka A, B, C, D, E. Koliko ravni određuju ove prave i tačke?

538. Koliko najviše ravni određuju tri paralelne prave a, b i c i pet tačaka od kojih se može izabrati samo jedna trojka kolinearnih tačaka?

539. Na svakoj stranici kvadrata izabrane su po tri tačke, koje nisu temena kvadrata. Koliko je trouglova određeno sa ovih 12 tačaka?

540. Koliko

a) pravih   b) ravni

određuju temena jedne kocke?

541. Tačke A, B, C, D, E i F su temena pravilnog šestougla, a tačka S je van ravni ovog mnogougla.

a) Koliko pravih određuju ove tačke?

b) Koliko je ravni određeno ovim tačkama?

542. Tri muve polete istovremeno sa stola (sa ravni stola). Posle koliko vremena će ove muve opet biti u jednoj ravni?

543. Raspolažemo sa 12 štapića, svaki dužine po 13 cm. Treba ove štapiće iseći na delove dužina 3 cm, 4 cm i 5 cm, tako da od dobijenih delova napravimo 13 jednakih trouglova sa stranicama dužina 3 cm, 4 cm i 5 cm. Kako ćemo to učiniti?

544. Dat je kvadrat. Povlačenjem 8 pravih, od kojih su 4 paralelne sa jednim parom stranica kvadrata, a ostale 4 paralelene sa drugim parom stranica, kvadrat je podeljen na 25 pravougaonika. Ako među ovim pravougaonicima ima tačno 4 kvadrata, dokaži da su dva od tih kvadrata podudarna.

545. U pravilni šestougao stranice $a = 2$ cm razbacano je 50 tačaka od kojih su neke označene plavom bojom, a ostale su označene crvenom bojom. Dokaži da se uvek mogu naći dve tačke iste boje, čije međusobno rastojanje nije veće od 1 cm.

546. U unutrašnjosti konveksnog četvorougla dato je 996 tačaka, što sa temenima četvorougla čini skup od 1000 različitih tačaka. Spajamo dužima ove tačke, tako da se duži ne presecaju međusobno. Ovaj postupak produžavamo sve dok postoje dve tačke koje možemo spojiti nepresecajućom duži. Koliko je ovakvih duži povučeno?

547. Pravougaonik dimenzija 2 cm puta 10 m podeljen je na 2000 podudarnih kvadrata stranice 1 cm. Na koliko načina možemo izabrati 999 kvadrata, tako da među njima ne postoje dva sa zajedničkim stranicama?

548. Date su dve uzajamno normalne ravni α i β sa zajedničkom pravom s. Tačke A i B prave s međusobno su udaljene 24 cm. Duž AB je stranica jednakostraničnog trougla ABC, koji leži u ravni α i hipotenuza jednakokrakog trougla ABD, koji leži u ravni β. Odredi dužinu duži CD.

549. Na jednoj strani diedra, čiji je ugao 60°, data je tačka M, koja je od druge strane diedra udaljena $8\sqrt{3}$ cm. Koliko je tačka M udaljena od ivice diedra?

550. Date su ravni α i β na međusobnom rastojanju od 12 cm. U ravni α date su tačke A i C, a u ravni β tačke B i D. Pod kojim uglom prava CD prodire ravan α, ako prava AB prodire ravan α pod uglom od 30° i pritom je $AB + CD = 48$ cm?

7.2. Površine i zapremine rogljastih tela

Primer A). Izračunaj površinu kocke $ABCDEFGH$, ako je jedno njeno teme udaljeno 7 cm od dijagonale.

Rešenje. Neka je BN normala iz temena B na dijagonalu AG. Tačke A, B i G su temena pravouglog trougla sa katetama $AB = a$ i $BG = a\sqrt{2}$ i hipotenuzom $AG = a\sqrt{3}$. Duž $BN = 7$ cm je hipotenuzina visina. Iz površine ovog trougla imamo jednakost $a \cdot a\sqrt{2} = 7 \cdot a\sqrt{3}$. Odavde je $a = 7\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, pa je površina kocke $P = 6a^2 = 441$ cm^2.

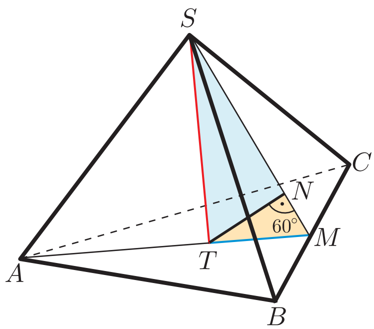
Primer B). Bočne strane trostrane piramide normalne su među sobom. Izračunaj površinu i zapreminu ove piramide ako su površine bočnih strana: $4\sqrt{105}$ cm^2, $16\sqrt{21}$ cm^2 i $42\sqrt{5}$ cm^2.

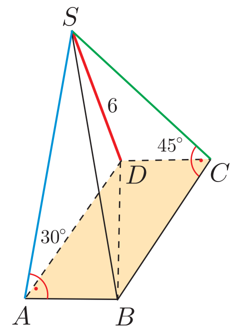
Rešenje. Neka su m, n i p bočne ivice. Budući da su bočne strane normalne, to su i bočne ivice normalne među sobom, pa se omotač sastoji iz tri pravougla trougla sa katetama m, n i p. Slede uslovi: $m \cdot n = 8\sqrt{105}$, $n \cdot p = 32\sqrt{21}$ i $m \cdot p = 84\sqrt{5}$. Kad ove jednakosti izmnožimo dobićemo $m^2n^2p^2 = 8 \cdot \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sqrt{3 \cdot 7} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{5} = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot 5$, pa je $mnp = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8\sqrt{5}$. Zapremina piramide je
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} m \cdot n \cdot p = 112\sqrt{5}$ cm^3 (p je visina piramide).

Izračunajmo dužine m, n i p. Npr. $m = \frac{mnp}{np} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8\sqrt{5}}{32\sqrt{21}} = \sqrt{105}$ cm. Slično je $n = 8$ cm i $p = 4\sqrt{21}$ cm. Za površinu četvrte strane moramo odredi njene ivice a, b, c, koje predstavljaju hipotenuze bočnih strana. Na primer: $a^2 = m^2 + n^2 = 105 + 64 = 169$, pa je $a = 13$ cm. Slično je $b = 20$ cm i $c = 21$ cm. Heronovim obrascem izračunamo površinu trougla: $S = 126$. Dakle, površina piramide je
$P = (126 + 4\sqrt{105} + 16\sqrt{21} + 42\sqrt{5})$ cm^2.

Primer C). Izračunaj zapreminu pravilne trostrane piramide čija je strana nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 60°, a rastojanje od težišta osnove do bočne strane je 3 cm.

Rešenje. Nagib bočne strane određen je uglom između bočne visine i visine osnove, sledeća slika levo. Prema tome, normala iz težišta T osnove na bočnu stranu ima podnožje N na bočnoj visini. Iz trougla MNT izračunavamo: $NT = MT\frac{\sqrt{3}}{2}$, odakle je $MT = 2\sqrt{3}$ cm. Sada je visina baze $h = 3TM = 6\sqrt{3}$, pa iz $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, dobijamo: $a = 12$ cm. Dalje, iz pravouglog trougla STN, sa uglovima od 30° i 60°, dobijamo $ST = 2NT$, tj. visina piramide je $H = 6$ cm. Konačno:
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 72\sqrt{3}$ cm^3.





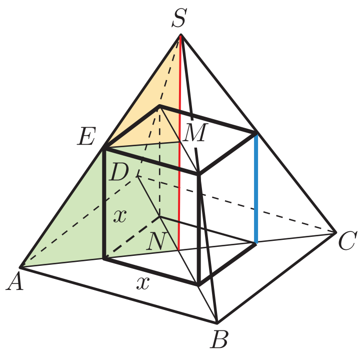
Primer D). Tačka S ne pripada ravni pravougaonika $ABCD$. Nagib prave SC prema ravni pravougaonika je 45°, nagib prave SA prema istoj ravni je 30°, a duž SD, dužine 6 cm, normalna je na ravan $ABCD$. Izračunaj površinu piramide $SABCD$.

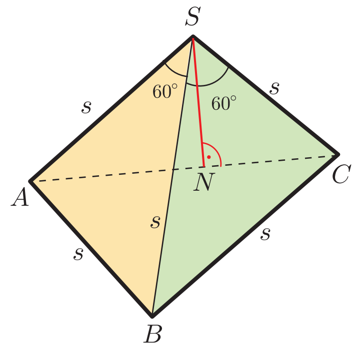
Rešenje. Treba uočiti da omotač piramide $SABCD$, slika desno, čine četiri pravougla trougla: SAD, SCD, SAB, SBC. Prava CD je normalna na ravan SAD, a samim tim i prava BA, koja je paralelna sa CD. Zbog toga je $BA \perp SA$. Slično utvrdimo da je $BC \perp CS$.

Sada nalazimo da je $CD = SD = 6 = AB$, $CS = 6\sqrt{2}$. Zatim: $AS = 2SD = 12$ i $AD = 6\sqrt{3} = BC$. Konačno: $P = AB \cdot BC + \frac{1}{2}(AB \cdot AS + AD \cdot DS + CD \cdot DS + BC \cdot CS) = (54\sqrt{3} + 54 + 18\sqrt{6})\ \mathrm{cm}^2$.

Primer E). U pravilnu četvorostranu piramidu, koja ima osnovnu ivicu a i bočnu ivicu $\frac{3}{4}a$, upisana je kocka, tako da su temena gornje osnove na bočnim ivicama piramide. Kolika je zapremina kocke?

Rešenje. Iz pravouglog trougla ANS nalazimo visinu piramide: $H = SN = \frac{a}{4}$, sledeća slika levo. Ivicu x kocke nalazimo iz sličnih trouglova ANS i EMS, iz proporcije: $AN : EM = SN : SM$. Vodimo računa o sledećem: $AN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $EM = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, $MN = x$ i $SM = H - x$. Dalje je: $\frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{4} : \left(\frac{a}{4} - x\right)$, a odavde je $x = \frac{a}{5}$. Zapremina kocke je $V = x^3 = \frac{a^3}{125}$.





Primer F). Bočne ivice trostrane piramide imaju dužine s cm i obrazuju rogalj sa dva ugla od 60° i jednim pravim uglom. Izračunaj površinu i zapreminu ove piramide.

Rešenje. Neka su uglovi ASB i BSC po 60°, slika desno. Tada su trouglovi ABS i BCS jednakostranični, a SAC je jednakokraki pravougli. Trougao ABC, baza piramide, podudaran je trouglu ACS (stav SSS). Površina se, dakle, sastoji iz dva jednakostranična i dva jednakokraka pravougla trougla, pa je $P = a^2 + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Zato što su bočne ivice jednake, podnožje visine piramide je centar opisanog kruga baze, a to je središte hipotenuze AC.

Dakle, $H = SN = \dfrac{s\sqrt{2}}{2}$, pa je zapremina: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{s^2}{2} \cdot \dfrac{s\sqrt{2}}{2} = \dfrac{s^3\sqrt{2}}{12}$.

551. Data je kocka $ABCDEFGH$. Ako su M i N tačke prodora dijagonale DF kroz ravni trouglova EBG i ACH, dokaži da su duži DN, NM i MF jednake.

552. Kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice a cm presečena je sa ravni koja sadrži teme C i središta ivica AD i B_1C_1. Izračunaj površinu preseka.

553. Kocka ivice a presečena je jednom ravni koja sadrži tačno tri njena temena. Kolika je površina kocke ako je površina dobijenog preseka $\sqrt{3}$ m^2?

554. Kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ je presečena sa ravni koja sadrži središta ivica BB_1, B_1C_1 i AD. Dokaži da je ovaj presek pravilni šestougao.

555. Data je kocka ivice $a = 6$ cm. Izračunaj dužine odsečaka koje na dijagonali kocke određuju podnožja normala povučenih iz temena kocke na tu dijagonalu.

556. Iz temena A kocke $ABCDEFGH$, stranice a, povučena je normala AM na dijagonalu HB. Izračunaj površinu trougla SMN, gde je S središte dijagonale HB, a N središte ivice FG.

557. Površina kvadra je 200, a zapremina je izražena istim brojem kao i zbir recipročnih vrednosti dužina triju ivica koje polaze iz jednog temena. Kolika je zapremina kvadra?

558. Svi kvadri, kojima su jednake mere površine i zapremine, imaju isti zbir recipročnih vrednosti dužina svih ivica. Koliki je taj zbir?

559. Osnovne ivice kvadra odnose se kao $7 : 24$, a površina dijagonalnog preseka je 50 cm^2. Kolika je površina omotača kvadra?

560. Osnovna ivica pravilne četvorostrane prizme je a. Ravan koja sadrži osnovnu ivicu i prema osnovi je nagnuta pod uglom od 30°, deli prizmu na dva tela čije se zapremine odnose kao $2 : 3$. Kolika je visina prizme?

561. Iz kocke ivice a cm izrezana je trostrana prizma. Osnova prizme je jednakokraki trougao čija visina pripada dijagonali strane kocke, a ugao između krakova je 30°. Koliki deo kocke čini zapremina ove prizme?

562. Osnova prave četvorostrane prizme je romb površine $\frac{2}{3}k^2$. Manji dijagonalni presek prizme je kvadrat površine k^2.

a) Izračunaj površinu i zapreminu prizme izraženu pomoću k.

b) Koliko je k ako su merni brojevi površine i zapremine jednaki?

563. Osnovne ivice kvadra odnose se kao $4 : 3$, dijagonale bočnih strana odnose se međusobno kao $\sqrt{20} : \sqrt{13}$, a površina dijagonalnog preseka prema zapremini kvadra kao $2 : 1$. Izračunaj površinu i zapreminu ovog kvadra.

564. Bočne strane date prave trostrane prizme imaju površine: 26 cm^2, 28 cm^2 i 30 cm^2. Izračunaj zapreminu prizme ako joj je površina 126 cm^2.

565. U bazen oblika kvadra, baze 1,5 m sa 4 m i dubine 4 m, nasuto je 4,5 m^3 vode.

a) Za koliko se podigne nivo vode, ako u bazen spustimo betonsku kocku ivice 1 m?

b) Za koliko se ponovo podigne nivo vode ako se na dno bazena spuste još dve takve kocke?

566. Izrazi zapreminu prave trostrane prizme preko dužine a najduže stranice osnove, ako se kvadrati osnovnih ivica odnose kao $8 : 13 : 25$, a dijagonale većih bočnih strana kao $4 : 5$.

567. Kocki ivice a cm odsečena su temena, tako da je svaka ivica prepolovljena. Izračunaj površinu i zapreminu preostalog tela.

568. Presek pravilne četvorostrane piramide, određen vrhom i dijagonalom osnove, predstavlja jednakostranični trougao površine $9\sqrt{3}$ cm^2. Izračunaj površinu i zapreminu piramide.

569. Površina pravilne trostrane piramide je $648\sqrt{3}$ cm^2. Izračunaj zapreminu piramide, ako je njena visina dva puta veća od osnovne ivice.

570. Osnova prave trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ je jednakokraki pravougli trougao ABC sa katetama $AB = AC = 1$ cm. Visina prizme je 6 cm. Ravan π, koja sadrži teme B, od ivica AA_1 i CC_1 odseca duži $AA' = 2$ cm i $CC' = 4$ cm. Izračunaj zapreminu onog dela prizme koji se nalazi između ravni π i osnove $A_1B_1C_1$.

571. Osnova četvorostrane piramide je kvadrat. Jedna od bočnih ivica je normalna na osnovu. Najveća bočna ivica, dužine 6 cm, nagnuta je prema ravni osnove pod uglom od $45°$. Izračunaj zapreminu piramide.

572. Osnova piramide je romb stranice 12 cm. Bočne strane piramide nagnute su prema osnovi pod uglom od $45°$. Izračunaj zapreminu piramide, ako je površina omotača 120 cm^2.

573. Osnova četvorostrane piramide je trapez čije su osnovne ivice $a = 5$ cm i $b = 3$ cm, a kraci su $c = d = 7$ cm. Izračunaj zapreminu date piramide, ako je podnožje visine presečna tačka dijagonala trapeza, a veća bočna ivica ima dužinu 13 cm.

574. Data je četvorostrana piramida $SABCD$, čije naspramne strane SAB i SCD pripadaju međusobno normalnim ravnima, koje su normalne i na ravan $ABCD$. Ako su bočne ivice $SA = SD = 20$ cm i $SB = SC = 10\sqrt{2}$ cm i ako su bočne ivice SA i SD nagnute prema ravni osnove pod uglom od $30°$, izračunaj površinu i zapreminu piramide.

575. Neka je P tačka baze pravilne četvorostrane piramide. Normala p u tački P na ravan baze prodire ravni bočnih strana u tačkama M_1, M_2, M_3 i M_4. Dokaži da je $PM_1 + PM_2 + PM_3 + PM_4 = 4H$, za svaku tačku P baze, gde je H visina piramide.

576. Dve strane trostrane piramide su jednakostranični trouglovi stranice a cm. Ravni ovih trouglova normalne su među sobom. Izračunaj površinu i zapreminu piramide.

577. Dat je pravilni tetraedar zapremine $18\sqrt{2}$ cm^3. Izračunaj površinu tog tetraedra.

578. Trougao čije stranice imaju dužine: 12 cm, 16 cm i 20 cm je baza trostrane piramide sa jednakim bočnim ivicama: $s = 26$ cm. Izračunaj zapreminu te piramide.

579. Dokaži da se ivica pravilnog tetraedra iz središta visine vidi pod pravim uglom.

580. Osnovna ivica pravilne trostrane piramide je a. Bočna strana je nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 60°. Odredi rastojanje težišta osnove od bočne strane.

581. Površina osnog preseka pravilne trostrane piramide je $24\sqrt{3}$ cm^2, a visina piramide je $H = 8$ cm. Izračunaj površinu piramide.

582. Bočne strane trostrane piramide nagnute su prema ravni osnove pod uglom od 60°. Izračunaj površinu i zapreminu piramide, ako joj je osnova pravougli trougao sa katetama 6 cm i 8 cm.

583. Iz središta M visine SO pravilne četvorostrane piramide spuštene su normale: $MP = \sqrt{3}$ na bočnu ivicu i $MQ = \sqrt{2}$ na bočnu stranu piramide. Izračunaj zapreminu piramide.

584. Visine bočnih strana neke piramide su jednake. Pod kojim uglom su nagnute njene bočne strane prema ravni osnove, ako je površina piramide 1,5 puta veća od površine njenog omotača?

585. Izračunaj zapreminu paralelepipeda kome su sve strane rombovi stranice a cm sa oštrim uglom od 60°.

586. Osnovna ivica pravilne šestostrane piramide je $a = 2$ cm. Omotač je tri puta veći od osnove. Izračunaj površinu i zapreminu piramide.

587. Izračunaj zapreminu tela čije su ivice spojnice centara strana pravilne trostrane jednakoivične prizme, ako je površina prizme $24(6+\sqrt{3})$ cm^2.

588. U pravilnu četvorostranu piramidu osnovne ivice $a = 12$ cm i visine $H = 6$ cm upisana je kocka $ABCDEFGH$, tako da temena A, B, C, D pripadaju osnovi, a E, F, G, H bočnim visinama date piramide. Izračunaj površinu kocke.

589. Centri strana kocke predstavljaju temena nekog tela. Ako je ivica kocke dužine a cm izračunaj površinu i zapreminu upisanog tela.

590. Svaka od četiri strane pravilnog tetraedra izdeljena je srednjim linijama na četiri jednakostranična trougla. Za bojenje tetraedra koriste se bela (B), plava (P), crvena (C) i zelena (Z) boja. Koliko ima različitih bojenja tetraedra ako su ispunjena sledeća tri uslova:

a) na svakoj strani tetraedra koriste se samo dve boje;

b) svakom bojom obojena su tačno četiri trougla;

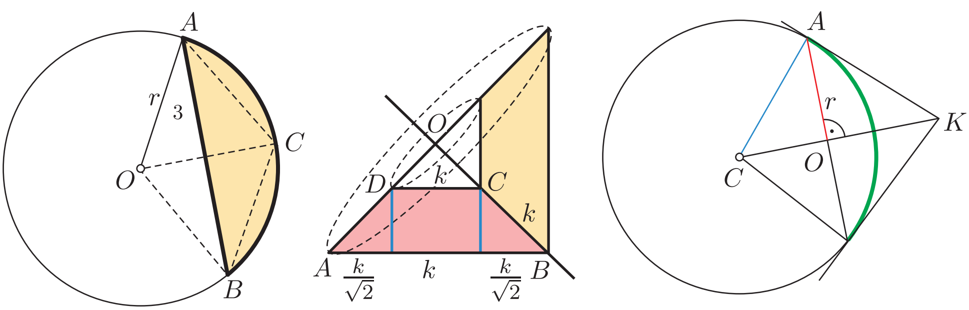
c) svaka dva trougla jedne strane sa zajedničkom stranicom obojena su različitim bojama?

Strane tetraedra nisu obeležene. Različita su ona bojenja koja daju različito obojen tetraedar, nezavisno od njegovog prevrtanja.

7.3. Površine i zapremine obrtnih tela

Primer A). Ravan normalna na osnovu pravog valjka odseca na osnovi tetivu dužine 6 cm. Ovoj tetivi odgovara centralni ugao od 120°. Izračunaj zapreminu manjeg dela valjka, podeljenog ovom ravni, ako je visina valjka jednaka prečniku osnove valjka.

Rešenje. Na sledećoj slici levo prikazan je presek date ravni sa bazom valjka. Vidimo da je visina jednakostraničnog trougla OAC dužine 3 cm. Iz $3 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$ dobijamo: $r = 2\sqrt{3}$, pa je visina valjka $h = 2r = 4\sqrt{3}$. Tražena zapremina je $V = P_0 h$, gde je P_0 površina kružnog odsečka obojenog na slici. Pošto je $P_0 = \dfrac{1}{3}r^2\pi - \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4} = (4\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2, dobijamo: $V = (16\pi\sqrt{3} - 36)$ cm$^3 \approx 51$ cm^3.



Primer B). Jednakokraki trapez sa oštrim uglom od 45°, kome je manja osnovica jednaka kraku, rotira oko kraka. Izračunaj površinu dobijenog tela, ako mu je krak dužine k cm.

Rešenje. Površina tela sastoji se od jednog kružnog prstena i dva omotača kupe, srednja slika gore. Lako se izračunaju dimenzije. Poluprečnik manjeg kruga je $\frac{k\sqrt{2}}{2}$, jer je trougao OCD pravougli jednakokraki. Veći poluprečnik je $\left(k + \frac{k\sqrt{2}}{2}\right)$. Izvodnica manje kupe je k, a veće $(k + k\sqrt{2})$. Tražena površina je $P = OA^2\pi - OD^2\pi + OD \cdot CD\pi + OA \cdot AB\pi = 3k^2\pi(1 + \sqrt{2})$ cm^2.

Primer C). Kosmonaut sa visine od 525 kilometara vidi deo zemlje, čija je kontura kružnog oblika. Izračunaj poluprečnik te konture, uzimajući da je poluprečnik zemlje približno 6300 km.

Rešenje. Traženi poluprečnik je hipotenuzina visina AO pravouglog trougla ACK na poslednjoj slici desno. Imamo katetu $AC = 6300$ km i hipotenuzu $CK = (6300 + 525)$ km $= 6825$ km. Izračunamo najpre drugu katetu: $AK^2 = CK^2 - AC^2 = 46580625 - 39690000 = 6890625 = 2625^2$. Dakle $AK = 2625$ km. Traženi poluprečnik nalazimo iz jednakosti: $AO \cdot CK = AC \cdot AK$. Odavde $AO = \frac{AC \cdot AK}{CK} = \frac{6300 \cdot 2625}{6825}$. Poluprečnik konture iznosi približno 2426 km.

Primer D). Posuda oblika jednakostraničnog valjka, koji ima prečnik 10 cm, napunjena je vodom do $\frac{11}{12}$ visine. Koliki je poluprečnik najveće lopte koja se može potopiti u vodu da ne dođe do prelivanja?

Rešenje. Visina jednakostraničnog valjka jednaka je prečniku, pa je visina neispunjenog dela posude $\frac{10}{12}$ cm. Zapremina najveće lopte jednaka je zapremini neispunjenog dela posude. Taj uslov daje jednakost: $\frac{4}{3}r^3\pi = 5^2\pi \cdot \frac{10}{12}$, odakle je $r^3 = \frac{125}{8}$, pa je $r = \frac{5}{2}$ cm $= 2,5$ cm.

591. Valjak kome je $2r = H = 12$ cm presečen je sa ravni koja je paralelna osi valjka i na svakoj osnovi odseca duž jednaku poluprečniku osnove valjka. Izračunaj površinu manjeg odsečenog dela valjka.

592. Paralelno sa osom valjka postavljena je ravan koja osnovu valjka seče po tetivi kojoj odgovara prav centralni ugao.

a) Odredi razmeru zapremina dobijenih delova valjka.

b) Koliko procenata od zapremine datog valjka iznosi zapremina svakog od dobijenih delova?

593. Dva jednaka jednakostranična valjka ($H = 2r$) smeštena su tako da je osa jednog izvodnica drugog. Izračunaj zapreminu zajedničkog dela ovih valjaka, ako im je visina 6 cm.

594. Na zemljištu oblika kvadrata sa stranicom 12 m kopa se valjkasta jama prečnika 8 m. Iskopana zemlja se ravnomerno rasipa po preostalom delu zemljišta i jako se sabije. Koliko duboko moramo kopati, da bi jama bila 3 m duboka?

595. Sud oblika valjka, poluprečnika osnove 10 cm i dubine 25 cm, napunjen je vodom. Koliko će vode ostati u tom sudu, ako se on nagne tako da njegova osnova obrazuje sa svojim prvobitnim položajem ugao od 30°?

596. Komad leda, koji ima oblik kvadra dimenzija 0,6 m, 0,6 m i 0,4 m, stavljen je u cilindrični sud prečnika 90 cm. Kolika će biti visina sloja vode u tom sudu pošto se led istopi? Gustina leda je 0,92 g/cm^3.

597. Omotač kupe, razvijen u ravni, daje kružni isečak s centralnim uglom od 36° i površine 110π cm^2. Izračunaj površinu i zapreminu te kupe.

598. Osnova kupe ima površinu 7π cm^2. Kada se razvije omotač te kupe, dobije se osmina kruga. Izračunaj površinu i zapreminu te kupe.

599. Voda koja se nalazi u naopačke okrenutoj kupastoj posudi do visine 0,18 m i prečnika baze 0,24 m, presipa se u valjkastu posudu prečnika baze 0,1 m. Do koje će se visine nalaziti voda u valjkastoj posudi?

600. Iz jednakostraničnog valjka izrezan je kvadar. Osnova kvadra ima jednu ivicu jednaku poluprečniku osnove valjka. Ako je dužina poluprečnika valjka jednaka r, izračunaj površinu i zapreminu dobijenog kvadra.

601. Vrh prave kupe je centar jedne baze valjka. Druga baza valjka i baza kupe leže u istoj ravni i imaju isti centar. Zapremine ove kupe i valjka su jednake. Poluprečnik baze valjka je r, a visina valjka h.

a) Koliki je poluprečnik baze kupe (izražen pomoću r)?

b) Kolika je zapremina onog dela valjka koji je u kupi?

602. Dijagonale strana kvadra su 15 cm, $\sqrt{481}$ cm i $\sqrt{544}$ cm. Izračunaj površinu i zapreminu lopte opisane oko datog kvadra.

603. U jednakostranični valjak poluprečnika r upisana je prizma. Baza te prizme je jednakokraki trougao upisan u bazu valjka, sa uglom od 45° naspram osnovice. Izrazi zapreminu prizme kao funkciju poluprečnika r.

604. U kupi poluprečnika osnove $r = 10$ cm i visine $H = 12\sqrt{2}$ cm upisana je kocka, tako da jedna strana kocke pripada osnovi kupe, a temena naspram te strane pripadaju omotaču kupe. Kolika je površina kocke?

605. U pravoj kupi postavljene su dve lopte. Veća lopta dodiruje osnovu i omotač kupe, a manja dodiruje veću loptu i omotač kupe. Izračunaj zapreminu kupe, ako se zna da je poluprečnik veće lopte 2 cm, a manje 1 cm.

606. U kupu je upisana lopta poluprečnika R, tako da je visina kupe četiri puta veća od poluprečnika lopte. Za ova dva tela treba izračunati:

a) razmeru njihovih površina;

b) razmeru njihovih zapremina.

607. Oko polulopte poluprečnika r opisana je kupa visine H, tako da su osnove polulopte i kupe koncentrični krugovi. Izračunaj zapreminu kupe.

608. Romb sa dijagonalama 8 cm i 6 cm rotira oko jedne svoje stranice. Izračunaj površinu i zapreminu dobijenog rotacionog tela.

609. Jednakokraki trapez, čije su osnovice dužina 12,5 cm i 3,5 cm i dijagonala 10 cm, rotira oko manje osnovice. Izračunaj površinu i zapreminu dobijenog tela.

610. Geolog se nalazi na rubu konusnog kratera u tački A. Potrebno je da pređe u dijametralno suprotnu tačku B na rubu kratera (tačka na suprotnom kraju prečnika). Prečnik kratera je $\frac{400}{3}$ m, a dubina $\frac{1000}{3}\sqrt{5}$ m. Izračunaj najkraći put geologa po površini kratera, od tačke A do tačke B.

Glava 8

MATEMATIČKA TAKMIČENJA

- Kengur bez granica
- Misliša
- Školska takmičenja
- Opštinska takmičenja
- Okružna takmičenja
- Državna takmičenja
- Republička takmičenja u Jugoslaviji
- Savezna takmičenja u Jugoslaviji
- Male (srpske) olimpijade
- Juniorske balkanske olimpijade

Primeri matematičkih takmičenja

PROGRAMI TAKMIČENJA

Za sve razrede i sve stupnjeve takmičenja:

– Gradivo iz programa redovne i dodatne nastave u prethodnim razredima.

– Logičko-kombinatorni zadaci.

Školsko takmičenje

– Nastavni sadržaji realizovani u okviru redovne i dodatne nastave u prvom polugodištu.

Opštinsko takmičenje

– Materija predviđena za školsko takmičenje i još:

VII razred:

Površina trougla i četvorougla. Kvadriranje i korenovanje. Pitagorina teorema. Iracionalni brojevi. Stepeni i operacije sa stepenima.

VIII razred:

Krug. Sličnost. Tačka, prava i ravan. Linearne jednačine i nejednačine i primene. Prizma. Jednačine s apsolutnim vrednostima.

Okružno takmičenje

– Materija predviđena za prethodne stupnjeve takmičenja i još:

VII razred: Mnogougao. Polinomi. Osnovi kombinatorike. Geometrijski dokaz.

VIII razred: Piramida. Linearna funkcija. Linearne diofantske jednačine.

Državno takmičenje

– Materija predviđena za prethodne stupnjeve takmičenja i još:

VII razred:

Direktna i obrnuta proporcionalnost. Krug. Tangentni četvorougao. Tetivni četvorougao. Nizovi. Nestandardni konstruktivni zadaci. Deljivost.

VIII razred:

Sistemi linearnih jednačina. Kongruencije po modulu. Elementarni problemi ekstremnih vrednosti. Nelinearne diofantske jednačine.

Juniorska balkanska olimpijada

Elementarna teorija brojeva. Proporcije i procenti. Linearne jednačine sa jednom nepoznatom i primene. Sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate i primene. Linearne nejednačine i sistemi linearnih nejednačina sa jednom nepoznatom. Algebarski izrazi. Dokazi i merenja u planimetriji, bez sličnosti i Pitagorine teoreme. Logičko-kombinatorni zadaci.

Napomena. Obratiti posebnu pažnju na tetivni i tangentni četvorougao.

Mala olimpijada je izborno takmičenje koje se posle Državnog takmičenja održava radi formiranja ekipe za Juniorsku balkansku olimpijadu. Program je isti kao za Juniorsku balkansku olimpijadu.

8.1. Kengur bez granica

A) 7. i 8. razred

Zadaci koji vrede 3 poena

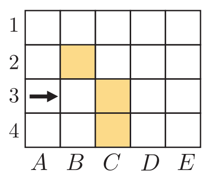
1. $\dfrac{2007}{2+0+0+7}=$

A) 1003 B) 75 C) 223 D) 213 E) 123

2. Grmovi ruža posađeni su u liniju sa obe strane staze. Rastojanje između dva grma je 2 m. Koliko je grmova posađeno ako je staza duga 20 metara?

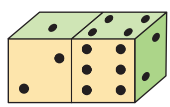
A) 22 B) 20 C) 12 D) 11 E) 10

3. Robot kreće u šetnju po tabli. Polazi sa polja A2 u smeru strelice, kao što je prikazano na slici. Kreće se stalno napred. Ako naiđe na prepreku, skreće udesno. Robot će stati samo u slučaju da ne može više napred posle skretanja udesno. Na kom polju će stati?



A) B2 B) A1 C) E1 D) D1 E) Nikad neće stati.

4. Koliki je zbir tačkica na stranama kockica koje se ne vide na slici?



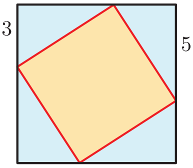
A) 15 B) 12 C) 7 D) 27

E) Drugi broj.

5. U koordinatnom sistemu date su tačke: $A(2006, 2007)$, $B(2007, 2006)$, $C(-2006, -2007)$, $D(2006, -2007)$ i $E(2007, -2006)$. Horizontalna duž je:

A) AD B) BE C) BC D) CD E) AB

6. Manji kvadrat je upisan u veći, kao što je prikazano na slici. Nađi površinu manjeg kvadrata.

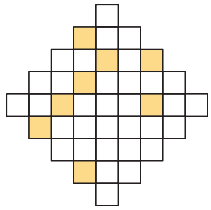


A) 16 B) 28 C) 34 D) 36 E) 49

7. Palindromski broj je broj koji ostaje isti ako mu se cifre zapišu obrnutim redosledom, na primer, broj 13931. Kolika je razlika između najvećeg šestocifrenog i najmanjeg petocifrenog palindromskog broja?

A) 989989 B) 989998 C) 998998 D) 999898 E) 999988

8. Koliko najmanje malih kvadrata treba osenčiti da bi slika na desnoj strani imala osu simetrije?

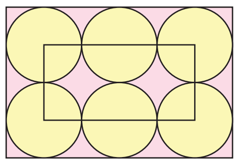


A) 4 B) 6 C) 5 D) 2 E) 3

9. Broj x je celi negativan. Koji od sledećih brojeva je najveći?

A) $x+1$ B) $2x$ C) $-2x$ D) $6x+2$ E) $x-2$

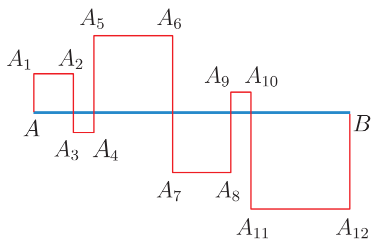
10. Na slici je dato šest identičnih krugova. Krugovi se dodiruju, a dodiruju i stranice većeg pravougaonika. Temena manjeg pravougaonika su centri četiri kruga. Obim manjeg pravougaonika je 60 cm. Koliki je obim većeg pravougaonika?



A) 160 cm B) 140 cm C) 120 cm D) 100 cm E) 80 cm

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Kvadrati su dobijeni tako što je duž AB dužine 24 cm ispresecana izlomljenom linijom $AA_1A_2\ldots A_{12}B$ (vidi sliku). Naći dužinu (crvena) linije $AA_1A_2\ldots A_{12}B$.



A) 48 cm B) 72 cm C) 96 cm D) 56 cm E) 106 cm

12. Na paralelnim pravim x i y postavljeno je 6 tačaka, četiri na pravoj x i dve na pravoj y. Koliko ima trouglova čija su temena među datim tačkama?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 18

13. Istraživanje je pokazalo da $\frac{2}{3}$ od svih mušterija kupuju proizvod A, a $\frac{1}{3}$ proizvod B. Nakon reklamne kampanje za proizvod B, novo istraživanje je pokazalo da $\frac{1}{4}$ mušterija koje su kupovale proizvod A sada kupuju proizvod B. Koliki deo mušterija sada kupuje proizvod A, a koliki B?

A) $\frac{5}{12}$ proizvod A, a $\frac{7}{12}$ proizvod B;

B) $\frac{1}{4}$ proizvod A, a $\frac{3}{4}$ proizvod B;

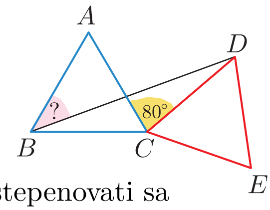
C) $\frac{7}{12}$ proizvod A, a $\frac{5}{12}$ proizvod B;

D) $\frac{1}{2}$ proizvod A, a $\frac{1}{2}$ proizvod B; E) $\frac{1}{3}$ proizvod A, a $\frac{2}{3}$ proizvod B.

14. Koliko je (u procentima) kvadrata među brojevima 1, 2, 3, 4, ..., 10000?

A) 1% B) 1,5% C) 2% D) 2,5% E) 5%

15. ABC i CDE su podudarni jednakostranični trouglovi. Ako je $\sphericalangle ACD = 80^\circ$, koliki je ugao ABD?

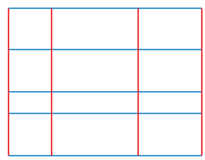


A) 25° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 45°

16. Da bi se dobio broj 8^8, potrebno je broj 4^4 stepenovati sa

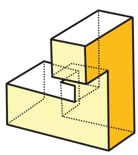
A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 16

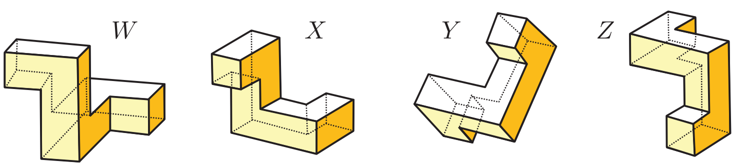
17. Povlačenjem 9 linija (5 vodoravno i 4 uspravno) dobija se tabela sa 12 polja. Ako postavimo 6 vodoravno a 3 uspravno, dobijemo samo 10 polja. Koliko najviše polja može da se dobije sa 15 linija?



A) 22 B) 30 C) 36
D) 40 E) 42

18. Koja tela mogu biti dobijena obrtanjem gornjeg tela u prostoru?





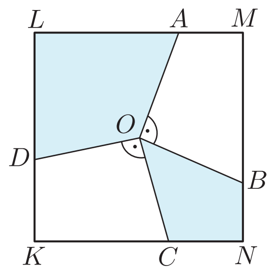
A) W i Y B) X i Z B) samo Y D) nijedno E) W, X i Y

19. Ako se odaberu tri broja iz date tabele tako da se iz svakog reda i svake kolone uzme jedan broj, i ako se ta tri broja saberu, koji se najveći rezultat može dobiti?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

A) 12 B) 15 C) 18
D) 21 E) 24

20. Duži OA, OB, OC i OD su povučene iz centra O kvadrata $KLMN$ do njegovih stranica tako da je $OA \perp OB$ i $OC \perp OD$ (kao što je prikazano na slici). Ako je stranica kvadrata 2, površina osenčenog dela kvadrata je



A) 1 B) 2 C) 2,5
D) 2,25 E) zavisi od izbora tačaka B i C.

Zadaci koji vrede 5 poena

21. Pokvareni digitron ne prikazuje cifru 1. Na primer, ako ukucamo broj 3131, biće prikazan samo broj 33 bez praznog prostora između cifara. Jovanka je ukucala šestocifreni broj u digitron, ali prikazan je samo broj 2007. Na koliko je načina Jovanka mogla dobiti ovaj broj?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

22. Jednom šetaču je potrebno 2 sata da odšeta jednu turu koja se sastoji od: najpre ravnog dela, onda uspona, a zatim povratka (prvo silaženje, pa ravni deo). Na ravnom delu kreće se brzinom od 4 km/h, kad se penje, brzinom 3 km/h, a kad ide nadole, 6 km/h. Kolika je dužina ove ture?

A) ne možemo znati B) 6 km C) 7,5 km D) 8 km E) 10 km

23. Aleksa i Bora zajedno lakši su od Vida i Gorana; Vid i Dušan zajedno lakši su od Đorđa i Bore. Koja od sledećih rečenica sigurno je tačna?

A) Aleksa i Dušan zajedno su lakši od Đorđa i Gorana;

B) Goran i Dušan zajedno su teži od Vida i Đorđa;

C) Goran i Đorđe zajedno su teži od Alekse i Vida;

D) Aleksa i Bora zajedno su lakši od Vida i Đorđa;

E) Aleksa, Bora i Vid zajedno su iste težine kao i Goran, Dušan i Đorđe.

24. Prva cifra četvorocifrenog broja jednaka je broju nula u tom broju, druga cifra jednaka je broju jedinica, treća cifra je jednaka broju dvojki i četvrta cifra jednaka je broju trojki. Koliko takvih brojeva postoji?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25. Pozitivan celi broj n ima 2 pozitivna delioca, dok broj $n+1$ ima 3 pozitivna delioca. Koliko pozitivnih delilaca ima broj $n+2$?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Zavisi od n.

26. Tabela 3×3 sadrži prirodne brojeve (vidi sliku). Ognjen i Strahinja biraju svaki po četiri broja, ali tako da je zbir Ognjenovih brojeva tri puta veći od zbira Strahinjinih brojeva. Broj koji je ostao u tablici je:

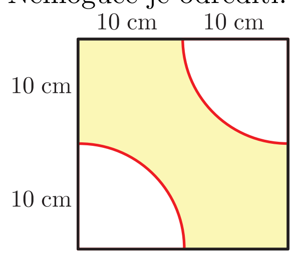
4	12	8
13	24	14
7	5	23

A) 4 B) 7 C) 14
D) 23 E) 24

27. Pet celih brojeva napisano je u krug, tako da nikoja dva ili tri susedna broja ne daju zbir deljiv sa 3. Među njih 5, koliko ih je deljivo sa 3?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Nemoguće je odrediti.

28. Na slici je data keramička pločica čije su dimenzije 20cm$\times$20cm. Želimo da pokrijemo površinu 80cm$\times$80cm takvim pločicama. Tada će se kružne linije (četvrtine kružnice) spojiti. Kolika može biti najveća dužina spojene krive linije u cm?



A) 75π B) 100π C) 105π
D) 110π E) 525π

29. Trocifreni broj podeljen je sa 9. Kao rezultat, početnom trocifrenom broju zbir cifara je smanjen za 9. Koliko trocifrenih brojeva ima takvu osobinu?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 11

30. Datom broju neobičan digitron može da uradi samo sledeće: pomnožiti ga sa 2 ili 3, ili ga stepenovati sa 2 ili 3. Počevši sa brojem 15, šta može biti rezultat ako se digitron primeni 5 puta za redom?

A) $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^6$ B) $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ C) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ D) $2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^4$ E) $2 \cdot 3^2 \cdot 5^6$

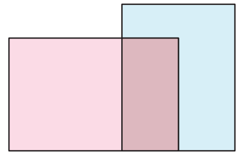
B) 7. i 8. razred

Zadaci koji vrede 3 poena

1. Svake godine takmičenje "Kengur bez granica" održava se trećeg četvrtka u martu. Koji je poslednji mogući datum održavanja takmičenja bilo koje godine?

A) 14. mart B) 15. mart C) 20. mart D) 21. mart E) 22. mart.

2. Koliko četvorouglova bilo koje veličine ima na slici?

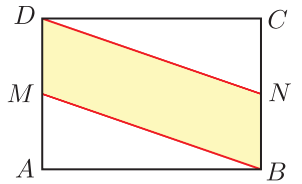


A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 5

3. Odredi vrednost izraza: $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014$.

A) 0 B) 1 C) 2013 D) 2014 E) 4028

4. Površina pravougaonika $ABCD$ je 10. Tačke M i N su središta stranica AD i BC. Kolika je površina četvorougla $MBND$?

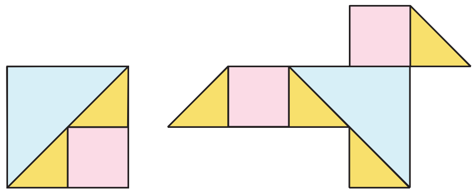


A) 0,5 B) 5 C) 2,5
D) 7,5 E) 10

5. Proizvod dva broja je 36, a njihov zbir je 37. Kolika je njihova razlika?

A) 1 B) 4 C) 10 D) 26 E) 35

6. Mia ima nekoliko kartona kvadratnog oblika površine 4. Ona ih seče na kvadrate i pravougle trouglove na način prikazan na prvoj slici. Zatim je uzela nekoliko dobijenih komada kartona i napravila pticu prikazanu na drugoj slici. Kolika je površina ptice?

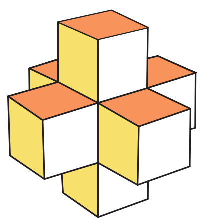


A) 3 B) 4 C) $\frac{9}{2}$ D) 5 E) 6

7. Kofa je do pola puna. Čistač je dodao još 2 litra vode u kofu. Nakon toga tri četvrtine kofe je bilo puno. Koliki litara vode staje u kofu?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

8. Goran je od sedam jediničnih kocki napravio figuru prikazanu na slici. Koliko takvih kocki treba dodati da bi napravio kocku sa ivicom dužine 3?

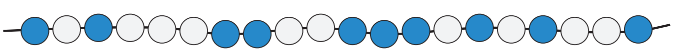


A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

9. Koji od datih izraza ima najveću vrednost?

A) $44 \cdot 777$ B) $55 \cdot 666$ C) $77 \cdot 444$ D) $88 \cdot 333$ E) $99 \cdot 222$

10. Ogrlica na slici napravljena je od belih i plavih perli.



Aleksa skida jednu po jednu perlu sa ogrlice. Uvek skida perlu sa jednog od krajeva. Prestao je da skida perle kada je uzeo petu plavu perlu. Koliko najviše belih perli je Aleksa mogao da skine sa ogrlice?

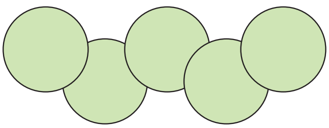
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Jovan ima čas klavira dva puta sedmično, a Nenad ima čas klavira svake druge sedmice. U jednom periodu Jovan je imao 15 časova više od Nenada. Koliko sedmica je dug taj period?

A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

12. Površina svakog kruga na slici je 1 cm^2. Površina preseka dva kruga je $\frac{1}{8}$ cm^2. Kolika je površina oblasti koju pokrivaju ovih 5 krugova?

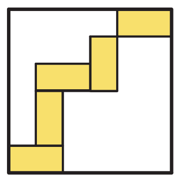


A) 4 cm^2 B) $\frac{9}{2}$ cm^2 C) $\frac{35}{8}$ cm^2 D) $\frac{39}{8}$ cm^2 E) $\frac{19}{4}$ cm^2

13. Ove godine baka, njena ćerka i njena unuka primetile su da je zbir njihovih godina jednak 100. Broj godina svake od njih je stepen broja 2. Koliko godina ima unuka?

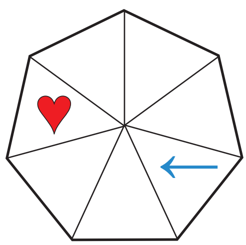
A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

14. Pet podudarnih pravougaonika smešteno je unutar kvadrata stranice dužine 24 cm, kao što je prikazano na slici. Kolika je površina jednog pravougaonika?



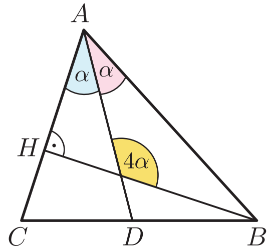
A) 12 cm^2 B) 16 cm^2 C) 18 cm^2
D) 24 cm^2 E) 32 cm^2

15. Srce i strelica su na pozicijama prikazanim na slici. U istom momentu srce i strelica počinju sa pomeranjem. U prvom koraku strelica se pomeri za tri trougaona polja u smeru kretanja kazaljke na satu, a srce za četiri trougaona polja u smeru suprotnom smeru kretanja kazaljke na satu i onda stanu. Zatim se kretanje po istom principu nastavlja dalje. Posle koliko koraka će se srce i strelica prvi put naći u istom trougaonom polju?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) To se nikada neće desiti.

16. Na slici je prikazan trougao ABC, gde je BH visina i AD simetrala ugla kod temena A. Tupi ugao između BH i AD je četiri puta veći od $\sphericalangle DAB$. Odrediti $\sphericalangle CAB$.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

17. Šest dečaka deli stan sa dva kupatila, koja oni počinju da koriste svako jutro u 7.00. Ni u jednom trenutku, ni u jednom kupatilu, nema više od jedne osobe. Oni provode 8, 10, 12, 17, 21 i 22 minuta u kupatilu. Koje je najranije vreme kada oni mogu da završe sa korišćenjem kupatila?

A) 7.45 B) 7.46 C) 7.47 D) 7.48 E) 7.50

18. Dužine stranica pravougaonika su 6 cm i 11 cm. Izabrana je jedna duža stranica i konstruisane su simetrale uglova na njenim krajevima. Te simetrale dele drugu dužu stranicu na tri dela. Kolike su dužine tih delova?

A) 1 cm, 9 cm, 1 cm B) 2 cm, 7 cm, 2 cm C) 3 cm, 5 cm, 3 cm
D) 4 cm, 3 cm, 4 cm E) 5 cm, 1 cm, 5 cm

19. Kapetan Sparov je sa svojom piratskom posadom iskopao nekoliko zlatnika. Oni su podelili zlatnike međusobno tako da je svako dobio isti broj zlatnika. Da su bila 4 pirata manje, svako od njih bi dobio 10 zlatnika više. A, da je bilo 50 zlatnika manje, svako od njih bi dobio 5 zlatnika manje. Koliko zlatnika su iskopali?

A) 80 B) 100 C) 120 D) 150 E) 250

20. Aritmetička sredina dva pozitivna broja je za 30% manja od jednog od tih brojeva. Za koliko procenata je veća od drugog broja?

A) 75% B) 70% C) 30% D) 25% E) 20%

Zadaci koji vrede 5 poena

21. Dejan je upisao brojeve od 1 do 9 u polja tabele 3×3. Počeo je sa brojevima 1, 2, 3 i 4 kao na slici. Ispostavlja se da za polje sa brojem 9 važi da je zbir brojeva u susednim poljima (susedna polja su ona koja imaju zajedničku stranicu) jednak 15. Koliki je zbir brojeva u poljima susednim polju sa brojem 8?

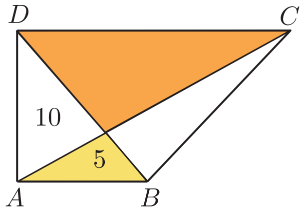
1		3
2		4

A) 12 B) 18 C) 20 D) 26 E) 27

22. Antička vaga ne radi ispravno. Ako je nešto lakše od 1000 g, vaga pokazuje tačnu težinu. Međutim, ako je nešto teže od 1000 g ili teško tačno 1000 g, vaga može da pokaže bilo koju težinu iznad 1000 g. Imamo 5 stvari težina Ag, Bg, Cg, Dg i Eg, od kojih je svaka ispod 1000 g. Kada ih merimo u parovima vaga pokazuje sledeće: $B+D=1200$, $C+E=2100$, $B+E=800$, $B+C=900$ i $A+E=700$. Koja je najveća među ovim težinama?

A) A B) B C) C D) D E) E

23. Četvorougao $ABCD$ ima prave uglove kod temena A i D. Brojevi na slici označavaju površine dva trougla. Kolika je površina četvorougla $ABCD$?



A) 60 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

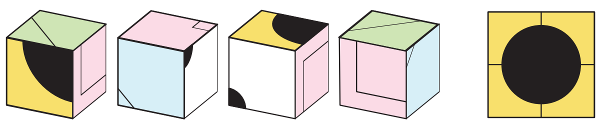
24. Lara i Marija se takmiče u rešavanju problema. Svaka je dobila istu listu od 100 problema. Za svaki problem prva koja ga reši dobija 4 poena, a druga koja ga reši dobija 1 poen. I Lara i Marija su rešile po 60 problema. Zajedno imaju 312 poena. Koliko su problema rešile obe?

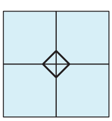
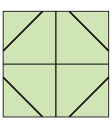
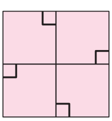
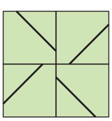
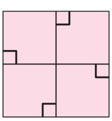
A) 53 B) 54 C) 55 D) 56 E) 57

25. David je vozio bicikl od Edinburga do svog dvorišta. Planirao je da stigne u 15.00 h. Pošto je $\frac{2}{3}$ planiranog vremena potrošio da pređe $\frac{3}{4}$ puta, nakon toga je vozio sporije i stigao tačno na vreme. U kom su odnosu brzina na prvom delu puta i brzina na drugom delu puta?

A) 5 : 4 B) 4 : 3 C) 3 : 2 D) 2 : 1 E) 3 : 1

26. Imamo četiri identične kocke (vidi sliku). One su poređane tako da se na prednjoj strani vidi veliki crni krug (vidi desnu sliku). Šta se tada vidi na suprotnoj strani?



A)  B)  C)  D)  E) 

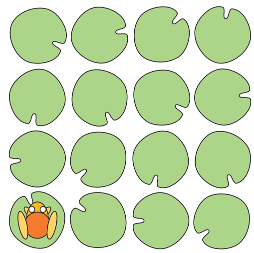
27. Grupa ljudi sastoji se od kraljeva, lažljivaca i kmetova. Svaki kralj uvek govori istinu, svaki lažljivac uvek laže, a svaki kmet naizmenično govori istinu i laže. Svima su postavljena ista pitanja. Na pitanje: "Da li si ti kralj?", njih 17 je odgovorilo potvrdno. Na sledeće pitanje: "Da li si ti kmet?", njih 12 je odgovorilo potvrdno. Koliko kraljeva ima u grupi?

A) 4 B) 5 C) 9 D) 13 E) 17

28. Na tabli je napisano nekoliko različitih prirodnih brojeva. Tačno dva od njih su deljiva sa 2 i tačno 13 od njih je deljivo sa 13. Neka je M najveći od ovih brojeva. Koja je najmanja moguća vrednost za M?

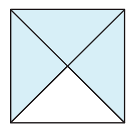
A) 169 B) 260 C) 273 D) 299 E) 325

29. Na ribnjaku se nalazi 16 listova lokvanja raspoređenih u kvadrat 4×4 kao na slici. Žaba sedi na listu u jednom uglu. Ona skače sa jednog lista na drugi ili horizontalno ili vertikalno. Ona uvek preskoči preko bar jednog lista i nikada ne staje dva puta na isti list. Koji je najveći broj listova (uključujući i onaj na kome sedi) na koje žaba može da skoči?



A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

30. Kvadrat 5×5 je napravljen od pločica 1×1, koje su sve sa šarom kao na slici. Dve susedne pločice imaju istu boju sa obe strane zajedničke ivice. Obim velikog kvadrata sastoji se od plavih i belih segmenata dužine 1. Koji je najmanji mogući broj takvih jediničnih plavih segmenata?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

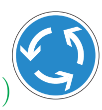
C) 7. i 8. razred

Zadaci koji vrede 3 poena

1. Koliko ima celih brojeva između 20,16 i 3,17?

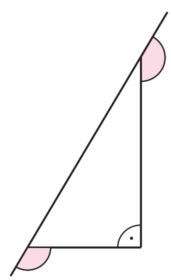
A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

2. Koji od sledećih saobraćajnih znakova ima najviše osa simetrije?

A)  B)  C)  D)  E) 

3. Koliki je zbir dva označena ugla na slici?

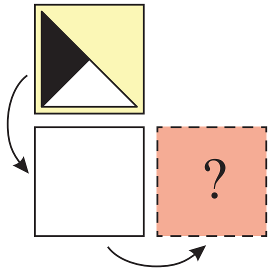
A) 150° B) 180° C) 270° D) 320° E) 360°



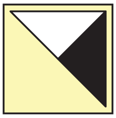
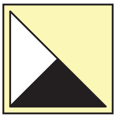
4. Jelena je trebala dodati 26 nekom broju. Umesto toga ona je oduzela 26 i dobila -14. Koji rezultat je trebala da dobije?

A) 28 B) 32 C) 36
D) 38 E) 42

5. Jovana obrće kartu oko njene donje stranice, a zatim oko desne stranice, kao što je prikazano na slici.



Šta ona vidi nakon obrtanja?

A)  B)  C)  D)  E) 

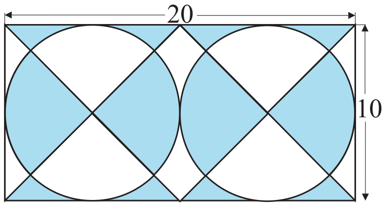
6. Stefan je spakovao 555 grupa sa po 9 kamenčića na jednu gomilu. Onda je dobijenu gomilu razdelio na grupe sa po 5 kamenčića. Koliko je grupa dobio?

A) 999 B) 900 C) 555 D) 111 E) 45

7. U jednoj školi 60% nastavnika, tj. njih 45, dolazi na posao biciklom. Samo 12% nastavnika te škole dolazi u školu automobilom. Koliko nastavnika dolazi u školu automobilom?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

8. Kolika je površina obojenog dela na slici?

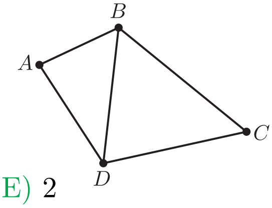


A) 50 B) 80 C) 100 D) 120 E) 150

9. Dva komada konopca imaju dužine 1 m i 2 m. Aleksa je isekao ove konopce na nekoliko delova. Svi delovi imaju jednake dužine. Koji od sledećih brojeva ne može predstavljati ukupan broj delova koje je Aleksa dobio?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 15 B

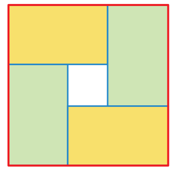
10. Četiri grada A, B, C i D su povezana putevima, kao na slici. Trka se vozi tako što se svakim putem prolazi tačno jednom, polazi se iz B i završava u D. Koliko mogućih ruta za trku ima?



A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Na slici su prikazana 4 podudarna pravougaonika koji se nalaze unutar kvadrata. Obim svakog pravougaonika je 16 cm. Koliki je obim kvadrata?



A) 16 cm B) 20 cm C) 24 cm
D) 28 cm E) 32 cm

12. Petra ima 49 plavih perli i jednu crvenu perlu. Koliko perli Petra treba da skloni da bi 90% njenih perli bile plave?

A) 4 B) 10 C) 29 D) 39 E) 40

13. Koji od sledećih razlomaka ima vrednost, najbližu $\frac{1}{2}$?

A) $\frac{25}{79}$ B) $\frac{27}{59}$ C) $\frac{29}{57}$ D) $\frac{52}{79}$ E) $\frac{57}{92}$

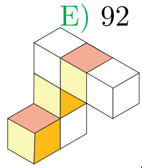
14. Ivan je zapisao rezultate četvrtfinalnih mečeva, polufinalnih mečeva i finalnog meča nokaut faze turnira. Rezultati su (ne obavezno ovim redom): Bojan je pobedio Aleksu, Vanja je pobedio Gradimira, Emilijan je pobedio Živadina, Emilijan je pobedio Vanju, Vanja je pobedio Bojana, Dušan je pobedio Đurđa, Emilijan je pobedio Dušana. Ko je igrao u finalu?

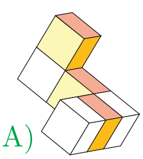
A) Emilijan i Živadin B) Emilijan i Vanja C) Vanja i Bojan
D) Emilijan i Dušan E) Vanja i Gradimir

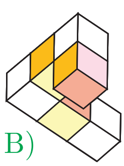
15. Petar, Pavle i Lazar su trojke (tri brata rođena istog dana). Njihova braća blizanci Predrag i Nenad su 3 godine mlađi. Koji od sledećih brojeva može predstavljati zbir godina petorice braće?

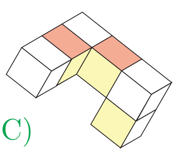
A) 36 B) 53 C) 76 D) 89 E) 92

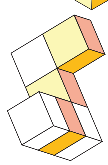
16. Ana je zalepila nekoliko kocki i dobila figuru kao na slici desno. Ona rotira figuru i posmatra je iz različitih uglova. Koju od sledećih figura ona ne može da vidi?

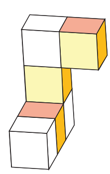



A)

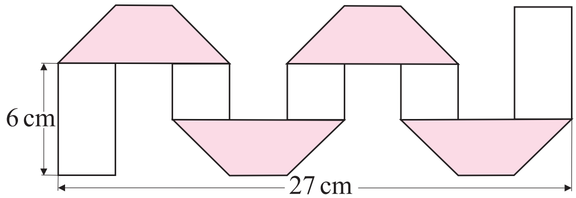

B)


C)


D)


E)

17. Pravougaona papirna traka širine 3 cm sa jedne strane je bela, a sa druge crvena. Marija presavija traku, kao što je prikazano na slici. Kolika je dužina originalne trake?

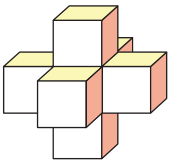


A) 36 cm B) 48 cm C) 54 cm D) 57 cm E) 81 cm

18. Dva kengura, Joca i Peca, počinju da skaču u istom trenutku, iz iste pozicije, u istom smeru. Oba kengura skaču po jedan skok u sekundi. Svaki Jocin skok je 6 m dug. Pecin prvi skok je dug 1 m, drugi 2 m, treći 3 m i tako dalje. Posle koliko skokova će Peca stići Jocu?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

19. Sedam standardnih kockica za igru zalepljeno je tako da je dobijena figura prikazana na slici. (Kod standardnih kocki zbir broja tačaka na naspramnim stranama jednak je 7.) Strane kockica koje su zalepljene jedna za drugu imaju isti broj tačkica. Koliko tačkica ima ukupno na površini dobijene figure?



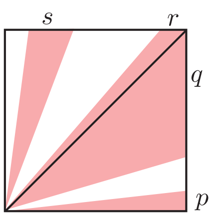
A) 24 B) 90 C) 95 D) 105 E) 126

20. U odeljenju je 20 učenika. Oni sede po dvoje u klupama, pri čemu tačno trećina dečaka sedi u klupi sa devojčicom, a tačno polovina devojčica sedi u klupi sa dečakom. Koliko dečaka ima u tom odeljenju?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

Zadaci koji vrede 5 poena

21. Unutar kvadrata površine 36 obojen je deo kao na slici. Površina obojenog dela je 27. Odredi $p + q + r + s$.



A) 4 B) 6 C) 8

D) 9 E) 10

22. Teodorov sat kasni 10 minuta, a on misli da žuri 5 minuta. Lazarov sat žuri 5 minuta, a on misli da kasni 10 minuta. U istom trenutku njih dvojica su pogledali na svoje satove. Teodor je mislio da je 12.00. Šta je Lazar mislio, koliko je sati?

A) 11.30 B) 11.45 C) 12.00 D) 12.30 E) 12.45

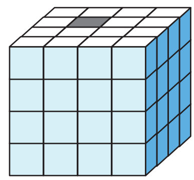
23. Dvanaest devojaka srelo se u kafeu. Pojele su po 1,5 kolača u proseku. Nijedna od njih nije pojela više od dva kolača i dve od njih su samo pile mineralnu vodu. Koliko je devojaka pojelo po dva kolača?

A) 2 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

24. Crvenkapa je nosila kolače trima bakama. Krenula je sa korpom punom kolača. Neposredno pre nego što bi ušla u kuću svake od baka, vuk bi pojeo polovinu kolača iz korpe. Kada je izašla iz kuće treće bake u korpi više nije imala kolače. Svakoj baki je dala isti broj kolača. Koji od sledećih brojeva sigurno deli broj kolača koje je Crvenkapa imala u korpi kada je krenula?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 D) 9

25. Kocka na slici sastoji se od 64 male kocke. Tačno jedna kocka je siva. Prvog dana siva kocka promeni boju svih svojih susednih kocki u sivu (kocke su susedne ako imaju zajedničku stranu). Drugog dana sve sive kocke urade isto. Koliko će sivih kocki biti na kraju drugog dana?

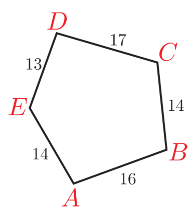


A) 11 B) 13 C) 15 D) 16 E) 17

26. Nekoliko različitih prirodnih brojeva napisano je na tabli. Proizvod dva najmanja je 16, a proizvod dva najveća je 225. Koliki je zbir svih napisanih brojeva?

A) 38 B) 42 C) 44 D) 58 E) 243

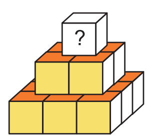
27. Na slici je petougao. Sofija je nacrtala pet krugova sa centrima A, B, C, D i E tako da se dva kruga na svakoj stranici petougla dodiruju. Dužine stranica petougla su date (vidi sliku). Koja je tačka centar najvećeg kruga koji je Sofija nacrtala?



A) A B) B C) C

D) D E) E

28. Kalina je zapisala različite prirodne brojeve na 14 kocki piramide na slici. Zbir devet brojeva zapisanih na donjim kockama je 50. Broj zapisan na svakoj od ostalih kocki jednak je zbiru brojeva zapisanih na četiri kocke koje se nalaze ispod nje. Koji je najveći broj koji je Kalina mogla zapisati na kocki sa znakom pitanja?



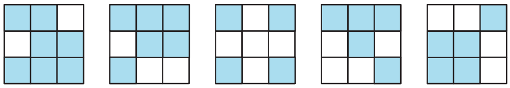
A) 80 B) 98 C) 104 D) 110 E) 118

29. Voz ima 5 vagona i u svakom od njih je bar po jedan putnik. Dva putnika su “susedi” ako su u istom vagonu ili ako su u susednim vagonima. Svaki putnik ima ili tačno 5 ili tačno 10 “suseda”. Koliko ukupno putnika ima u vozu?

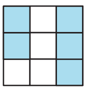
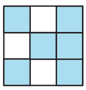
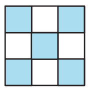
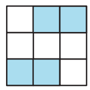
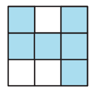
A) 13 B) 15 C) 17 D) 20

E) Ima više od jedne mogućnosti.

30. Kocka $3 \times 3 \times 3$ je napravljena od 15 plavih i 12 belih kocki. Pet strana velike kocke je dato na slici.



Koja od sledećih slika predstavlja šestu stranu velike kocke?

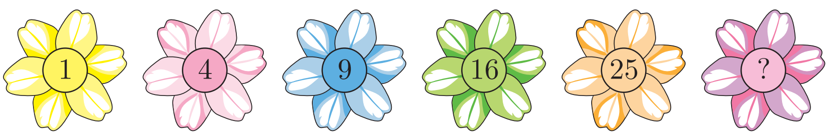
A)  B)  C)  D)  E) 

8.2. Mislisa

D) 7. razred

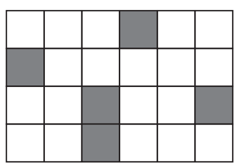
Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

1. U cvetiće su upisani brojevi po nekom pravilu. Koji broj treba upisati u šesti cvetić?



A) 27 B) 28 C) 30 E) 32 E) 36

2. Koliko belih polja na ovoj slici treba obojiti sivom bojom pa da broj sivih polja bude jednak polovini broja belih polja?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

E) takvo bojenje je nemoguće.

3. Koliko ima racionalnih među navedenim brojevima:

$0;\ -2;\ \sqrt{2}-1;\ 1{,}73;\ \sqrt{5};\ 3{,}14;\ \pi;\ 13{,}333...;\ \sqrt{49};\ \dfrac{23}{2008}$?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7.

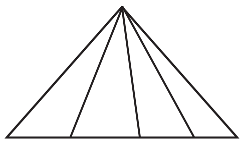
4. Šestina i po nekog broja iznosi 5. Koji je to broj?

A) 60 B) 20 C) 12 D) 6 E) 1

5. Izraz $2a^2 \cdot 3a$ drugačije se može zapisati:

A) $5a^2$ B) $5a^3$ C) $6a$ D) $6a^2$ E) $6a^3$

6. Koliko na ovoj slici vidiš trouglova?



A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

7. Utvrdi koliko ovde ima netačnih jednakosti:

a) $2+3^2=11$;

b) $-5^2+6=-19$;

c) $-10\cdot(-0,3)^2=-10\cdot(-0,09)=0,9$;

d) $\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot(-3)^2-0,5^2:\left(\frac{1}{2}\right)^3=18$;

e) $\left(1-\sqrt{\frac{16}{25}}\right)\cdot 1\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=2$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. Koliko dijagonala ima konveksni desetougao?

A) 8 B) 20 C) 27 D) 35 E) 39

Zadaci koji se ocenjuju sa 4 boda

9. Koja od sledećih formula je tačna samo za $a=0$?

A) $-a^2=(-a)^2$ B) $-a^3=(-a)^3$ C) $a^2=a^3$

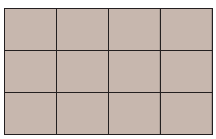
D) $a^3=a$ E) $a^2=a$

10. Neka je a celi broj. Koja je tvrdnja tačna za svako $a\in Z$?

A) a je pozitivan broj B) $a+2$ je paran broj C) $3a>a$

D) $a(a+1)$ deljiv je sa 2 E) $2a+1<2a$

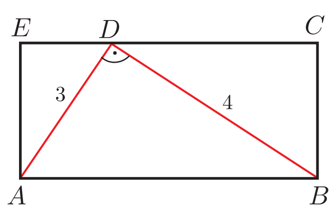
11. Janko je čokoladu kao na slici izlomio na 12 "kockica". Koliko je puta Janko vršio lomljenje?



A) 6 B) 8 C) 10

D) 11 E) 12

12. Četvorougao $ABCD$ kojeg vidimo na slici je pravougaonik. Prema podacima sa slike izračunaj površinu tog pravougaonika.



A) 12 B) 14 C) 16

D) 17 E) 18

13. Među navedenim brojevima najveći je:

A) 2^{32} B) 4^{15} C) 8^{11} D) 16^{8} E) 32^{6}

14. Koliko je

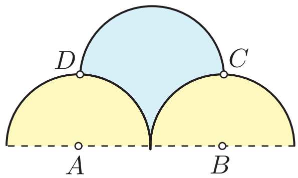
$(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot \ldots \cdot (-1)^{2006} \cdot (-1)^{2007} \cdot (-1)^{2008}$?

A) -2008 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2008

15. Dat je krug poluprečnika r. Koliko ima krugova poluprečnika r koji dodiruju dati krug, a i međusobno se dodiruju, dva po dva?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

16. Svaka od tri polukružnice ima poluprečnik 2 cm. Četvorougao $ABCD$ je pravougaonik. Izrazi (u cm^2) površinu plave figure.



A) 7 B) $2\pi - 1$ C) 8

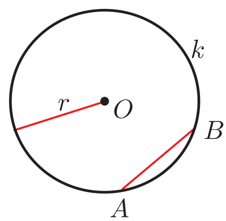
D) 2π E) $2\pi + 1$

17. Sava čuva u kutiji 8 crvenih, 5 plavih i 3 žuta klikera. Koliko najmanje klikera treba Sava da uzme iz kutije, ne gledajući u kutiju, da bude siguran da je uzeo 3 raznobojna klikera?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 11

Zadaci koji se ocenjuju sa 5 bodova

18. Na kružnici k poluprečnika r izabrane su tačke A i B, tako da je $AB = r$. Pod kojim uglom se duž AB (tetiva kruga) vidi iz ma koje tačke kružnice k (različite od uočenih tačaka A i B)?



A) $60°$ B) $90°$ C) $30°$ ili $120°$

D) $30°$ ili $150°$ E) $60°$ ili $120°$

19. Napisana su dva broja, prvi i drugi. Prvom broju dodat je drugi i tako je dobijen treći broj. Drugom broju dodat je treći i tako je dobijen četvrti broj, i tako dalje. Čemu će biti jednak zbir šest napisanih brojeva, ako peti broj iznosi 7?

A) 28 B) 26 C) 24 D) 22 E) 20

20. Voja je zamislio prost trocifreni broj čije su sve cifre različite. Koja cifra može biti poslednja cifra toga broja, ako se zna da je ona jednaka zbiru prve dve cifre toga broja?

A) 1 B) 3 C) 7 D) 3 ili 1 E) Nemoguće je odrediti.

21. Nađi 2008. cifru posle zapete (zareza) u decimalnom zapisu razlomka $\frac{1}{7}$.

A) 1 B) 2 C) 7 D) 8 E) 9

22. Ako je $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$, onda vrednost polinoma $P(x, y) = x^{2008} + 2008y$ iznosi:

A) 0 B) 2008 C) 4015 D) 4016 E) 4017

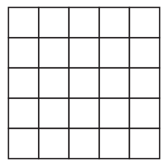
23. Kolika je površina paralelograma čije se dijagonale $d_1 = 12$ cm i $d_2 = 9$ cm seku pod uglom od $30°$?

A) 21 B) 25 C) 27 D) 28 E) 29

24. Poznato je da se, uzimajući po tri od pet datih duži, mogu sastaviti četiri različita pravougla trougla. Naći odnos između najmanje i najveće od tih duži.

A) $1 : \sqrt{2}$ B) $1 : 2$ C) $1 : \sqrt{5}$ D) $1 : 4$ E) $1 : 5$

25. Koliki je zbir površina svih kvadrata koji se mogu uočiti na kvadratnoj mreži 5×5, ako je površina kvadrata 1×1 jednaka 1 cm^2.



A) 25 B) 121 C) 225

D) 259 E) 360

E) 7. razred

Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

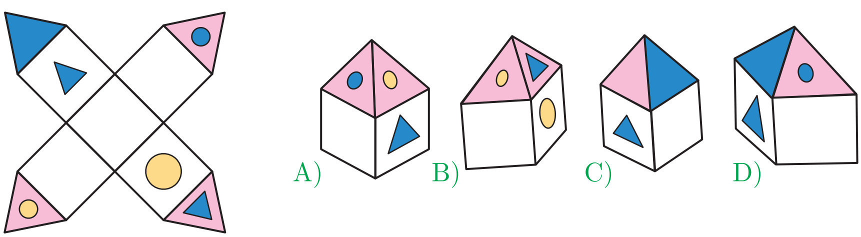
1. Koliko je $(2 + 0 + 1 + 4 - 20 + 14)^{2014}$?

A) 2014 B) 2010 C) -729 D) 729 E) 1

2. Koliko je $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)$?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 3

3. Figura na slici (dole levo) predstavlja mrežu jedne od "kućica" označenih sa A, B, C, D. Koje? Pološina mreže je neobojena.



A) A B) B C) C D) D E) Nijedne od prikazanih

4. *Mali računski zadatak*: Koliko je $(1,25 - 0,5) : \left(1\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)$?

A) $1,25$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{14}{15}$ D) $\frac{15}{14}$ E) $1,5$

5. Trećina i po nekog broja je 3. Koji je to broj?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

6. Koliko ima dvocifrenih prirodnih brojeva koji se zapisuju različitim ciframa?

A) 77 B) 78 C) 80 D) 81 E) 90

7. Koliko je $\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}}$?

A) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{5}{12}$

8. Na početku šahovske partije, sve figure na tabli zauzimaju tačno 50% svih polja na tabli. Koliki je procenat zauzetih polja, kada nakon odigranog određenog broja poteza na tabli ostane 9 belih i 7 crnih figura?

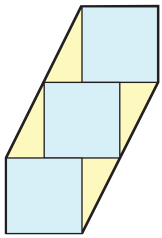
A) 25% B) 30% C) 35% D) 45% E) 50%

Zadaci koji se ocenjuju sa 4 boda

9. Kateta jednakokrakog pravouglog trougla je $\sqrt{5}$. Njegova hipotenuza je:

A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $5\sqrt{5}$ E) $\sqrt{10}$

10. Kojim od ponuđenih izraza je predstavljena površina figure (na slici) koja je sastavljena od 3 jednaka kvadrata i 4 podudarna pravougla trougla? Dužina stranice kvadrata je a, a teme gornjeg kvadrata je središte stranice donjeg kvadrata.



A) $3a^2 + \frac{4a}{3}$ B) $3a^2 + \frac{3a}{2}$ C) $4a^2$

D) $5a^2$ E) $6a^2$

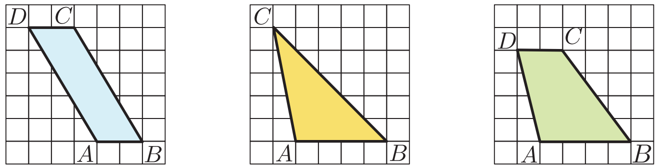
11. Koliki su uglovi trapeza čije su stranice 2 cm, 2 cm, 2 cm, 4cm?

A) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ B) $45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$

C) $45^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ D) $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$

E) Ne može se utvrditi.

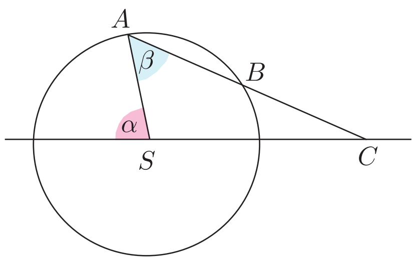
12. Na kojoj od ovih slika je obojena figura najveće površine?



A) Sl. 1 B) Sl. 2 C) Sl. 3 D) Sve su jednake;

E) Nemoguće je izračunati.

13. Tačka S predstavlja centar kruga, a duži SA i BC su jednake. Koje od sledećih tvrđenja je tačno:



A) $2\alpha = 3\beta$

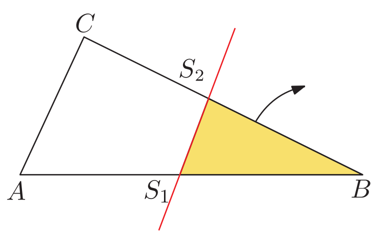
B) $\alpha = 2\beta$

C) $\alpha = \beta$

D) $\alpha + \beta = 90^\circ$

E) $\alpha + 2\beta = 180^\circ$

14. Koliki deo površi trougla ABC odseca prava koja prolazi kroz središta S_1 i S_2 dveju stranice tog trougla?



A) polovinu B) trećinu

C) četvrtinu D) petinu E) osminu

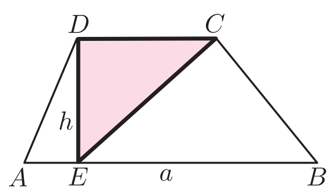
15. Ako zbir dva ugla paralelograma iznosi 88°, onda je veći ugao tog paralelogramna jednak:

A) 44° B) 92° C) 134° D) 136° E) 176°

16. Tetive AB i BC datog kruga k međusobno su normalne. Udaljenost centra kruga od tetive AB je 4 cm, a od tetive BC je 3 cm. Izračunaj prečnik tog kruga.

A) 6 cm B) 8 cm C) 10 cm D) 12 cm E) 14 cm

17. Izračunaj površinu trapeza $ABCD$, ako se zna da je veća osnovica $AB = a = 22$ cm, visina $h = 10$ cm i površina obojenog trougla iznosi 60 cm^2.

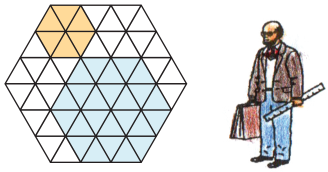


A) 120 cm^2 B) 140 cm^2 C) 150 cm^2

D) 160 cm^2 E) 170 cm^2

Zadaci koji se ocenjuju sa 5 bodova

18. Koliko pravilnih šestouglova ima na ovoj slici?



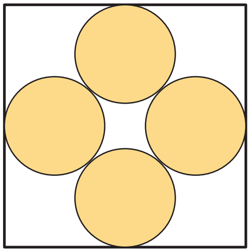
(Da podsetimo: šestougao je pravilan ako su mu sve stranice jednake i svi unutrašnji uglovi jednaki.)

A) 30 B) 39 C) 28 D) 27 E) 26

19. Zbir rešenja jednačine $5x^2 - 10x = 0$ je:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 15

20. Svaka od četiri kružnice ima poluprečnik 1 i dodiruje stranicu kvadrata, kao što se vidi na slici. Kolika je dužina stranice kvadrata?



A) 2 B) 4 C) $2\sqrt{5}$
D) $2+2\sqrt{2}$ E) $4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

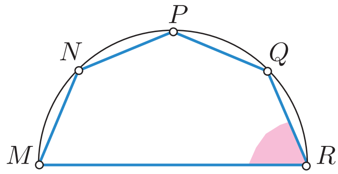
21. Kojom cifrom počinje najmanji prirodni broj kome je zbir cifara 2014?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 3 E) 1

22. Ugao između poluprečnika upisane i opisane kružnice pravilnog mnogougla je $11°15'$. O kom mnogouglu je reč?

A) osmougao B) desetougao C) dvanaestougao
D) šesnaestougao E) Nema dovoljno podataka.

23. Tačke M, N, P, Q i R pripadaju polukružnici (čiji je prečnik MR) i nalaze se na jednakim rastojanjima. Izračunaj ugao $\sphericalangle MRQ$ u petouglu $MNPQR$.



A) $45°$ B) $60°$ C) $65°30'$
D) $67°30'$ E) $75°$

24. Koliko ima celih brojeva x za koje je $\dfrac{2x+8}{2x+5}$ takođe celi broj?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Nema takvih brojeva

25. U prvoj flaši se nalazi 3 litra vode, a u drugoj 2 litra soka. Obe flaše su pune. Milica je tečnosti iz obeju flaša prelila u jedan lonac, sve pomešala, a zatim dobijenom mešavinom napunila obe flaše. Uporedi količinu vode u flaši od 2 litra sa količinom soka u flaši od 3 litra (u dobijenoj mešavini).

A) Ima više vode u drugoj flaši, nego soka u prvoj flaši.

B) Ima više soka u prvoj flaši, nego vode u drugoj flaši.

C) U prvoj flaši uvek ima više soka nego vode.

D) Te količine su jednake.

E) Ne može se utvrditi.

F) 8. razred

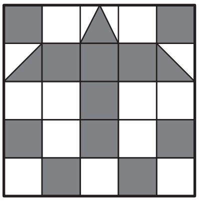
Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

1. Ako se zna da je $M = 4$ kad je $N = 6$ i $P = 24$, koji od sledećih odgovora je tačan:

A) $M = N \cdot P$ B) $M = \dfrac{N}{P}$ C) $M = \dfrac{P}{N}$

D) $M = N + P$ E) $M = N - P$

2. Koji je deo površine velikog kvadrata 5×5 obojen crnom bojom?



A) četvrtina B) trećina

C) dve petine D) polovina E) tri petine

3. Milica ima 3 majice više nego Jelena. Ako sa n označimo broj majica koje ima Milica, kako možemo (pomoću n) izraziti broj majica koje ima Jelena?

A) $n - 3$ B) $n + 3$ C) $3n$ D) $\dfrac{n}{3}$ E) $3 - n$

4. Ako su x i y pozitivni brojevi, koja od sledećih formula znači da je broj x pet puta veći od broja y:

A) $x - y = 5$ B) $y = 5 \cdot x$ C) $y : x = 5$ D) $x = 5 \cdot y$ E) $x > 5 \cdot y$

5. Treba 105 žetona rasporediti u 6 redova tako da u svakom redu bude po 1 žeton manje nego u prethodnom. Koliko žetona ima u prvom (najdužem) redu?

A) 15 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

6. Evo kako je Pera na kontrolnoj vežbi rešio zadatke:

1) Broj čija $\frac{1}{2}$ iznosi $\frac{1}{8}$ je broj $\frac{1}{4}$.

2) $\frac{3}{4}$ broja 48 iznosi 64.

3) 15% broja 60 iznosi 12.

4) Broj 4 je manji od broja 5 za 20%.

5) Broj 5 je veći od broja 4 za 25%.

Koliko je zadataka Pera tačno rešio?

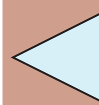
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

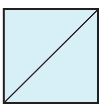
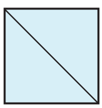
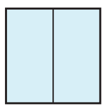
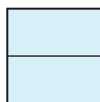
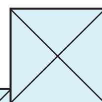
7. Točak jednog kamiona ima spoljašnji prečnik 1 m. Na nekom putu taj točak je načinio 1000 punih obrta. Koliko je metara za to vreme prešao kamion? (Uzmi da je $\pi \approx 3,14$.)

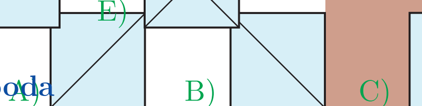
A) 3,14 B) 62,8 C) 314

D) 3140 E) 6280

8. Od kartona je izrezana figura prikazana na slici. Trougaona “krilca” su zatim po crvenim linijama savijena na gore dok se sve ivice susednih “krilaca” nisu dodirnule. Kako bi izgledalo dobijeno telo kada bi se posmatralo direktno odozgo?



A)  B)  C)  D)  E) 

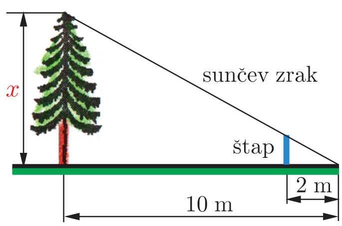


Zadaci koji se ocenjuju ca 4 boda

9. Koliko se trocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 0, 3, 4 i 5?

A) 12 B) 16 C) 24 D) 48 E) 64

10. Drvo pravi senku dužine 10 metara. Istovremeno štap visok 1,3 metra pravi senku dužine 2 metra. Koliko je visoko drvo?



A) 20 B) 18 C) 13

D) 6,5 E) 1,3

11. Ivan je zamislio jedan broj. Povećao ga je za 1, a zatim to što je dobio podelio sa 4. Tako je dobio broj koji je za 2 manji od zamišljenog broja. Koji je broj Ivan zamislio?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

12. *Iz "Nevena" Čika Jove Zmaja*

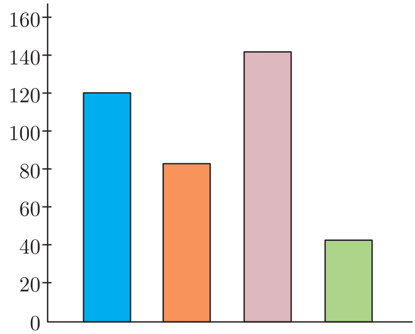
"Deda Sima kovandžija, kad je prodao lane med, dobio je izvesnu svotu novca. Te novce je hteo da pokloni svojim kćerima, svakoj jednako. Da je dao svakoj po 16 forinti preostalo bi mu još 6 forinti. Al' on dometnu još jednu forintu. I onda mu je svaka kći dobila po 17 forinti. Koliko je kćeri imao i koliko je forinti dobio za med?" (Forinta – stara novčana jedinica)

A) 3 kćeri, 128 forinti; B) 4 kćeri, 90 forinti; C) 5 kćeri, 138 forinti; D) 6 kćeri, 120 forinti; E) 7 kćeri, 118 forinti.

13. Dijagonala jedne kocke je D. Površina te kocke je:

A) $3D^2$ B) $2D^3$ C) $D\sqrt{2}$ D) $2D^2$ E) $D\sqrt{3}$

14. U jednoj radnji, na početku školske godine, prodavali su sledeće artikle: sveske, olovke, lenjire i gumice. Grafikon prikazuje broj svezaka, olovaka, lenjira i gumica koje su prodate za nedelju dana. Na grafikonu nema naziva artikala, ali se zna da su se najčešće prodavale sveske, a najređe gumice. Zna se još i to da je prodato više olovaka nego lenjira. Koliko je olovaka prodato?



A) 40 B) 80 C) 90 D) 100 E) 120

15. Dve trećine ljudi koji prisustvuju početku sastanka su muškarci. Niko ne izlazi, ali na sastanak dolazi još 10 muškaraca i 10 žena. Koje od sledećih tvrđenja je tačno sada?

1° Na sastanku ima više muškaraca nego žena.

2° Na sastanku je isti broj muškaraca i žena.

3° Na sastanku je više žena nego muškaraca.

4° Na osnovu datih podataka ne može se zaključiti da li ima više žena ili muškaraca.

A) 1° B) 2° C) 3° D) 4° E) Ni jedno

16. Bazen oblika kvadra ima dimenzije 20 m, 15 m i 2,4 m. Napunjen je vodom do $\frac{2}{3}$ svoje dubine (visine). Koliko hektolitara vode ima u njemu?

A) 4,8 B) 48 C) 480 D) 4800 E) 48000

17. Bočna strana pravilne šestostrane prizme je kvadrat stranice $a = 10$ cm. Površina te prizme (u cm^2) je:

A) $300(2+\sqrt{3})$ B) $600+\sqrt{3}$ C) $300+2\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $300+\sqrt{3}$

Zadaci koji se ocenjuju sa 5 bodova

18. Ako je brzina kretanja dečaka 3 puta veća od brzine kretanja devojčice, kojom se brzinom (u m/s) kretao dečak, ako su se na pravolinijskoj stazi sreli posle 8 sekundi od datog znaka za start, pri čemu je njihova međusobna udaljenost pre starta bila 32 metra?

A) 32 B) 16 C) 8 D) 4 E) 3

19. Koliko ovde ima tačnih formula (jednakosti):

1° $(a-3b)^2 = a^2 - 3ab + 9b^2$

2° $(x-3y)\cdot(3x+y) = 3x^2 - 3y^2$

3° $(a+2x)\cdot(2a+x) = 2a^2 + 5ax + 2x^2$

4° $(m+3p)^2 = m^2 + 6mp + 3p^2$

5° $a^2 - \frac{4}{9} = \left(a+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(a-\frac{2}{3}\right)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. Joca je u kutiji imao 80 klikera. Neki su bili crveni, neki plavi, a neki žuti. Došao je Moca i zamolio Jocu da mu pokloni 12 klikera iste boje. Joca je pristao, ali pod uslovom da Moca tačno odgovori na sledeće pitanje: “Koliko najmanje klikera treba da izvadimo iz kutije, ne gledajući u kutiju, da bismo bili sigurni da se među njima nalazi 12 klikera iste boje?”

Pomozite Moci!

A) 12 B) 13 C) 32 D) 34 E) 36

21. Parni broj a pri deljenju sa 3 daje ostatak 1. Čemu je jednak ostatak pri deljenju toga broja sa 6?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

22. *Priče iz 1001 noći*

Jato golubova poletelo je prema visokom drvetu. Deo jata je sleteo na drvo, a drugi je sleteo pod drvo. Golub sa grane reče onima ispod drveta: “Ako bi jedan od vas doleteo ka nama na granu, ostalo bi vas dole trećina od celog jata, a ako bi jedan od nas sleteo ka vama bilo bi nas jednako.”

Koliko je golubova bilo na drvetu?

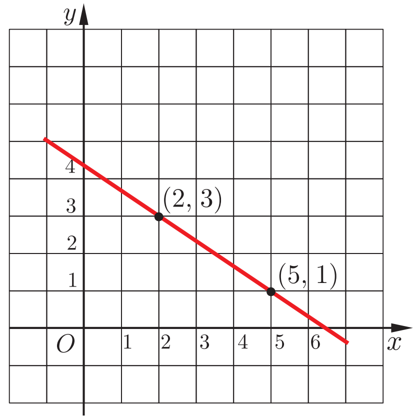
(Ovaj zadatak možemo naći u 458. priči u prelepoj zbirci Šeherzadinih priča iz “1001 noći”.)

A) 24 B) 14 C) 12 D) 10 E) 7

23. Nektar koji sakupljaju pčele sadrži oko 70% vode. Med koji prave te pčele sadrži oko 17% vode. Koliko nektara treba da sakupe pčele za 1 kg meda?

A) 17,7 kg B) 1,77 kg C) 2,77 g D) 27,7 kg E) 2,77 kg

24. Koja od navedenih jednačina odgovara nacrtanom grafiku?



A) $2x - 3y = 13$;

B) $2x + 3y = 13$;

C) $3x + 2y = 12$;

D) $3x - 2y = 12$;

E) $13x + 9y = 117$.

25. *"Ko će uzeti poslednji žeton"* Na gomili se nalazi 100 žetona. Igrači naizmenično uzimaju žetone sa gomile. U jednom potezu jedan igrač može uzeti najviše 5 žetona. Pobednik je onaj igrač koji uzme i poslednji žeton sa gomile. Koji igrač može, pri pravilnoj igri, da osigura pobedu, bez obzira na poteze svog partnera?

A) Prvi, ako prvi put uzme 1 žeton.

B) Drugi, ako prvi put uzme 2 žetona.

C) Drugi, ako prvi put uzme 3 žetona.

D) Prvi, ako prvi put uzme 4 žetona.

E) Drugi, ako prvi put uzme 5 žetona.

G) 8. razred

Zadaci koji se ocenjuju sa 3 boda

1. Koliko je $(2 + 0 + 1 - 4)^{2+0+1+4}$?

A) 7 B) 7^7 C) -1 D) -17 E) 2014

2. *Zamisli*

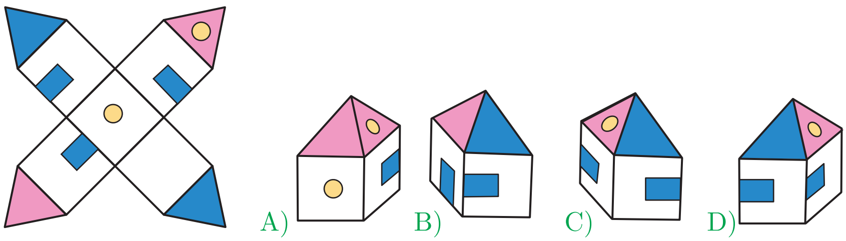
Zamisli svoju drugaricu koja se našla u koordinatnom početku Dekartovog koordinatnog sistema i u rukama drži uputstvo u kojem piše:

"Idi 3 koraka na sever, pa 5 koraka na zapad, zatim 4 koraka na jug i 2 koraka na istok. Tu te čeka prijatno iznenađenje!"

U kojoj tački se nalazi to iznenađenje, ako se zna da jedan korak tvoje drugarice predstavlja jedan podeljak na mreži i da je osa Oy usmerena prema severu?

A) $(3, 1)$ B) $(3, -1)$ C) $(-3, -1)$ D) $(3, 0)$ E) $(-3, 1)$

3. Figura na slici (dole levo) predstavlja mrežu jedne od "kućica" označenih sa A, B, C, D. Koje? (Poleđina mreže je neobojena.)



A) A B) B C) C D) D E) Ni jedne od prikazanih

4. Rešenje jednačine $1 - \dfrac{3x-5}{8} = \dfrac{3-x}{4}$ je:

A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) -3

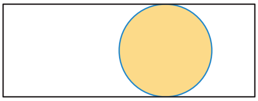
5. Koliko je kubnih metara zemlje potrebno da se bašta oblika pravougaonika naspe slojem zemlje debljine 5 dm, ako je dužina bašte 18 m, a širina 6 m?

A) 24 B) 48 C) 54 D) 72 E) 108

6. Razlika dva broja je 470. Umanjenik je tri puta veći od umanjioca. Umanjilac je prirodni broj koji je:

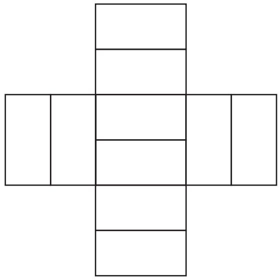
A) manji od 100; B) veći od 100 i manji od 150;
C) veći od 150 i manji od 200; D) veći od 200 i manji od 250;
E) veći od 300.

7. Krug dodiruje stranice pravougaonika, kao što je prikazano na slici. Površina kruga je četiri puta manja od površine pravougaonika. Odnos duže i kraće stranice pravougaonika je:



A) $1 : 4$ B) $4 : 1$ C) $1 : \pi$ D) $\pi : 1$ E) $\dfrac{\pi}{3}$

8. Koliko ukupno pravougaonika ima na ovoj slici?



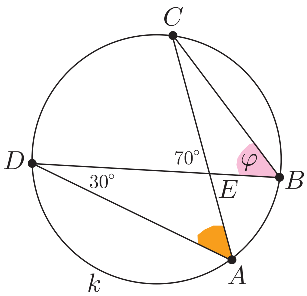
A) 28 B) 29 C) 31 D) 33 E) 35

Zadaci koji se ocenjuju sa 4 boda

9. Jak vetar prelomio je stablo visoko 8 metara. Njegov vrh dotakao je zemlju na udaljenosti 4 metra od podnožja stabla. Na kojoj je visini stablo prelomljeno?

A) 1 m B) 2 m C) 3 m D) 4 m E) 5 m

10. Prema podacima sa slike odredi koliki je ugao φ.



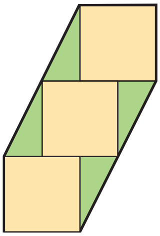
A) 40° B) 50° C) 60° D) 70° E) 80°

11. Površina baze pravilne šestostrane jednakoivične prizme je $150\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$. Površina te prizme (u cm^2) je:

A) $300\sqrt{3}$; B) $300\sqrt{3}+3$; C) $300\sqrt{3}+2$;
D) $300(\sqrt{3}+2)$; E) Nema dovoljno podataka.

12. U kesi ce nalazi 5 čokoladnih bombona i 6 voćnih bombona. Koliko najmanje bombona treba da uzmemo iz te kese, ne gledajući u kesu, da bismo bili sigurni da se među bombonama koje smo uzeli nalaze 2 bombone različite vrste?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7



13. Figura koju vidite na slici sastavljena jeod 3 jednaka kvadrata i 4 podudarna trougla. Dužina stranice kvadrata je a. Teme gornjeg kvadrata je središte stranice donjeg kvadrata. Koji od ponuđenih izraza predstavlja obim te figure (dužina podebljane linije)?

A) $8a$ B) $4a(1+\sqrt{2})$ C) $4a + a\sqrt{5}$

D) $4a + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ E) $4a\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

14. Kolika je razlika između Aninih i Borinih godina, ako se zna da će Bora kroz 4 godine biti dva puta stariji nego što je bio pre 4 godine, a da će Ana kroz 6 godine biti tri puta starija nego što je bila pre 6 godine?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15. Kao što znamo, pravilna šestostrana prizma ima dva različita dijagonalna preseka. Veći dijagonalni presek jedne šestostrane prizme je kvadrat. Manja dijagonala baze (osnove) prizme ima dužinu 10 cm. Izračunaj zapreminu te šestostrane prizme.

A) $1000\ \text{cm}^3$ B) $960\ \text{cm}^3$ C) $100\ \text{cm}^3$ D) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$ E) $6a^3\sqrt{3}$

16. Prave zadate jednačinama $x = 4$ i $y = 3x$ sa pozitivnim delom x-ose grade trougao. Površina tog trougla je:

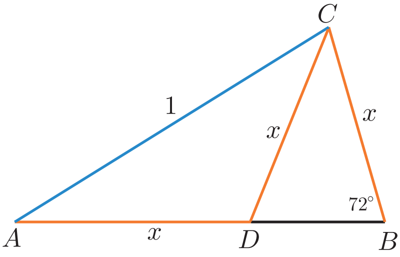
A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

17. Kocka i piramida imaju istu osnovu, a visina piramide je dva puta veća od visine kocke. Razmera zapremina kocke i piramide je:

A) $1:1$ B) $1:2$ C) $2:1$ D) $2:3$ E) $3:2$

Zadaci koji se ocenjuju sa 5 bodova

18. Posmatrajući ovu sliku Jovan je napisao sledećih 5 tvrđenja:



A) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

B) $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{1-x}$

C) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1+x}$

D) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$ E) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{x-1}{x}$

Mi smo utvrdili da je samo jedno od njih istinito. Koje?

19. Koliko ima brojeva manjih od milion, koji se mogu zapisati (u uobičajenom dekadnom sistemu) samo pomoću cifara 3 i 8?

A) 12 B) 64 C) 126 D) 128 E) 256

20. Koliko među sledećim formulama ima onih koje su tačne za sve vrednosti x i y?

a) $|x+y| = |x| + |y|$

b) $|x-y| = |y-x|$

c) $x^2 \geqslant 0$

d) $\sqrt{x^2} = |x|$

e) $\sqrt{x^2+y^2} = |x| + |y|$

f) $|x| + |y| > 0$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

21. U jednoj porodici jedan dečak ima onoliko sestara koliko i braće, a njegova sestra ima dva puta manje sestara nego braće. Koliko u toj porodici ima dece?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

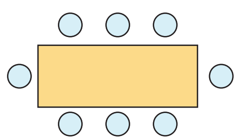
22. Oko pravilnog mnogougla stranice a opisana je kružnica, a zatim je u isti mnogougao upisana kružnica. Površina tako nastalog kružnog prstena je:

A) $\dfrac{a^2\pi}{4}$ B) $\dfrac{a^2}{2}\pi$ C) $a^2\pi$ D) $a^2(\pi-1)$ E) Nešto drugo.

23. Koliko ima celih brojeva x za koje je $\dfrac{2x+2}{2x-3}$ takođe celi broj?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 8 E) Nema takvih brojeva.

24. U jednoj svečanoj sali postoje samo stolovi za kojima može sedeti po 8 osoba, i to po rasporedu koji je prikazan na slici:



Na jednoj proslavi spojeno je n (nekoliko) takvih stolova u jedan dugačak sto ($n > 1$). Koliko najviše osoba može da sedi za tim velikim dugačkim stolom?

A) n B) $7n+1$ C) $2n+6$ D) $6n+2$ E) $8(n-1)$

25. U prvom buretu se nalazi 50 litara vode, a u drugom 30 litara soka. Jednu punu čašu soka prespemo iz bureta sa sokom u bure sa vodom, a zatim jednu punu čašu tako nastale mešavine prespemo natrag u bure sa sokom. Uporedi količinu soka u prvom buretu sa količinom vode u drugom buretu.

A) Ima više soka u prvom buretu, nego vode u drugom buretu.

B) Ima više vode u drugom buretu, nego soka u prvom buretu.

C) Te količine su jednake.

D) U prvom buretu ima više soka nego vode.

E) Ne može se utvrditi.

8.3. Školska takmičenja

H) 7. razred

1. Dve trećine od 0,4 najpre povećaj za 50%, pa dobijenu vrednost umanji za 50%. Koliki je dobijeni broj?

2. Šta je veće: 79^{499} ili 3^{1997}?

3. Brod je brzinom od 30 km/h krenuo iz pristaništa pravo na sever. Posle 20 minuta skrenuo je pravo na zapad i nastavio da se kreće brzinom od 48 km/h. Koliko je brod bio udaljen od pristasništa 50 minula posle polaska iz pristaništa?

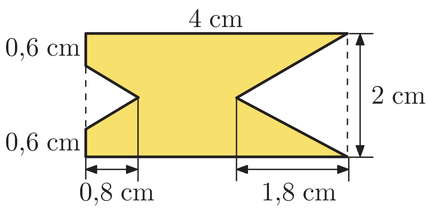
4. U trapezu $ABCD$ dijagonala AC normalna je na krak BC, dijagonala BD normalna je na krak AD. Dokaži da je dati trapez $ABCD$ jednakokraki.

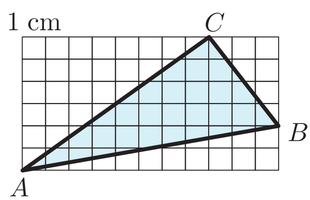
5. Izračunaj vrednost izraza $A = x + 1 + \sqrt{x^2}$ za $x = \sqrt{2} - 1997$.

I) 7. razred

1. Sredi izraz $\dfrac{2\sqrt{175}}{5} - \dfrac{3\sqrt{245}}{7} - \sqrt{28} + \sqrt{45}$.

2. Iz pravougaonika su “odsečena” dva trougla (vidi levu sliku). Izračunaj površinu dobijene figure, na slici obojene žuto.





3. Da li je $\sqrt{0,\dot{1}}$ racionalan ili iracionalan broj?

4. Koristeći Pitagorinu teoremu dokaži da je trougao ABC na poslednjoj slici desno pravougli.

5. Napiši

a) najveći; b) najmanji

petocifreni broj čija je cifra jedinica 7, a koji je deljiv brojem 9.

J) 8. razred

1. U tri džaka ima ukupno 64,2 kg šećera. Ako u prvom džaku ima $\frac{4}{5}$ od količine šećera iz drugog džaka, a u trećem džaku 42,5% od količine iz prvog džaka, kolika je masa šećera u prvom džaku?

2. Na koliko načina tri dečaka i tri devojčice mogu sesti u jedan red, tako da osobe istog pola ne budu jedna do druge?

3. Neka je CD visina koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla ABC. Pokaži da je $CD^2 = AD \cdot BD$.

4. Dužine stranica osnove kvadra su 7 cm i 24 cm, a dijagonala kvadra zahvata sa osnovom kvadra ugao od 60°. Izračunaj površinu i zapreminu kvadra.

5. Nad svakom stranicom pravougaonika $ABCD$, kao nad prečnikom, konstruisani su spolja polukrugovi, a oko pravougaonika je opisan krug. Zbir površina tako dobijenih polumeseca jednak je površini pravougaonika.

Dokaži.

K) 8. razred

1. Za koju vrednost promenljive x vrednost izraza $\frac{2x-5}{3}$ za 5 je veća od polovine vrednosti binoma $1-3x$?

2. Tačke A, B, C, D, E i F su temena pravilnog mnogougla, a tačka S ne pripada ravni tog mnogougla.

a) Koliko je pravih određeno parovima od tih 7 tačaka?

b) Koliko je ravni određeno sa po 3 od tih 7 tačaka?

3. Konstruiši trougao ABC ako je $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $\sphericalangle BAC = 30^\circ$. Na stranici BC konstruiši tačku M tako da je $BM : MC = AB : AC$.

4. Kateta pravouglog trougla ABC je 3 cm i njoj naspramni ugao je 60°. Izračunaj površinu kruga opisanog oko tog trougla.

5. Petnaest radnika završilo je polovinu posla za 20 dana. Tada su se razbolela 3 radnika, pa su posao završili preostali radnici. Za koliko dana su oni završili posao?

8.4. Opštinska takmičenja

L) 7. razred

1. Posle dva sniženja za isti broj procenata, cena robe se snizila sa 25 hiljada na 16 hiljada dinara. Koliko je procenata iznosilo to sniženje?

2. Šta je veće: $\sqrt{6+\sqrt{6}}$ ili 3,00001?

3. Dat je konveksni četvorougao $ABCD$ ($ABCD$ nije paralelogram). Neka su M, N, P i Q redom središta stranica AB, BC, CD i DA. Dokaži da je četvorougao $MNPQ$ paralelogram.

4. Dat je trougao ABC, tako da je $AB = 15$ cm, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ i $AC = 8$ cm. Izračunaj visine datog trougla.

5. Dokaži jednakost: $\left|\dfrac{a^2+b^2}{2} - ab\right| + \left|\dfrac{a^2+b^2}{2} + ab\right| = a^2 + b^2$.

LJ) 7. razred

1. Dokaži da vrednost izraza $\dfrac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4}$ ne zavisi od n.

2. Uprosti izraz $\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} + 2\sqrt{3}$, ako je $x = 2 - \sqrt{3}$.

3. U jednakostranični trougao stranice 6 cm upisan je krug, a u krug je upisan kvadrat. Izračunaj površinu tog kvadrata. Koji deo površine trougla zauzima površina kvadrata?

4. Za četvorougao $ABCD$ poznato je da je $AB = 4$ cm, $BC = 4\sqrt{2}$ cm, $CD = \sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ i $\sphericalangle BCD = 90^\circ$. Izračunaj obim i površinu tog četvorougla.

5. Na fudbalskoj utakmici u jednom redu sedišta seo je izvestan broj gledalaca. Zatim je između svaka dva gledaoca seo još po jedan gledalac. Ovakav način zauzimanja mesta (sedišta) ponovio se ukupno tri puta (još dva puta), pa je posle toga u tom redu bilo 2009 gledalaca. Koliko je gledalaca na početku selo u ovaj red?

M) 8. razred

1. U jednoj cisterni ima 540 litara vode, a u drugoj 360 litara. Iz prve se za jedan sat odlije tri puta više vode nego iz druge. Kroz 6 sati u prvoj cisterni će ostati 60 litara vode manje nego u drugoj. Koliko se litara vode odliva svakog sata iz prve, a koliko iz druge cisterne?

2. Reši nejednačinu $(x-3)^2 < x(x-3)$ i rešenja prikaži na brojevnoj pravoj.

3. Dužine stranica osnove kvadra su 6 cm i 8 cm, a dijagonala kvadra zahvata sa osnovom kvadra ugao od 45°. Odredi površinu i zapreminu kvadra.

4. Dat je krug $k(O, 3\text{ cm})$ i tačka M izvan kruga, tako da je $OM = 7$ cm. Prava p, koja sadrži tačku M, seče krug u tačkama C i D $(MD > MC)$. Ako je $MC = 5$ cm, izračunaj dužinu tetive CD.

5. Dat je skup tačka A, B, C, D, E, koje pripadaju pravoj p i van prave p (u istoj ravni) tačke F, G, H. Koliko je

a) najviše b) najmanje

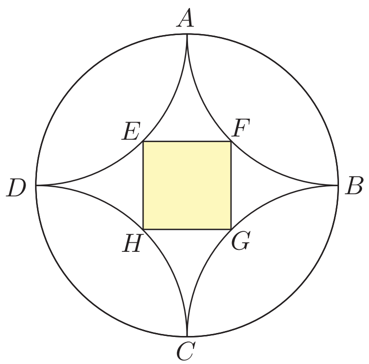
trouglova određeno ovim tačkama?

N) 8. razred

1. Reši jednačinu $|x| + |2x-5| = 4$.

2. Kraća dijagonala pravilne šestostrane prizme je 12 cm i zaklapa sa ravni osnove ugao od 30°. Izračunaj površinu i zapreminu te prizme.

3. Na datoj slici velika kružnica ima poluprečnik 1 cm. Lukovi AFB, BGC, CHD i DEA su četvrtine kružnica poluprečnika 1 cm. Kvadrat $EFGH$ je tako postavljen da je dobijena slika osno simetrična. Izračunaj dužinu stranice tog kvadrata.



4. Koliko ima prirodnih brojeva ne većih od 1000, koji u svom zapisu imaju bar jednu cifru 1?

5. Da li postoji četvorocifreni broj koji se poveća 4 puta kad se njegove cifre ispišu obrnutim redom?

8.5. Okružna takmičenja

NJ) 7. razred

1. Ako je n prirodni broj, onda je $n^3+1997n+1998$ deljivo sa 6. Dokaži.

2. Dužina stranice romba je 9 cm, a zbir njegovih dijagonala je 24 cm. Odredi površinu romba.

3. Kada se broj stranica konveksnog mnogougla udvostruči, onda se broj njegovih dijagonala poveća za 1998. Za koliko se stepeni pritom poveća zbir njegovih unutrašnjih uglova?

4. Neka su tačke M i N redom središta stranica AB i BC trougla ABC i neka je prava s simetrala $\sphericalangle BAC$. Ako se prave s i MN seku u tački P, onda je $\sphericalangle APB$ prav. Dokaži.

5. Koliko se različitih četvorocifrenih brojeva može napisati ciframa 1, 8 i 9, tako da se svaka cifra upotrebi bar jednom?

O) 7. razred

1. Ako su x i y prirodni brojevi i $1+x^2-y^2-2x=0$, izračunaj $(y-x)^{2013}$.

2. Data je kružnica $k(O, r)$. U kružnicu su upisani pravilni osmougao i pravilni dvanaestougao. Odredi razmeru površina ovih mnogouglova.

3. Odredi sve cele brojeve n za koje je vrednost razlomka $\dfrac{3n^2+15}{n+2}$ takođe celi broj.

4. Od pravilnog mnogougla odsečen je jednakokraki trougao ABC, koga određuju tri uzastopan temena. Na najdužoj stranici AC tog trougla postoji tačka K, takva da duž BK deli trougao ABC na dva jednakokraka trougla. Koliko stranica može imati taj pravilni mnogougao?

5. U skladištu se nalazi 2013 sulundara. Milašin i Radašin igraju sledeću igru: oni naizmenično iznose sulundare iz skladišta, pri čemu Radašin svaki put iznese 1 ili 4 sulundara, a Milašin 2 ili 3 sulundara. Prvi počinje Milašin. Pobednik je onaj koji iznese poslednji sulundar. Koji od njih dvojice može da osigura pobedu, bez obzira kako igra njegov protivnik?

P) 8. razred

1. Koliko ima parova prirodnih brojeva (x, y), takvih da je $3x + 8y = 1996$?

2. U koordinatnoj ravni data je prava $4x + 3y = n$, gde je n neki realni broj, različit od nule. Normalno odstojanje date prave od koordinatnog početka je 12. Odredi broj n i površinu trougla kojeg data prava gradi sa koordinatnim osama.

3. Mogu li se brojevi $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^{1995}, 2^{1996}$ podeliti u dva skupa bez zajedničkih elemenata, tako da je zbir brojeva u jednom skupu jednak zbiru brojeva u drugom skupu? Obrazloži.

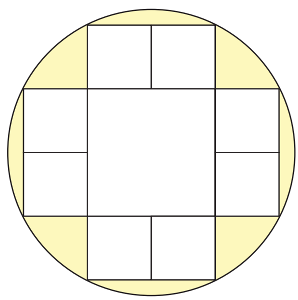
4. Iz date tačke M, van datog kruga $k(O, r)$ konstruisana je sečica s koja kružnu liniju seče u tačkama A i B. Izračunaj obim i površinu datog kruga, ako je $MA = 16$ cm, $MB = 9$ cm i $MO = 13$ cm.

5. Osnova četvorostrane piramide je jednakokraki trapez čije su osnovice $a = 5$ cm i $b = 3$ cm, a kraci su $c = d = 7$ cm. Izračunaj zapreminu date piramide, ako njena visina pada u presek dijagonala trapeza, a veća bočna ivica je 13 cm.

Q) 8. razred

1. Proizvod dva prirodna broja dva puta je veći od njihovog zbira. O kojim brojevima je reč?

2. U krug poluprečnika 1 cm ucrtano je 9 kvadrata, među kojima je 8 jednakih, tako da je po jedno teme svakog od 8 jednakih kvadrata na kružnici (vidi sliku). Izračunaj površinu dela kruga koji je van ucrtanih 9 kvadrata.



3. Tačka $A(32, 76)$ spojena je sa koordinatnim početkom O. Koliko tačaka na duži OA ima obe koordinate koje su prirodni brojevi?

4. Na ivicama AB i BC kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ date su tačke M i N, takve da je $BN = BM$. Izračunaj dužinu duži BN, ako ravan MND_1 zaklapa sa ravni ABC ugao od $45°$, a ivica kocke je 10 cm.

5. Papir pravougaonog oblika isečemo na dva dela. Zatim jedan od dobijenih delova ponovo isečemo na 2 dela. Ovo ponavljamo ukupno 5 puta. (Sečenja su uvek po pravoj liniji.) Koliko najviše, a koliko najmanje temena mogu imati sve dobijene figure zajedno?

8.6. Državna takmičenja

R) 7. razred

1. Ako za realne brojeve a i b važi jednakost $ab = a - b$, dokaži da vrednost izraza $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ ne zavisi ni od a ni od b.

2. U pravouglom trouglu ABC sa pravim uglom kod temena C data je tačka D, takva da je dužina duži CD jednaka 5 cm. Odredi dužinu hipotenuze AB, ako su i površina trougla ACD i površina trougla BCD jednake četvrtini površine trougla ABC.

3. Ćirilo je napisao na tabli niz od pet brojeva, tako da je razlika svakog broja (počev od drugog) i njegovog prethodnika jedan isti broj. Onda je došao Metodije i zamenio sve cifre slovima, i to iste cifre istim slovima, a različite cifre različitim slovima. Tako je dobijen zapis: A, BC, BD, CE, FF. Koje brojeve je napisao Ćirilo?

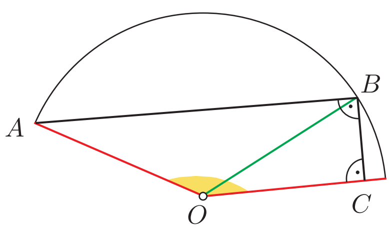
4. Ispitaj da li postoji prirodni broj n, takav da je zbir $2^n + 3^{n+3}$ jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

5. Neka su D i E tačke u kojima upisani krug trougla ABC dodiruje stranice AC i BC, a O centar tog kruga. Ako je F presečna tačka pravih DE i AO, izračunaj meru ugla AFB.

S) 7. razred

1. Bane je zapisao niz brojeva 7, 14, 17, ...Svaki član niza, počevši od drugog, dobija se tako što se prethodni član kvadrira, saberu se cifre dobijenog kvadrata i na taj zbir doda 1. (Na primer: $7^2 = 49$, $4+9 = 13$, $13+1 = 14$, pa je drugi član niza broj 14). Koji se broj nalazi na 2012. mestu ovog niza?

2. Pred fudbalsku utakmicu između Zvezde i Partizana pet lica je dalo sledeće prognoze:



A: Neće biti nerešeno.

B: Zvezda će primiti bar jedan gol.

C: Partizan će pobediti.

D: Partizan neće izgubiti.

E: Na utakmici će se postići tačno tri gola.

Po završetku utakmice ispostavilo se da su tri prognoze bile tačne, a dve netačne. Kojim rezultatom je završena utakmica?

3. Centralni ugao kružnog isečka AOC poluprečnika 12 cm, je $157°30'$ (vidi sliku na prethodnoj strani). Izračunaj površinu četvorougla $OABC$ sa slike. (Na slici je $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$.)

4. Ako su p i q prosti brojevi veći od 3, onda je $p^4 - q^4$ deljivo sa 48. Dokaži.

5. Neka je u pravouglom trouglu ABC tačka D podnožje visine iz temena C pravog ugla i O_1, O_2 centri upisanih kružnica trouglova ACD i BCD. Kružnica sa centrom C i poluprečnikom CD seče katete AC i BC u tačkama M i N, redom. Dokaži:

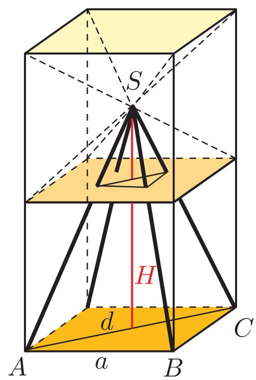
a) Tačke O_1, O_2, M i N su kolinearne.

b) $MN > 2O_1O_2$.

T) 8. razred

1. Odredi sve vrednosti realnih brojeva a, b, c i d, za koje je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d)$.

2. Date su dve jednake kocke. Jedna je stavljena na drugu, tako da formiraju kvadar. Napravljena je piramida čiji vrh je centar S gornje kocke, a osnova osnova donje kocke (slika). Odredi koji deo zapremine piramide je u gornjoj kocki, u odnosu na zapreminu čitave piramide.



3. Neka je $x \in R$ i $n \in N$. Odredi sve vrednosti za x za koje važi $\dfrac{x^{2009}+1}{2} + \dfrac{2x^{2009}+1}{3} + \cdots + \dfrac{n \cdot x^{2009}+1}{n+1} = n$.

4. Stranica kvadrata $ABCD$ je dužine a. Neka je M središte stranice BC, a X podnožje normale iz temena A na duž MD. Izračunaj obim trougla ABX u zavisnosti od stranice a.

5. Dokaži da je $\dfrac{1}{2009} < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2007}{2008} < \sqrt{\dfrac{1}{2009}}$.

U) 8. razred

1. Reši sistem jednačina: $x - 2y - 1 = 0$, $x^2 - 4y^2 + 4y - 17 = 0$.

2. Dokaži da važi nejednakost

$$2013 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \cdots + \frac{2013^2+1}{2013^2-1} < 20013 + \frac{1}{2}.$$

3. Pravilna trostrana piramida $VABC$ presečena je sa ravni koja sadrži središta osnovnih ivica AB i AC i paralelna je sa bočnom ivicom AV. Izračunaj obim i površinu preseka, ako je dužina osnovne ivice 12 cm, a dužina bočne ivice 14 cm.

4. Dat je pravilan 2013-ugao. Na koliko se načina mogu izabrati tri njegova temena koja su istovremeno i temena jednog jednakokrakog trougla?

5. Neka je O tačka na kružnici $k(S, r)$. Kružnica m sa centrom O seče kružnicu k u tačkama P i Q. Neka je R tačka u unutrašnjosti kružnice k u kojoj se seku kružnice m i $s(Q, QO)$, a L druga tačka preseka prave PR i kružnice k. Dokaži da je duž LR jednaka poluprečniku kružnice k.

8.7. Republička takmičenja u Jugoslaviji

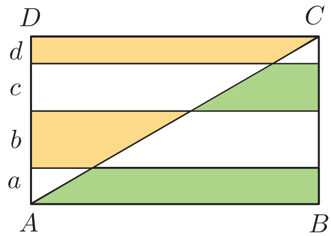
V) 7. razred

1. Najmanji zajednički sadržalac dva broja za 20 je veći od njihovog najvećeg zajedničkog delioca. Odredi ta dva broja.

2. Dat je izraz $\dfrac{2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2^1+1}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2^1+1} : 3^3$. Dokaži da je vrednost datog izraza celi broj.

3. Dat je jednakostranični trougao ABC i tačka M na stranici AB. Nad duži CM konstruisan je jednakostranični trougao CMN, pri čemu su tačke M i N sa raznih strana duži BC. Dokaži da su duži AC i BN paralelne.

4. Dat je pravougaonik $ABCD$ (vidi sliku). Ako je na slici $a + c = b + d$, onda je zbir belih površina sa leve strane dijagonale AC jednak zbiru belih površina sa desne strane dijagonale AC. Dokaži.



5. Leka je na tabli napisao 55 različitih dvocifrenih prirodnih brojeva, tvrdeći da među njima ne postoje dva koji daju zbir 100. Žarko je, ne proveravajući, rekao da to nije moguće. Ko je u pravu: Leka ili Žarko?

W) 7. razred

1. Ispitaj da li postoji prirodni broj od kojeg se, premeštanjem prve cifre iza poslednje, tj. iza cifre jedinica, dobija pet puta veći broj.

2. Neka je k krug sa centrom O i poluprečnikom dužine 10 cm. Tetivi AB kruga k odgovara centralni ugao od 90°. U trougao ABO upisan je krug k_1, a u oblast određenu tetivom AB i manjim lukom AB upisan je najveći mogući krug k_2. Odredi razmeru dužina poluprečnika krugova k_1 i k_2.

3. Odredi sve proste brojeve p, takve da broj $p^2 + 11$ ima tačno 6 različitih delilaca.

4. Kvadrati prirodnih brojeva zapisani su redom, jedan za drugim: 1491625... Odredi cifru koja se u tom nizu nalazi na 2006. mestu.

5. Tačka D je središte stranice BC trougla ABC, a E je tačka duži AD, takva da je $AE : ED = 3 : 1$. Odredi razmeru duži AF i FC, gde je F presečna tačka prave BE i stranice AC.

X) 8. razred

1. Milan je krenuo u Valjevo nekoliko minuta pre 9 časova, a kada je stigao, u nekoliko minuta pre 12 časova, mala i velika kazaljka su zamenile mesta. Koliko je vremena Milan proveo na putu i kada je krenuo?

2. Dokaži da je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$, za svako x.

3. Svaka od četiri strane trostrane jednakoivične piramide (pravilnog tetraedra) izdeljena je srednjim linijama na četiri jednakostranična trougla. Za bojenje tetraedra koriste se bela (B), plava (P), crvena (C) i zelena (Z) boja. Koliko ima različitih bojenja tetraedra, ako:

a) na svakoj strani tetraedra koriste se samo dve boje;

b) svakom bojom obojena su tačno četiri trougla;

c) svaka dva trougla sa zajedničkom stranicom obojena su različitim bojama?

(Strane tetraedra nisu obeležene. Različita su ona bojenja koja daju različito obojeni tetraedar, nezavisno od njegovog prevrtanja.)

4. Dat je polukrug sa centrom O i prečnikom AB. Neka su C i D tačke duži AB takve da je $OC = OD$, a E i F tačke polukruga takve da je $CE \| DF$. Dokaži da su duži CE i DF normalne na EF.

5. Osnova prave trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ je jednakokraki pravougli trougao ABC sa katetama $AB = AC = 1$ cm. Visina prizme je $H = 6$ cm. Ravan π sadrži tačku B i od ivica AA_1 i CC_1 odseca duži $AA' = 2$ cm i $CC' = 4$ cm. Izračunaj zapreminu onog dela prizme koji se nalazi između ravni π i osnove $A_1B_1C_1$.

Y) 8. razred

1. Dokaži da je $2003^2 + 2^{2003}$ složeni broj.

2. Uglovi trougla ABC zadovoljavaju jednakost $3\alpha+2\beta = 180^\circ$. Dokaži da je $a^2 + bc = c^2$.

3. Ako se zna da je $\dfrac{x^2 + 2003}{x + 2003}$ celi broj, koliko različitih celobrojnih vrednosti u tom slučaju može uzeti broj x?

4. U pravilnoj četvorostranoj piramidi, čija je ivica osnove dužine 10 cm, nagib bočne strane prema ravni osnove je 60°. Ravan α sadrži jednu ivicu osnove i normalna je na suprotnu bočnu stranu. Odredi površinu preseka ravni α i piramide.

5. Brojevi $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \ldots, \dfrac{1}{2^{100}}$ razbijeni su u pet grupa po 20 brojeva. Proizvod brojeva bar jedne grupe manji je od $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1000}$. Dokaži.

8.8. Savezna takmičenja u Jugoslaviji

Ć) 7. razred

1. Od kvadratnog lista hartije, šrafiranog celim brojem kvadratića, isečen je kvadrat sa celim brojem istih takvih kvadratića. Broj preostalih kvadratića je 124. Koliko je kvadratića sadržao prvobitni list hartije?

2. Ako je $n_1+n_2+\cdots+n_{1997}$ deljivo sa 30, onda je i $n_1^5+n_2^5+\cdots+n_{1997}^5$ deljivo sa 30, gde su $n_1, n_2, \ldots, n_{1997}$ prirodni brojevi. Dokaži.

3. Dokaži da se ravan ne može pokriti parketnim pločicama u obliku pravilnih petouglova i parvilnih desetouglova iste dužine stranice.

4. Dat je polukrug nad prečnikom AB, sa centrom S. Na polukrugu izaberemo tačke C i D, tako da je C tačka luka AD i ugao CSD je prav. Prave AC i BD seku se u tački E, a prave AD i BC u tački F. Dokaži da je $EF = AB$ i da je prava EF normalna na pravu AB.

5. U četvorouglu $ABCD$ je ugao ABC od 102°, ugao ADC od 129° i $AB = BC = 1$. Izračunaj dužinu dijagonale BD.

Č) 7. razred

1. Dat je trougao ABC površine 2004. Neka su M i N redom tačke na stranicama AB i BC. takve da je $AM : MB = 1 : 3$ i $BN : NC = 2 : 1$. Ako se prave AN i CM seku u tački S, izračunaj površinu četvorougla $MBNS$.

2. Ako je $abc = 1$, dokaži da je

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-4.$$

3. Na putu je kolona autobusa. Autobus smatramo prepunim ako je u njemu više od 50 putnika. Kontrolori Voja i Ratko zaustavili su kolonu. Voja je odredio procenat prepunih autobusa, a Ratko procenat svih putnika u prepunim autobusima u odnosu na ukupan broj putnika. Čiji je procenat veći?

4. Dat je pravougaonik $ABCD$ kod koga je $AB = 2BC$. Kružnica k sa centrom A i poluprečnikom AD seče dijagonalu BD u tački M. Izračunaj ugao BMC.

5. Pravougaonik 2×2005 podeljen je na 4010 podudarnih kvadrata stranice 1. Na koliko se načina od njih mogu izabrati 2004 kvadrata tako da među njima nema susednih? (Dva kvadrata su susedna ako imaju zajedničku stranicu.)

DŽ) 8. razred

1. Nađi sve prirodne brojeve oblika $222\ldots22$, koje možemo predstaviti u obliku zbira ili razlike kvadrata dva prirodna broja.

2. Odredi sve prirodne brojeve a, b, c, takve da je

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1.$$

3. Prirodni broj n je takav da su brojevi $2n+1$ i $3n+1$ kvadrati prirodnih brojeva. Dokaži da je broj $5n+3$ složen.

4. Dat je konveksni četvorougao $ABCD$, kod kojeg je $\sphericalangle ABD = 50^\circ$, $\sphericalangle ADB = 80^\circ$, $\sphericalangle ACB = 40^\circ$, a ugao DBC je za 30° veći od ugla BDC. Izračunaj ugao DBC.

5. U ravni je dat konveksni četvorougao i unutar njega 1996 tačaka. Proizvoljnim redosledom spajamo po dve tačke dužima koje se ne presecaju međusobno. Ovaj postupak produžavamo sve dok postoji bar jedan par tačaka koji se može spojiti pomoću duži koja ne preseca nijednu od prethodno povučenih duži. Koliko smo nepresecajućih duži povukli?

Đ) 8. razred

1. Za prirodni broj kažemo da je palindrom ako se ispisivanjem cifara u obrnutom poretku dobija isti broj (na primer, 7482847). Nađi najveći petocifreni palindrom koji je deljiv sa 101.

2. U trouglu ABC tačka A_1 je središte stranice BC, a tačka E je presek simetrale ugla CAB i stranice BC. Krug opisan oko trougla AEA_1 seče stranice AB i CA, redom, još u tačkama F i G. Dokaži da je $BF = CG$.

3. Proizvod tri pozitivna broja je 1, a njihov zbir je veći od zbira njihovih recipročnih vrednosti. Dokaži da je tačno jedan od ova tri broja veći od 1.

4. Na rukometnom turniru za pobedu se dobija 2 boda, za remi 1 bod, a za poraz 0 bodova. Zna se da je svaka ekipa igrala sa svakom jedanput i da je pobednička ekipa na kraju osvojila 7 bodova, drugoplasirana 5 bodova, a trećeplasirana ekipa 3 boda. Koliko je bodova imala ekipa koja je bila poslednja na turniru?

5. U trouglu ABC je $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle C > 60^\circ$, a D i E su tačke na stranici BC, takve da je AD simetrala ugla CAB, a AE simetrala ugla BAD i $CD = DE$. Odredi $\sphericalangle BCA$.

8.9. Male (srpske) olimpijade

Z) Kvalifikacije za Balkanijadu

1. Odredi najveći prirodni broj n, takav da je broj $n^2 + 2006n$ potpun kvadrat.

2. Dat je jednakokraki trougao sa osnovicom a i krakom b. Ako za uglove na osnovici važi: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 80^\circ$, onda je $a^3 + b^3 = 3ab^2$. Dokaži.

3. Sa 6 horizontalnih i 6 vertikalnih pravih pravougaonik je podeljen na 49 manjih pravougaonika. Obimi malih pravougaonika su celi brojevi. Dokaži da je i obim velikog pravougaonika celi broj.

Ž) Četvrta srpska matematička olimpijada

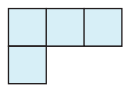
1. Neka su tačke E i F podnožja visina iz temena B i C trougla ABC. Tačka M je podnožje normale iz tačke F na stranicu BC, a tačka N je podnožje normale iz tačke B na pravu EF. Dokaži da su prave AC i MN paralelne.

2. Neka su x i y brojevi iz intervala $[1, 2]$. Dokaži da je

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \leqslant \frac{9}{2}.$$

3. Odredi proste brojeve p za koje je $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5$ deljivo sa 13.

4. Tabla dimenzija 7×7 pokrivena je L-figurama, sastavljenim od 4 jednaka kvadrata (slika), tako da je tačno jedno polje ostalo nepokriveno. Odredi sva polja table koja mogu ostati nepokrivena.



5. Nađi sve trocifrene prirodne brojeve A, $A < 500$, koji imaju sledeće svojstvo: ako se jedan iza drugog ispišu brojevi A, $2A$ i A, dobije se devetocifreni broj koji je potpuni kvadrat i koji ima tačno 4 različita prosta delioca.

6. Dokaži sledeću nejednakost za sve pozitivne realne brojeve a, b i c:

$$\frac{a^2+2b^2+4c^2}{bc}+\frac{b^2+2c^2+4a^2}{ac}+\frac{c^2+2a^2+4b^2}{ab} \geqslant 21.$$

Kada važi jednakost?

7. Na tabli je napisano 2010 prirodnih brojeva i jedan od njih je broj 2011. Poznato je, takođe, da je za svaka dva napisana broja na tabli napisana i apsolutna vrednost njihove razlike. Dokaži da su svi brojevi napisani na tabli deljivi sa 2011.

8. Na stranici BC trougla ABC izabrana je tačka M, tako da težište trougla ABM pripada kružnici opisanoj oko trougla ACM, a težište trougla ACM pripada kružnici opisanoj oko trougla ABM. Dokaži da su težišne duži iz temena M trouglova ABM i ACM jednake.

Š) Šesta srpska matematička olimpijala

1. Odredi sve četvorocifrene brojeve n, čiji je dekadni zapis oblika $\overline{abba}$ i koji su jednaki proizvodu nekoliko uzastopnih prostih brojeva.

2. Dokaži da jednačina $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=3$ ima beskonačno mnogo rešenja u skupu prirodnih brojeva.

3. Neka je A, BCD, AEF, CFG, HCI, DEA, IFD, JGF, $BFEG, \ldots$ rastući aritmetički niz, tj. niz u kome je svaki sledeći član veći od prethodnog za jedan isti broj d. U nizu su jednake cifre zamenjene istim, a različite cifre različitim slovima. Odredi 16. član ovog niza.

4. U pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu nacrtani su grafici funkcija $y=ax+b$ i $y=bx+a$ $(a \neq b)$. Tačku njihovog preseka označili smo crveno, a tačke preseka tih pravih sa y osom označili smo plavo. Posle toga su izbrisani grafici i koordinatne ose, a ostale su samo označene tačke (a i b su takođe nepoznati). Pomoću šestara i lenjira nađi koordinatni početak.

8.10. Juniorske balkanske olimpijade

I) Prva juniorska balkanska olimpijada

Beograd 1997.

1. (Bugarska) Devet tačaka je raspoređeno u jediničnom kvadratu. Dokaži da među njima postoje tri tačke, takve da površina trougla kome su one temena, nije veća od $\dfrac{1}{8}$.

2. (Kipar) Ukoliko je $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$, izrazi $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ u funkciji od k.

3. (Grčka) Neka je I centar kruga upisanog u dati trougao ABC, a D i E redom središta stranica AB i AC. Neka su, dalje, K i L presečne tačke prave DE redom sa BI i CI. Dokaži da je $AI+BI+CI>BC+KL$.

4. (Makedonija) Nađi uglove trougla, ABC, ako je $R(b+c)=a\sqrt{bc}$, pri čemu su a, b, c dužine stranica trougla ABC, a R je poluprečnik kruga opisanog oko ovog trougla.

5. (Jugoslavija) Ako su $n_1, n_2, \ldots, n_{1997}, n_{1998}$, prirodni brojevi, takvi da je $n_1^2+n_2^2+\cdots+n_{1997}^2=n_{1998}^2$, dokaži da su bar dva od tih brojeva parni.

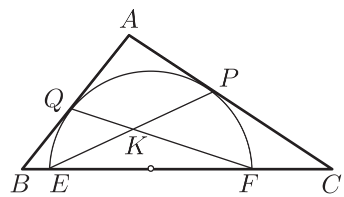
II) Četvrta balkanska matematička olimpijada

Ohrid (Makedonija) 2000

1. (Rumunija) Neka su x i y celi brojevi, takvi da je zadovoljena jednakost $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$. Dokaži da je $x + y = 10$.

2. (Grčka) Nađi sve cele brojeve n, $n \geqslant 1$, za koje je $n^2 + 3^n$ kvadrat celog broja.

3. (Albanija) Polukrug čiji prečnik EF pripada stranici BC trougla ABC, dodiruje stranice AB i AC redom u tačkama Q i P, kao što je pokazano na slici. Dokaži da presečna tačka K duži EP i FQ pripada visini trougla ABC, konstruisanoj iz temena A.



4. (Jugoslavija) Na teniskom turniru koji je održan na letnjem kampu učestvovalo je dva puta više dečaka od devojčica. Svaki par učesnika odigrao je tačno jednu partiju (nijedna partija nije završena nerešeno). Odnos broja pobeda devojčica prema broju pobeda dečaka bio je $7 : 5$. Koliko je učesnika bilo na turniru?

III) Peta juniorska balkanska olimpijada

Kipar, 2001.

1. (Rumunija) Nađi sve prirodne brojeve a, b, c, takve da je
$a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

2. (Bugarska) Dat je trougao ABC, kod koga je $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $AC \neq BC$, a tačke L i H su na stranici AB, takve da je $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LCB$, a CH je visina na AB. Dokaži:

a) za svaku tačku X na duži CL važi $\sphericalangle XAC \neq \sphericalangle XBC$.

b) za svaku tačku X na duži CH važi $\sphericalangle XAC \neq \sphericalangle XBC$.

3. (Grčka) Dat je jednakostranični trougao ABC. Neka su D i E proizvoljne tačke na stranicama AB i AC, redom. Ako su DF i EG simetrale uglova trougla ADE, gde je $F \in AE$ i $G \in AD$, dokaži da je zbir površina trougla DEF i trougla DEG ne veći od površine trougla ABC. Objasni kada važi jednakost.

4. (Jugoslavija) Dat je konveksni mnogougao sa 1415 stranica i obimom od 2001 cm. Dokaži da postoje tri temena ovog mnogougla, koja obrazuju trougao čija je površina manja od 1 cm^2.

IV) Dvanaesta juniorska balkanska olimpijada

Valona (Albanija) 2008.

1. (Bugarska) Nađi sve realne brojeve a, b, c, d, tako da važi: $a+b+c+d=20$ i $ab+ac+ad+be+bd+cd=150$.

2. (Bugarska) Temena A i B jednakostraničnog trougla ABC pripadaju kružnici k poluprečnika 1, a teme C pripada unutrašnjosti kruga k. Tačka D, $D \neq B$, kružnice k, takva je da je $AD = AB$, a E je tačka (različita od D) u kojoj prava DC seče k. Naći dužinu duži CE.

3. (Turska) Nađi sve proste brojeve p, q i r za koje važi: $\dfrac{p}{q} - \dfrac{4}{r+1} = 1$.

4. (Srbija) Svako polje table 4×4 obojeno je belom bojom. U jednom potezu dozvoljeno je promeniti boju proizvoljnom polju zajedno sa njegovim susednim poljima u suprotnu (belu u crnu, odnosno crnu u belu). (Dva polja su susedna ako imaju zajedničku stranicu.) Odredi sve vrednosti broja n, takve da je moguće posle n poteza dobiti tablu sa svim poljima obojenim u crno.

V) Sedamnaesta juniorska balkanska olimpijada

Izmir (Turska) 2013.

1. Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (a, b) za koje su vrednosti oba razlomka $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ i $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ takođe prirodni brojevi.

2. Neka je ABC oštrougli trougao u kome je $AB < AC$ i O centar opisane kružnice k trougla ABC. Neka je D tačka na stranici BC, takva da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAO$ i E tačka preseka kružnice k i prave AD, različita od A. Ako su tačke M, N i P, redom, središta duži BE, OD i AC, dokaži da su tačke M, N i P kolinearne.

3. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje je: $ab \geqslant 1$. Dokaži da je

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16.$$

4. Neka je n prirodni broj. Dva igrača, Ana i Bane, igraju sledeću igru:

- Ana bira n realnih brojeva (među njima može biti i jednakih);
- Ana sabira svaka dva od n izabranih brojeva, zbirove piše na papir i papir daje Banetu (napisanih brojeva ima $\frac{1}{2}n(n-1)$ i među njima može biti i jednakih);
- Bane pobeđuje ako tačno u prvom pokušaju kaže kojih n brojeva je Ana izabrala.

Da li Bane može sigurno da pobedi u sledećim slučajevima:

a) $n = 5$; b) $n = 6$; c) $n = 8$?

Odgovore obrazloži.

(Na primer, za $n = 4$, Ana može da izabere brojeve 1, 5, 7, 9. Kada sabere svaka dva od njih, dobiće iste zbirove kao i kada bi na isti način sabirala brojeve 2, 4, 6, 10, pa Bane ne može sigurno da pobedi u ovom slučaju.)

Glava 9

REŠENJA ZADATAKA

- Algebarski izrazi
- Jednačine i nejednačine
- Sličnost
- Mnogougao
- Krug
- Merenje ravnih figura
- Geometrija u prostoru
- Matematička takmičenja

Rešenja zadataka

9.1. Algebarski izrazi

1. $P(x) = x^6(x^2+x+1)+x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1) = (x^2+x+1)(x^6+x^3+1) = Q(x)(x^6+x^3+1)$.

2. a) $4b^3-8b^2+8a^2-4a^3+a^2b^2(a-b) = 8(a^2-b^2)-4(a^3-b^3)+a^2b^2(a-b) = (a-b)(8(a+b)-4(a^2+ab+b^2)+a^2b^2) = (a-b)(8a+8b-4a^2-4ab-4b^2+a^2b^2) = (a-b)(b^2(a^2-4)-4a(a-2)-4b(a-2)) = (a-b)(a-2)(b^2(a+2)-4a-4b) = (a-b)(a-2)(ab^2+2b^2-4a-4b) = (a-b)(a-2)(a(b^2-4)+2b(b-2)) = (a-b)(a-2)(b-2)(a(b+2)+2b) = (a-b)(a-2)(b-2)(ab+2a+2b)$.

b) Postupajući slično prethodnom zadatku dobijamo:

$\cdots = (a+b)(ab+c^2+ac+bc) = (a+b)(b+c)(c+a)$.

3. Uvedimo privremeno oznaku: $m^2+5m = k$. Dobijamo: $P(m) = k(k+10)+24 = k^2+10k+24 = k^2+10k+25-1 = (k+5)^2-1 = (k+5-1)(k+5+1) = (k+4)(k+6)$.

Vratimo se na m, pa imamo: $P(m) = (m^2+5m+4)(m^2+5m+6)$. Dalje je: $m^2+5m+4 = m^2+4m+m+4 = m(m+4)+(m+4) = (m+4)(m+1)$. Slično je $m^2+5m+6 = (m+3)(m+2)$, pa je $P(m) = (m+4)(m+1)(m+3)(m+2)$.

4. $P(x,y) = (9x^2+6x+1)+(16y^2-24y+9) = (3x+1)^2+(4y+3)^2$. Ovaj zbir može biti nula samo ako je $3x+1=0$ i $4y+3=0$, a to važi samo ako je $x = -\dfrac{1}{3}$ i $y = -\dfrac{3}{4}$.

5. Kako je $(x-1)^3 = (x-1)^2-(x-1) = (x^2-2x+1)(x-1) = x^3-3x^2+3x-1$, to je: $x^3+x-1 = (x^3-3x^2+3x-1)+3x^2-2x = (x-1)^3+3(x^2-2x+1+2x-1)-2x = (x-1)^3+3(x^2-2x+1)+6x-3-2x = (x-1)^3+3(x-1)^2+4x-4+1 = (x-1)^3+3(x-1)^2+4(x-1)+1$. Dakle: $A=1$, $B=3$, $C=4$ i $D=1$.

6. Kad se oslobodimo zagrada i sve prebacimo na desnu stranu jednakosti dobićemo: $0 = a^2d^2+b^2c^2-2abcd$, odnosno $(ad-bc)^2 = 0$, odakle sledi da je $ad-bc=0$, tj. $ad=bc$.

Obrnuto, iz $ad=bc$ sledi $ad-bc=0$, odnosno $(ad-bc)^2=0$, pa je $a^2d^2+b^2c^2 = 2abcd$. Sada na obe strane jednakosti dodamo $a^2b^2+c^2d^2$. Dobijemo polinome čijim faktorisanjem potvrđujemo da važi: $(ab+cd)^2 = (a^2+c^2)(b^2+d^2)$.

7. $P(x) = x^2 - 1998x - x + 1998 = x(x-1998) - (x-1998) = (x-1998)(x-1)$, pa je $P(101998) = (101998 - 1998)(101998 - 1) = 100000 \cdot 101997 = 10199700000$.

8. Slično prethodnom zadatku: $P(x) = x^{10} - 99x^9 - x^9 + 99x^8 + x^8 - 99x^7 - x^7 + \cdots + 99x^2 + x^2 - 99x - x + 111 = x^9(x-99) - x^8(x-99) + x^7(x-99) - \cdots + x(x-99) - x + 99 + 12 = (x-99)(x^9 - x^8 + x^7 - \cdots + x) - (x-99) + 12$. Sada, za $x = 99$ biće $x - 99 = 0$, pa je $P(99) = 0 + 12 = 12$.

9. Ako je D deljenik, Q količnik, onda je $a^4 + b^4 + 1 = D \cdot Q + 2a^2 + 2b^2 - 2a^2b^2$, pa iz $D = Q$ sledi da $D \cdot Q = Q^2$. Prema tome $Q^2 = a^4 + b^4 + 1 - 2a^2 - 2b^2 + 2a^2b^2 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2 - 2b^2 + 1 = (a^2+b^2)^2 - 2(a^2+b^2) + 1 = (a^2 + b^2 - 1)^2$. Dakle $Q = a^2 + b^2 - 1$.

10. Slično **primeru C.** Iz $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, dobijamo: $a^2 + b^2 = 5$, pa je $(a^2 + b^2)^2 = 25$, odnosno: $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 25$.

Odavde je $a^4 + b^4 = 25 - 2a^2b^2 = 25 - 2 \cdot 4 = 17$.

11. Iz $a + b + c = 0$ zaključujemo da je $b + c = -a$ i $a + c = -b$, pa je $c(b+c)(a+c) = c \cdot (-a) - (-b) = abc = 1999$.

12. Jednakost pomnožimo sa 2 i dobijemo: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ac$, odakle je: $(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) = 0$. Odavde sledi da je: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$, što je moguće samo ako je $a - b = 0$, $b - c = 0$ i $c - a = 0$. Sledi traženi zaključak: $a = b = c$.

13. Neka su $(n-1)$, n i $(n+1)$ tri uzastopna broja. Tada je $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) + n = n(n^2 - 1) + n = n^3 - n + n = n^3$.

14. a) Transformišemo dati polinom: $P(x,y) = (2x^2 + xy - x) + (6xy + 3y^2 - 3y) + (6x + 3y - 3) + 1 = x(2x + y - 1) + 3y(2x + y - 1) + 3(2x + y - 1) + 1 = (2x + y - 1) \cdot (x + 3y + 3) + 1$. Iz datog uslova sledi da je $2x + y - 1 = 0$, pa je $P(x,y) = 1$.

b) Slično prethodnom zadatku, rastavljanjem datog polinoma na činioce, dobijamo: $P(x,y,z) = (2y - 3z - x)(2x - 3y + z) = -(x - 2y + 3z)(2x - 3y + z) = 0 \cdot (2x - 3y + z) = 0$.

15. Slično **zadatku 12**.

16. Iz datog uslova dobijamo: $(x+i)^2 + (y-3)^2 = 0$, odakle je $x = -1$ i $y = 3$ (vidi rešenje zadatka 4), pa je $P(x,y) = (-1)^{1999} + 2000 - 3 = -1 + 6000 = 5999$.

17. $Z = (1999^2 - 1998^2) + (1997^2 - 1996^2) + \cdots + (5^2 - 4^2) + (3^2 - 2^2) + 1 = (1999 - 1998)(1999 + 1998) + (1997 - 1996)(1997 + 1996) + \cdots + (5-4)(5+4) + (3-2)(3+2) + 1 = 3997 + 3993 + 3989 + \cdots + 9 + 5 + 1 = (1 + 3997) + (5 + 3993) + (9 + 3989) + \cdots + (1997 + 2001) = 500 \cdot 3998 = 1999000$.

18. Neka je $P^2 - Q^2 = 3(2xy - 1)$, odnosno $(P-Q)(P+Q) = 3(2xy-1)$. Dalje, iz $P - Q = 3$ i $P + Q = 2xy - 1$, dobijamo: $P = xy + 1$ i $Q = xy - 2$. Dakle: $6xy - 3 = (xy+1)^2 - (xy-2)^2$. (Stavljajući $P - Q = 2xy - 1$, $P + Q = 3$, dobijamo drugo rešenje: $P = xy + 1$, $Q = 2 - xy$.)

19. Uočimo da je $(10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1) = \dfrac{9\cdot(10^n+10^{n+1}+\cdots+10+1)}{9} = \dfrac{(10-1)(10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1)}{9}$. Prema formuli za razlaganje binoma a^n-b^n (str. 7), brojilac poslednjeg razlomka jednak je $10^{n+1}-1$. Prema tome, dati izraz je: $\dfrac{(10^{n+1}-1)}{9}\cdot(10^{n+1}+5)-1 = \dfrac{10^{2(n+1)}+4\cdot10^{n+1}+4}{9} = \dfrac{(10^{n+1}+2)^2}{9} = \left(\dfrac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2 = N^2$ Dakle: $N=\dfrac{10^{n+1}+2}{3}=\dfrac{100\ldots02}{3}+33\ldots34$ (n trojki).

20. Stavimo $k=100\ldots00$, itd. Slično prethodnom zadatku: $N=33\ldots34$.

21. Pretpostavimo da je npr. $a<c$ i transformišimo datu nejednakost: $(a+b)^2-(c+d)^2=c-a$, odnosno $(a+b-c-d)(a+b+c+d)=c-a>0$. Kako je $a+b+c+d>0$, sledi da je i $a+b-c-d>0$. Međutim, vrednost izraza $a+b-c-d$ je celi broj, pa je zbog toga $a+b-c-d\geqslant 1$. Sada iz ove nejednakosti i jednakosti $(a+b-c-d)(a+b+c+d)=c-a$ sledi da je $a+b+c+d\leqslant c-a$, odnosno da je $2a+b+d\leqslant 0$. Ovo ne može biti, jer su a, b i d prirodni brojevi. Dakle, pogrešna je pretpostavka da je $a<c$. Slično, polazeći od $(c+d)^2-(a+b)^2=a-c$, dokažemo da ne može biti ni $a>c$, pa je $a=c$. Zamenimo ovo i dobićemo da je i $b=d$.

22. Slično **primeru D**.

a) $P(x,y)=(x-2)^2+(y+3)^2\geqslant 0$. Za $x=2$ i $y=-3$ je $P_{\min}=0$.

b) $Q(x,y)=(2x-3)^2+(3y+5)^2+1965\geqslant 1965$. Za $x=\dfrac{3}{2}$ i $y=-\dfrac{5}{3}$ je $Q_{\min}=1965$.

c) $M(x,y,z)=x^2+(y-6)^2+(z-7)^2+15\geqslant 15$. Za $x=0$, $y=6$ i $z=7$ je $M_{\min}=15$.

d) $N(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2-2x+2y=(x+y)^2+2x+2y+1+x^2-4x+4-5=(x+y)^2+2(x+y)+1+(x-2)^2-5=(x+y+1)^2+(x-2)^2-5\geqslant 5$. Prema tome $N_{\min}=-5$ za $x-2=0$ i $x+y+1=0$, tj. za $x=2$ i $y=-3$.

23. Slično prethodnom zadatku: $P=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2\geqslant 0$. $P_{\min}=0$ ako je $a=b=c=d$.

24. a) $5x^2+5y^2=(4x^2+4xy+y^2)+(x^2-4xy+4y^2)=(2x+y)^2+(x-2y)^2$.

b) $\left(a^2+ax+\dfrac{x^2}{4}\right)+\left(b^2+bx+\dfrac{x^2}{4}\right)+\left(c^2+cx+\dfrac{x^2}{4}\right)+\left(d^2+dx+\dfrac{x^2}{4}\right)=\left(a+\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(c+\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(d+\dfrac{x}{2}\right)^2$.

c) Videti rešenje **zadatka 22**d). Imamo: $(x-y+2)^2+(x-1)^2+\dfrac{9}{2}x^2=(x-y+2)^2+(x-1)^2+\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{9}{4}x^2$.

25. $P(x)=x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. Zbir kvadrata ne može biti negativan, a kako $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ i $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$ ne mogu biti istovremeno jednaki nuli, sledi da je $P(x)>0$ za svako x.

26. $2P(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geqslant 0$. Polinom nije pozitivan za $x=y=z$, jer je tada $P=0$.

27. Slično **primeru E**, dati polinom transformišemo: $P(x)=(x^2-3x+1)^2+0{,}01\geqslant 0{,}01>0$. Polinom nema nula.

28. Traže se vrednosti $x=f(m)$ za koje je $P(x)=0$. Izrazićemo dati polinom kao $P(m)$ i rastaviti na činioce: $P(m)=m^4-(x^2-x)m^2+(x-1)^3=m^4-((x^2-2x+1)+(x-1))m^2+(x-1)^3=m^4-(x-1)^2m^2-(x-1)m^2+(x-1)^3=m^2(m^2-(x-1)^2)-(x-1)(m^2-(x-1)^2)=(m^2-(x-1)^2)(m^2-x+1)=(m-x+1)(m+x-1)(m^2-x+1)$. Sada iz $P(m)=0$ dobijamo: $m-x+1=0$, $m+x-1=0$, $m^2-x+1=0$, odakle nalazimo tražene nule polinoma $P(x)$. To su: $x=m+1$, $x=1-m$ i $x=m^2+1$.

29. Iz $P(7)=11$ dobijamo: $a\cdot 7^3+b\cdot 7^2+c\cdot 7+d=11$, a iz $P(11)=13$ sledi: $a\cdot 11^3+b\cdot 11^2+c\cdot 11+d=13$, odnosno imamo: $343a+49b+7c+d=11$ i $1331a+121b+11c+d=13$. Ako prvu jednakost oduzmemo od druge i podelimo sa 2 dobićemo: $247a+18b+c=\frac{1}{2}$. Ovo je nemoguće, jer leva strana jednakosti predstavlja zbir celih brojeva. Dakle, traženi polinom ne postoji.

30. Slično prethodnom zadatku. Neka je $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Tada $P(7)=7^4+a\cdot 7^3+b\cdot 7^2+c\cdot 7+d=5$ i $P(15)=15^4+a\cdot 15^3+b\cdot 15^2+c\cdot 15+d=9$. Oduzimanjem prve jednakosti od druge dobijemo: $(15^4-7^4)+a(15^3-7^3)+b(15^2-7^2)+c(15-7)=4$. Vidimo da je $15^4-7^4=(15^2-7^2)(15^2+7^2)=(15-7)(15+7)(15^2+7^2)=8\cdot(15+7)(15^2+7^2)$ i slično $15^2-7^2=8(15+7)$, odnosno $c(15-7)=8c$. Dakle leva strana jednakosti koju smo dobili oduzimanjem $P(15)-P(7)$ deljiva je sa 8, a desna strana je jednaka 4, pa nije deljiva sa 8, što nije moguće. Sledi zaključak da traženi polinom ne postoji.

31. $\frac{A}{B}=\frac{(x+3y-x+2y)(x+3y+x-2y)}{(x-x+y)(x+x-y)}=\frac{5y(2x+y)}{y(2x-y)}=\frac{5(2x+y)}{2x-y}$, za $y\neq 0$ i $y\neq 2x$. Za $x=\frac{1}{4}$ i $y=\frac{1}{3}$ je $\frac{A}{B}=\frac{5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=25$.

32. Za $x\neq -3$ dati izraz možemo skratiti, jer posle transformisanja dobijamo: $\frac{(x+3)^3}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x+3)^2}{x-3}$. Za $x=6$ dobijamo $\frac{9^2}{3}=27$.

33. a) $A = \dfrac{a+3}{a} + \dfrac{a}{a-2} - \dfrac{5a-6}{a(a-2)} = \dfrac{(a+3)(a-2)+a^2-(5a-6)}{a(a-2)} = \dfrac{2a^2-4a}{a(a-2)} = \dfrac{2a(a-2)}{a(a-2)} = 2.$

b) $B = \dfrac{4b+2b(b-1)+2(b+1)}{(b-1)(b+1)} : \dfrac{b-1+2}{b-1} = \dfrac{2(b+1)^2}{(b-1)(b+1)} \cdot \dfrac{b-1}{b+1} = 2.$

34. U brojiocu imamo izraz $(25a^4-10a^2b+b^2) = (5a^2-b)^2$. Kako je $5a^2 = \dfrac{5}{4} = b$, to će biti $(5a^2-b)^2 = 0$. Sređivanjem imenioca dobijemo: $(3a^3-2b)^2-9a^6-4b^2 = -12a^3b$, pa je $K = \dfrac{a^5+16b^2}{12a^3b}$. Za $a = -\dfrac{1}{2}$ i $b = 1,25$ je $K = -\dfrac{799}{60}$

35. $N = \dfrac{(1+n)\cdot N}{1+n} = \dfrac{1}{1+n}(1+n-n(1+n)+n^2(1+n)-n^3(1+n)+\cdots+n^{98}(1+n)-n^{99}(1+n)+n^{100}) = \dfrac{1}{1+n}$, jer se ponište ostali sabirci u zagradi. Prema tome, za $n = 5$ je $N = \dfrac{1}{6}$.

36. $A = \left(\dfrac{8a^3}{2a-1} - \dfrac{1}{2a-1}\right) - \left(\dfrac{4a^2}{2a+1} - \dfrac{1}{2a+1}\right) = \dfrac{8a^3-1}{2a-1} - \dfrac{4a^2-1}{2a+1} = 4a^2+2a+1-(2a-1) = 4a^2+2 > 0.$

37. Slično prethodnom zadatku.

38. Iz $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y} = 1$ dobijamo $\dfrac{2(y-x)}{xy} = 1$, a iz $y = x+1$ je $y-x = 1$, pa je $xy = 2$. Dalje je $(y-x)^2 = 1$, odnosno $x^2-2xy+y^2 = 1$ ili $x^2+2xy+y^2 = 1+4xy$. Sledi da je $(x+y)^2 = 1+4\cdot 2 = 9$.

39. Iz $x^2+4y^2 = 5xy$ dobijamo: $x^2+4xy+4y^2 = 9xy$, odakle dobijamo $(x+2y)^2 = 9xy$, pa je $x+2y = 3\sqrt{xy}$. Dalje, slično dobijamo: $x^2-4xy+4y^2 = xy$, odnosno $(x-2y)^2 = xy$, a odavde je $x-2y = -\sqrt{xy}$. Znak "minus" je zbog uslova $x<y \Rightarrow x-2y<0$. Prema tome $\dfrac{x+2y}{x-2y} = -3$.

40. Iz date jednakosti dobijamo: $0 = \dfrac{1}{2}(a^2b+ab^2-2abc+b^2c+bc^2-2abc+c^2a+ca^2-2abc) = \dfrac{1}{2}(a(b^2-2bc+c^2)+b(a^2-2ac+c^2)+c(a^2-2bc+c^2)) = \dfrac{a}{2}(b-c)^2+\dfrac{b}{2}(c-a)^2+\dfrac{c}{2}(a-b)^2 = 0$. Pošto su a, b i c pozitivni brojevi, ovaj zbir može biti jednak 0 samo ako su binomi u zagradama nule: $b-c = c-a = a-b = 0$. Odatle sledi: $a = b = c$.

41. Neka su a i b dati razlomci. Tada je $a+b = 7ab$, odnosno $\dfrac{a+b}{ab} = 7$. Traženi zbir recipročnih vrednosti je $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{b+a}{ab} = 7$.

42. Datu jednakost pomnožimo sa mn i dobijemo: $m^2n + m = mn^2 + n$, odakle je $m(mn+1) = n(mn+1)$. Kako je $mn + 1 \neq 0$, to je $\frac{m}{n} = 1$.

43. Iz date jednakosti dobijamo: $(x+y+z)(xy+yz+xz) = xyz$. Dalje je $xy(x+y)+xyz+x^2z+y^2z+xyz+yz^2+xz^2 = 0$. Rastavljanjem na činioce dobijamo: $xy(x+y)+yz(x+y)+zx(x+y)+z^2(x+y) = 0$, odnosno $(x+y)(xy+yz+xz+z^2) = 0$, a odavde: $(x+y)(y+z)(x+z) = 0$. Leva strana je jednaka nuli ako je bar jedna od zagrada jednaka nuli, npr. $y+z = 0$. Odatle sledi traženi zaključak.

44. Postupamo slično **primeru B**.

a) $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2+2y^2-4y+4}{2x^2+2y^2-4y+7} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2x^2+2y^2-4y+7} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+y^2-2y+1+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2+(y-1)^2+\frac{5}{2}}$. Izraz A imaće najmanju vrednost ako razlomak $\frac{1}{x^2+(y-1)^2+\frac{5}{2}}$ ima najveću vrednost, a to je za $x = 0$ i $y = 1$ (najmanji imenilac). Tada je $A = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$.

b) Posle transformacija dobijamo: $B = -\frac{8-(2x+7)^2}{(3x-y+1)^2+11}$. B je najmanje ako je $-B$ najveće, a to je za $2x+7 = 0$ i $3x-y+1 = 0$, tj. za $x = -\frac{7}{2}$ i $y = -\frac{19}{2}$.

c) Slično prethodnom zadatku: $C = 5 - \frac{1-(a+2b)^2}{(2a+3b+1)^2+2}$. Rešenje: $a = -2$ i $b = 1$.

45. Slično **primeru C**.

a) $A = \frac{n-3+8}{n-3} = 1 + \frac{8}{n-3}$. Za $n \in \{1, 2, 4, 5, 7, 11\}$ imamo odgovarajuće cele vrednosti A redom: $-3, -7, 9, 5, 3, 2$.

b) $B = \frac{n^2-1+2}{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)+2}{n-1} = n+1+\frac{2}{n-1}$. Za $n = 2$ je $B = 5$ i za $n = 3$ je $B = 5$.

c) $C = 2 - \frac{6}{p-4}$, pa je $p \in \{-2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$, itd.

d) $D = p^2 + \frac{3}{p-1}$, pa je $p \in \{-2, 0, 2, 4\}$, itd.

46. a) Iz $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 9$ dobijamo $x^2+2+\frac{1}{x^2} = 9$, odnosno $x^2+\frac{1}{x^2} = 7$. Novim kvadriranjem dobijamo $x^4+\frac{1}{x^4} = 47$.

b) Iz $\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3\cdot 7$, dobijamo $x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}=21$, pa je $x^3+\frac{1}{x^3}=18$.

47. a) $x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2=\frac{17}{4}$, odnosno $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{25}{4}$, pa je $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, jer je $x>0$.

b) $x^2-2+\frac{1}{x^2}=\frac{9}{4}$, pa je $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ ili $x-\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$.

c) $x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$, pa je $x^2-\frac{1}{x^2}=\frac{15}{2}$ ili $x^2-\frac{1}{x^2}=-\frac{15}{2}$.

d) $x^2+\frac{1}{x^3}=8\frac{1}{8}$. $\left(x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{17}{4}-1\right)=\frac{65}{8}.\right)$

48. Datu jednakost pomnožimo sa $a-1$, pošto je $a\neq 1$, i dobijamo $(a-1)(a^2+a+1)=0$, odnosno $a^3-1=0$, pa je $a^3=1$. Kako je $a^{1999}=a\cdot a^{1998}=a\cdot(a^3)^{666}=a\cdot 1^{666}=a$, to je $a^{1999}+\frac{1}{a^{1999}}=a+\frac{1}{a}$. Međutim, iz date jednakosti $a^2+a+1=0$ dobijamo: $a^2+1=-a$. Kad ovo podelimo sa a biće: $a+\frac{1}{a}=-1$. Konačno je: $a^{1999}+\frac{1}{a^{1999}}=a+\frac{1}{a}=-1$.

49. $S=\frac{z}{z+zx+xyz}+\frac{xz}{xz+xyz+xyz^2}+\frac{1}{1+z+xz}=\frac{z}{1+z+xz}+\frac{xz}{1+z+xz}+\frac{1}{1+z+xz}=\frac{1+z+xz}{1+z+xz}=1$.

50. $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=0$, odnosno $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$. Kako je poslednji razlomak $\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$, sledi traženi zaključak.

51. $2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}<9^{100}=(3^2)^{100}=3^{200}$. Dakle: $2^{300}<3^{200}$.

52. a) $2^{1998}=(2^6)^{333}=64^{333}>63^{333}$.

b) $31^{13}<32^{13}=(2^5)^{13}=2^{65}<2^{66}=(2^6)^{11}=64^{11}<65^{11}$.

53. a) Slično prethodnom zadatku b).

b) $26^{400}<27^{400}=3^{1200}=(3^4)^{300}=81^{300}<82^{300}$.

54. $333^{444}=(3\cdot 111)^{4\cdot 111}=(3^4\cdot 111^4)^{111}$, a $444^{333}=(4\cdot 111)^{3\cdot 111}=(4^3\cdot 111^3)^{111}$. Kako je $3^4>4^3$ i $111^4>111^3$, to je $333^{444}>444^{333}$.

55. $0,064^{665} = \left(\frac{64}{1000}\right)^{665} = \left(\frac{8}{125}\right)^{665} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1995}$. Dalje je: $0,16^{998} = \left(\frac{16}{100}\right)^{998} = \left(\frac{4}{25}\right)^{998} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1996}$. Kako je $\frac{2}{5} < 1$, to zaključujemo da je $\left(\frac{2}{5}\right)^{1995} > \left(\frac{2}{5}\right)^{1996}$, tj. $0,064^{665} > 0,16^{998}$.

56. Svodimo stepene na najmanji izložilac: $0,07 \cdot 10^{33} + 6 \cdot 10^{32} - 7,4 \cdot 10^{31} = 0,07 \cdot 10^2 \cdot 10^{31} + 6 \cdot 10 \cdot 10^{31} - 7,4 \cdot 10^{31} = 7 \cdot 10^{31} + 60 \cdot 10^{31} - 7,4 \cdot 10^{31} = 59,6 \cdot 10^{31} = 5,96 \cdot 10 \cdot 10^{31} = 5,96 \cdot 10^{32}$. Dakle: $a = 5,96$ i $k = 32$.

57. a) Dati izraz ima 201 sabirak, pa možemo da ga pregrupišemo u grupe sa 3 sabirka: $(1+2+2^2)+(2^3+2^4+2^5)+\cdots+(2^{198}+2^{199}+2^{200}) = (1+2+2^2)+2^3(1+2+2^2)+\cdots+2^{198}(1+2+2^2) = 7+2^3\cdot 7+\cdots+2^{198}\cdot 7 = 7(1+2^3+\cdots+2^{198})$.

b) Slično prethodnom zadatku. Dati izraz je deljiv sa 2. Treba dokazati i da je deljiv sa 3, sa 5 i sa 7. Deljivost sa 7 dokažemo kao u zadatku a). Dalje, izraz ima 1992 sabirka, pa možemo da ih grupišemo po 4. Svaka od ovih grupa je oblika: $2^k(1+2+4+8) = 15 \cdot 2^k$, pa je dati izraz deljiv sa 3 i sa 5. Pošto je deljiv sa 2, sa 7, sa 3 i sa 5, mora biti deljiv i sa $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

58. a) Podelimo datu jednakost sa 2 i dobićemo: $m = 1+2+2^2+\cdots+2^{1988}+2^{1989}$. Oduzmemo ovu jednakost od date i imamo: $2m - m = m = 2^{1990} - 1$.

b) Slično **zadatku 57**. Treba dokazati deljivost sa 3 (po dva sabirka) i sa 31 (po pet sabiraka).

59. a) i b) Slično **zadatku 57**.

c) Slično **zadatku 58**. (Pomnoži datu jednakost sa 3 i oduzmi $3S - S$, itd.)

60. Slično **zadatku 58** a). Označimo sa $2m$ zbir svih datih brojeva i dobićemo $2m = 2+2^2+2^3+\cdots+2^{1995}+2^{1996}$, odakle je $m = 2^{1996}-1$. Ako je moguće podeliti ove brojeve na dva podskupa jednakih zbirova, onda ti zbirovi iznose: $m = 2^{1996}-1$. Broj m je očigledno neparan, a svi brojevi koje smo trebali sabrati, parni su. Dakle, ovakva podela nije mogućna.

61. a) $2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50} \equiv 1^{50} \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$. Ostatak je 1.

Drugi način. Broju 2 nedostaje 1 da bi bio deljiv sa 3, pa je $2 \equiv -1 \pmod 3$. Dakle, $2^{100} \equiv (-1)^{100} \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$.

b) $2^2 = 4 \equiv -1 \pmod 5$, pa je $2^{100} = 4^{50} \equiv (-1)^{50} \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$. Ostatak deljenja je 1.

62. a) $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$, pa je $3^{100} = 3^{99} \cdot 3 = (3^3)^{33} \cdot 3 \equiv 1^{33} \cdot 3 \pmod{13} \equiv 3 \pmod{13}$. Ostatak deljenja je 3.

b) Uočimo da je $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120 \equiv -1 \pmod{11}$. Zatim je $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $9 \equiv -2 \pmod{11}$, $8 \equiv -3 \pmod{11}$, $7 \equiv -4 \pmod{11}$ i $6 \equiv -5 \pmod{11}$ pa je $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = -120 \pmod{11} \equiv -1 \cdot 120 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$. Dakle: $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) \equiv -1 \cdot 1 \pmod{11} \equiv -1 \pmod{11}$, pa je ostatak deljenja 10.

63. $19 \equiv 1 \pmod 9$ i $91 \equiv 1 \pmod 9$, itd. Zatim, $19 \equiv 3 \pmod 8$ i $91 \equiv 3 \pmod 8$, itd.

64. Primetimo da je $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ (vidi rešenje **zadatka 62**), zatim $4^3 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$. Zbog toga je: $(3^{105} + 4^{105}) = ((3^3)^{35} + (4^3)^{35}) \equiv (1^{35} + (-1)^{35}) \pmod{13} \equiv (1-1) \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}$.

Što se tiče deljivosti sa 11, uočimo da je $3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11}$. Dalje je $4^3 = 64 \equiv -2 \pmod{11}$, pa je $4^{15} = (4^3)^5 \equiv (-2)^5 \pmod{11} \equiv -32 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$. Prema tome: $(3^{105}+4^{105}) = ((3^5)^{21} + (4^{15})^7) \equiv (1^{21}+1^7) \pmod{11} \equiv 2 \pmod{11}$.

65. a) *Prvi način* $17^2 = 289 \equiv -1 \pmod{10}$, $13^2 = 169 \equiv -1 \pmod{10}$ i $24 \equiv 4 \pmod{10}$, pa je: $17^5+24^4-13^{21} \equiv ((-1)^2 \cdot 17 + 4^4 - (-1)^{10} \cdot 13) \pmod{10}) \equiv (17+6-13) \pmod{10} \equiv 10 \pmod{10} \equiv 0 \pmod{10}$.

Drugi način: Cifra jedinica broja je ostatak deljenja tog broja sa 10, na primer $17 \equiv 7 \pmod{10}$. Stoga tražimo cifru jedinica datog izraza. Brojevi 17^5 i 7^5 imaju istu poslednju cifru, to je 7. Poslednja cifra broja 24^4 je 6, a broja 13^{21} je 3. Dakle, cifra jedinica datog izraza određuje se iz: $7+6-3=10$, a to daje nulu.

b) $2^3 \equiv -2 \pmod{10}$, $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$, $5^n \equiv 5 \pmod{10}$, $4^2 \equiv -4 \pmod{10}$, itd.

c) $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$, pa je $7^{10000} \equiv (-1)^{5000} \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$, itd.

d) $7^7 = (7^2)^3 \cdot 7 \equiv (-1)^3 \cdot 7 \pmod{10} \equiv 3 \pmod{10}$. Dalje, računamo: $7^{7^7} \equiv 7^3 \pmod{10} \equiv 7^2 \cdot 7 \pmod{10} \equiv 3 \pmod{10}$, pa je $7^{7^7} \equiv 7^3 \pmod{10} \equiv 3 \pmod{10}$, itd.

e) Kako je $3^2 = 9 \equiv -1 \pmod{10}$, imamo: $3^{1990} + 3^{1996} = (3^2)^{995} + (3^2)^{998} \equiv ((-1)^{995} + (-1)^{998}) \pmod{10} \equiv (-1+1) \pmod{10} \equiv 0 \pmod{10}$.

66. Primetimo da je $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Zbog toga je: $2^{1996}+5 = (2^3)^{665} \cdot 2 + 5 \equiv (1^{665} \cdot 2 + 5) \pmod 7 \equiv 7 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$.

67. $43^2 \equiv -1 \pmod 5$ i $37^2 \equiv -1 \pmod 5$, itd.

68. Pođi od podataka: $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, $4 \equiv -1 \pmod 5$ i $6 \equiv 1 \pmod 5$. U slučaju deljivosti sa 10 postupi kao u **zadatku 65**.

69. Slično **zadatku 65**. Rešenje kongruencijom prepuštamo čitaocu, a dajemo rešenje u kojem se koriste cifre jedinica.

Ako se broj završava nulom, onda se i njegov 1996-ti stepen završava nulom. Slično, stepen broja koji ima poslednju cifru 5, završava se cifrom 5. Četvrti stepeni ostalih parnih brojeva završavaju se cifrom 6, pa se i 1996-ti stepeni završavaju cifrom 6. Slično zaključujemo da se 1996-ti stepeni ostalih neparnih brojeva završavaju cifrom 1. Zbog toga je poslednja cifra datog izraza ista kao kod broja: $199 \cdot 0 + (998-199) \cdot 6 + 200 \cdot 5 + (998-200) \cdot 1 = 6592$. Ostatak deljenja datog izraza sa 10 je 2.

70. Slično prethodnom zadatku.

71. a) $5 \equiv -1 \pmod 3$, pa je $5^{2n-1} - 1 \equiv ((-1)^{2n-1} - 1) \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$. Dakle $5^{2n-1} - 1$ nije deljivo sa 3. Dalje je: $4^n - 1 \equiv (1^n - 1) \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$, tj. $4^n - 1$ je deljivo sa 3, pa $5^{2n-1} - 1$ nije deljivo sa $4^n - 1$.

b) Slično prethodnom zadatku: $2^{2n} - 1 = 4^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$, a $3^{2n} - 1$ nije deljivo sa 3.

72. Dati izraz transformišemo: $5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1} = (5^2)^n\cdot 5+3^3\cdot 3^{n-1}\cdot 2^{n-1} = 5\cdot 25^n + 27\cdot 6^{n-1}$. Kako je $25 \equiv 6 \pmod{19}$ to je $25^n \equiv 6^n \pmod{19} \equiv 6\cdot 6^{n-1} \pmod{19}$. Zbog toga za dati izraz važi: $5^{2n+1} + 3^{n+2}\cdot 2^{n-1} \equiv (5\cdot 6+27)\cdot 6^{n-1} \pmod{19} \equiv 57\cdot 6^{n-1} \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19}$, jer je $57 = 3\cdot 19$.

73. Povlačenjem 5 duži iz jednog slobodnog kraja, umesto jednog dobićemo 5 slobodnih krajeva. Dakle, svaki put broj slobodnih krajeva poveća se za 4. Posle k takvih povlačenja imaćemo $(1 + 4\cdot k)$ slobodnih krajeva. Broj 1000 je deljiv sa 4, a $(1 + 4k)$ nije, pa je očigledno da je Lolo loše prebrojao.

74. Slično prethodnom zadatku: svakim sečenjem broj listova povećava se za 9, pa je u svakom momentu broj listova oblika $10 + 9k \equiv 1 \pmod 9$. Broj 2000 ne možemo nikad dobiti, jer je $2000 = 2 + 9\cdot 222 \equiv 2 \pmod 9$.

75. Ako vitez Koja odseče 1 glavu, zmaju izrastu 10 novih, pa se broj glava poveća za 9. Ako odseče 17, zmaju izraste 14 novih glava i broj glava se smanji za 3. Ako odseče 21 glavu, za toliko se smanji ukupan broj glava i ako odseče 33 glave, broj glava se poveća za 15. Dakle, u svakom slučaju broj glava se menja, pa samim tim i eventualno smanjuje, za broj koji je deljiv sa 3. Međutim, $2017 \equiv 1 \pmod 3$, pa vitez Koja nikad neće uspeti da zmaju odseče sve glave.

76. Koristićemo najpre formulu za rastavljanje binoma na činioce, navedenu na početku **odeljka 1.1.** To je formula za binom $a^n - b^n$. Naime, $7^{100} - 1 = (7^4)^{25} - 1 = (7^4 - 1(7^{96} + 7^{92} + \cdots + 7^4 + 1) = (7^2 - 1)(7^2 + 1)(7^{96} + 7^{92} + \cdots + 7^4 + 1) = (7-1)(7+1)(7^2+1)\cdot N$, gde smo sa N označili broj u "dugačkoj" zagradi. Konačno je $7^{100} - 1 = 6\cdot 8\cdot 50\cdot N = 2400\cdot N = 100\cdot(24N)$.

77. $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$, a ovo nije deljivo sa 4.

78. Pri deljenju celog broja sa 4 ostatak deljenja je 0, 1, 2 ili 3, pa se celi broj z može izraziti u obliku: $4k$, ili $4k \pm 1$, ili $4k + 2$. Kvadriranjem u svim slučajevima dobijamo: $z_1^2 = 16k^2$ – deljivo sa 8, tj. ostatak deljenja sa 8 je 0; $z_2^2 = (4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1 = 8k(k \pm 1) + 1$ i $z_3^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4$. Dakle, kvadrat celog broja pri deljenju sa 8 daje jedan od tri ostatka: 0, 1, 4. Za $a^2 + b^2 + c^2$, gde su a, b, c celi brojevi, ostatak deljenja sa 8 ne može biti 7, jer od brojeva skupa $\{0, 1, 4\}$ ne možemo napraviti zbir tri broja deljiv sa 7.

79. Za $n > 2$ možemo uočiti pet uzastopnih prirodnih brojeva: $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$ i $n + 2$. Njihov zbir iznosi $5n$, a to je složeni broj.

80. $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n$.

81. Za $n > 2$ imamo: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$. Ako je n deljivo sa 3, tj. $n = 3k$, onda imamo $9k(n^2 + 2)$ i tvrđenje važi. Ako n nije deljivo sa

3, onda je $n = 3k \pm 1$, pa je $n^2+2 = (3k\pm1)^2+2 = 9k^2\pm6k+3 = 3(3k^2\pm2k+1) = 3p$, pa je gornji zbir jednak $3n \cdot 3p = 9np$. Dakle, u svim slučajevima važi deljivost sa 9.

82. Neka je n^3 srednji broj. Tada imamo proizvod $(n^3-1)\cdot n^3 \cdot (n^3+1)$, koji treba da je deljiv sa 504. Kako je $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$, a brojevi 7, 8 i 9 su među sobom uzajamno prosti, treba dokazati deljivost sa 7, 8 i 9.

Deljivost sa 8. Ako je n parni broj, tj. $n = 2k$, onda je $n^3 = 8k^3$, deljivo sa 8. Ako je n neparan, onda su $n^3 - 1$ i $n^3 + 1$ dva uzastopna parna broja pa je njihov proizvod deljiv sa 8. Dakle, proizvod je sigurno deljiv sa 8.

Deljivost sa 9. Ako je $n = 3k$, onda je n^3 deljivo sa 9. Ako je $n \equiv 1 \pmod 3$, onda je i $n^3 \equiv 1 \pmod 3$, pa je $n^3 - 1$ deljivo sa 9. Zaista, tada je $n = 3k+1$, pa je $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1) = 3k((3k+1)^2 + (3k+1)+1) = 3k(9k^2+9k+3) = 9k(3k^2+3k+1)$. U slučaju $n \equiv -1 \pmod 3$, sa 9 je deljivo n^3+1.

Deljivost sa 7. U pogledu deljivosti sa 7, lako se pomoću kongruencije po modulu 7 uveravamo da je tvrđenje tačno. Na primer, ako je $n \equiv \pm 3 \pmod 7$, tada je $n^3 \equiv \pm 27 \pmod 7 \equiv \mp 1 \pmod 7$, pa je n^3+1 ili n^3-1 deljivo sa 7, itd.

83. Ako je $n = 5$ onda je $n^2 = 25$, pa možemo smatrati da je treća cifra zdesna 0, znači parna je. Ako je $n > 5$, onda možemo zapisati $n = 10k+5$, gde je k broj koji se dobija kad broju n izostavimo cifru jedinica. Tada će biti $n^2 = (10k+5)^2 = 100k^2 + 100k + 25 = 100k(k+1) + 25$. Broj $100k(k+1)$ završava se sa dve nule, pa se n^2 završava sa 25, a treća cifra zdesna broja n^2 je poslednja cifra broja $k(k+1)$. Broj $k(k+1)$ je paran, kao proizvod dva uzastopna cela broja, pa je tražena, treća cifra zdesna, parna.

84. Ako je d najveći zajednički delilac brojeva a i b, onda je d takođe najveći zajednički delilac brojeva a, b i $a-b$. Dakle, d je najveći zajednički delilac brojeva $5k+6$ i $8k+7-5k-6 = 3k+1$. Na isti način zaključujemo da je $d = D(3k+1, 5k+6-3k-1) = D(3k+1, 2k+5) = D(2k+5, k-4) = D(k-4, k+9) = D(k+9, 13)$. Kako je 13 prosti broj, sledi da drugih zajedničkih delilaca nema, pa je $d = 13$.

85. Znamo da se svaki prosti broj veći od 3 može predstaviti u obliku $6k+1$ ili $6k-1$, gde je k celi broj, pa su i svi prosti delioci datog broja istog oblika. (Očigledno je da broj $6n-1$ nije deljiv ni sa 2, ni sa 3.) Zaista, ne mogu svi delioci broja $6n-1$ biti oblika $6k+1$, zato što je $(6p+1)(6q+1) = 36pq + 6p + 6q + 1 = 6(6pq + p + q) + 1 = 6r + 1$, pa bi i naš broj bio oblika $6r+1$, što očigledno nije tačno.

86. Cifra jedinica broja $n^2+n+1 = n(n+1)+1$ može biti 1, 3, 7 ili 9. Dakle, n^2+n+1 nije deljivo sa 2, pa ne može biti deljivo parnim brojem 2004 i nije deljivo sa 5, pa ne može biti deljivo sa 2005 (jer je $2005 = 5 \cdot 401$).

87. Ne! Naime, ako bi bilo $n^2 + 2n + 1999 = k^2$, onda bismo imali jednakost: $(n+1)^2+1998 = k^2$, ili $k^2-(n+1)^2 = 1998$, pa bi važilo: $(k-n-1)(k+n+1) = 2\cdot999$. Primetimo da je $(k-n-1) + (k+n+1) = 2k$ – paran broj. Sledi da su brojevi $(k-n-1)$ i $(k+n+1)$ oba parna ili oba neparna. Međutim, tada je $(k-n-1)\cdot(k+n+1)$ neparno ili deljivo sa 4, a $2 \cdot 999$ nije neparno, a nije ni deljivo sa 4.

88. $n^3+2000n=n^3-n+2001n=n(n^2-1)+2001n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+3\cdot 667n$. Prvi sabirak je deljiv sa 6 jer je to proizvod tri uzastopna cela broja (pa je deljiv sa 3 i sa 2), a drugi je uvek deljiv sa 3, a za paran broj n je deljiv sa 6.

89. Kako je $P(x)=5x^3-5x+30x=5(x-1)\cdot x\cdot(x+1)+30x$, to je, za celi broj x, vrednost polinoma deljiva sa 6 (videti rešenje prethodnog zadatka), a očigledno je deljiva i sa 5.

90. Jeste! Rastavimo polinom na činioce: $P(n)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$. Ako je n prirodni broj, onda je $P(n)$ proizvod četiri uzastopna cela broja, pa je jedan od ovih brojeva deljiv sa 2, jedan sa 3 i jedan sa 4, a $2\cdot 3\cdot 4=24$.

91. Izraz je celi broj za sve celobrojne vrednosti z, jer je $\dfrac{z^3+5z}{6}=\dfrac{z^3-z+6z}{6}=\dfrac{(z-1)z(z+1)}{6}+z$, a $(z-1)z(z+1)$ je deljivo sa 6. (Vidi rešenje **zadatka 88**)

92. Treba utvrditi deljivost sa 16 i sa 3. Rastavimo polinom na činioce: $P(n)=(n-1)(n+1)(n+3)$. Broj n ne može biti paran, jer bi vrednost $P(n)$ bila neparna. Ako je n neparan broj, onda su $(n-1)$, $(n+1)$ i $(n+3)$ tri uzastopna parna broja. Označimo ih sa $2k$, $2k+2$ i $2k+4$. Tada je $P(n)=8k(k+1)(k+2)$, a $k(k+1)(k+2)$ je proizvod tri uzastopna prirodna broja, pa je deljiv sa 6. Dakle, n mora biti neparan broj.

93. *Prvi način:* $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Uočimo da je $(p-1)\cdot p\cdot(p+1)$ proizvod tri uzastopna prirodna broja, pa je jedan od njih deljiv sa 3. Kako je p prost broj i veći od 3, on ne može biti deljiv sa 3. Znači, jedan od brojeva $(p-1)$ i $(p+1)$ je deljiv sa 3. Sem toga, p je neparan broj, pa su $(p-1)$ i $(p+1)$ dva uzastopna parna broja i jedan od njih je deljiv sa 2, a drugi sa 4. Dakle, $p^2-1=3\cdot 2\cdot 4\cdot k=24k$.

Drugi način: Svaki prost broj veci od 3 je oblika $6k\pm 1$, pa je $p^2-1=(6k\pm1)^2-1=36k^2\pm 12k=12k(3k\pm 1)$. Ako je k paran broj, onda je $12k$ deljivo sa 24. Ako je k neparan broj, onda je $3k\pm1$ paran, itd.

94. $p^2+11=p^2-1+12$, itd, vidi rešenje prethodnog zadatka.

95. Kako je $P(p)=(p^2-1)(p+2)$, to je $P(p)$ deljivo sa 24, na osnovu **zadatka 93**. Da bi $P(p)=(p-1)(p+1)(p+2)$ bilo deljivo sa 216, treba da jedan od činilaca bude deljiv da 9, jer je $24\cdot 9=216$. Najmanji broj p koji ispunjava ovaj uslov je $p=7$, jer je tada $p+2=9$.

96. Slično **primeru C**: $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$. Zbog $n^2-2n+2=n(n-2)+2>1$ za $n>1$, n^4+4 je složeni broj za $n>1$.

97. Kao u **primeru C**, imamo: $333^4+4^{333}=333^4+4\cdot 4^{332}=333^4+4\cdot(4^{83})^4$. Na osnovu rezultata iz **primera C**, uzimajući da je $n=333$ i $k=4$, dobijamo: $333^4+4^{333}=(333^2+2\cdot 4^{166}-2\cdot 333\cdot 4^{83})(333^2+2\cdot 4^{166}+2\cdot 333\cdot 4^{83})$, a to je sigurno složeni broj.

98. Neka su izabrane cifre a, b, c, i $a>b>c$. Po uslovu je $(100a+10b+c)+(100a+10c+b)=1444$, odnosno $200a+11(b+c)=1444$. Odavde dobijamo:

$11(b+c)-44=200(7-a)$. Leva strana jednakosti je deljiva sa 11, pa mora biti i desna. To je moguće samo ako je $7-a=0$, tj. ako je $a=7$. Tada je $b+c=4$, pa je $b=3$ i $c=1$.

99. Uočimo da je $3=2^2-1^2$. Za $p>3$ je $p=6k+1$ ili $p=6k-1$. U prvom slučaju je $p=6k+1=9k^2+6k+1-9k^2=(3k+1)^2-(3k)^2$. U drugom slučaju je $p=6k-1=9k^2-9k^2+6k-1=(3k)^2-(3k-1)^2$. Dakle, možemo svaki prost broj predstaviti u obliku razlike kvadrata dva uzastopna prirodna broja. Da li ovi brojevi mogu biti neuzastopni? Ne mogu, jer za $n>1$ je $(k+n)^2-k^2=2kn+n^2=n(2k+n)$, a to je složeni broj.

Prikazano razlaganje je jedinstveno, jer, nije teško uveriti se: iz $(3k+1)^2-(3k)^2=(3p+1)^2-(3p)^2$ sledi $k=p$.

100. Dokažimo najpre da je k^5-k deljivo sa 15 za svaki celi broj k. Zaista: $k^5-k=k(k^4-1)=k(k^2-1)(k^2+1)=(k-1)\cdot k\cdot(k+1)(k^2+1)$. Prva tri činioca su tri uzastopna cela broja pa je proizvod deljiv sa 3. Dokažimo da je deljiv i sa 5. Ako je $k\equiv 1 \pmod 5$, $k\equiv 0 \pmod 5$ ili $k\equiv -1 \pmod 5$, onda su redom: prvi, drugi ili treći činilac deljivi sa 5. Ako je $k\equiv \pm 2 \pmod 5$, tada je $(k^2+1)\equiv((\pm 2)^2+1) \pmod 5 \equiv 5 \pmod 5 \equiv 0 \pmod 5$, pa je poslednji činilac deljiv sa 5. Sledi zaključak da je k^5-k deljivo sa 5, ako je k celi broj.

Uočimo da je $a^5+b^5=(a^5-a)+(b^5-b)+(a+b)=162075$. Odavde je $a+b=162075-(a^5-a)-(b^5-b)$. Broj 162075 je deljiv sa 5, a zbir cifara mu je 21, pa je deljiv i sa 3, dakle deljiv je sa 15. Prema tome, u poslednjoj jednakosti na desnoj strani su sva tri sabirka deljiva sa 15, pa je i leva strana jednakosti, $(a+b)$, deljiva sa 15.

101. Slično prethodnom zadatku. (Videti i rešenje **zadatka 91**.) Lako se dokaže da je n^3-n deljivo sa 6 ako je n prirodni broj. Tada iz $n_1+n_2+\cdots+n_{2017}=6k$, dobijamo: $(n_1-n_1^3)+(n_2-n_2^3)+\cdots+(n_{2017}-n_3^{2017})+(n_1^3+n_2^3+\cdots+n_{2017}^3)=6k$. Kako su izrazi u svakoj od prvih 2017 zagrada deljivi sa 6, a takođe i desna strana jednakosti, sledi i da je $(n_1^3+n_2^3+\cdots+n_{2017}^3)$ deljivo sa 6.

102. Slično **primeru D**: rezultat je $p=11$.

103. $P(n)=n^2(n-2)^2$, pa je $P(n)$ deljivo sa 3 za svaki prirodni broj n oblika $n=3k$ ili $3k+2$.

104. Razlika n^3-n je deljiva sa 3 (videti rešenje **zadatka 88**), pa n^3-n+2^n nije deljivo sa 3. Zbog toga ne može biti n^3-n+2n deljivo sa 2001, jer je 2001 deljivo sa 3.

105. Potrebno je da bude $3(n^2+n)\equiv 3 \pmod 5$, odnosno $(n^2+n)\equiv 1 \pmod 5$, a to je za $n\equiv 2 \pmod 5$, da bi dati izraz bio deljiv sa 5. To su prirodni brojevi oblika $n=5k+2$ za celi broj $k>0$. Dati izraz ne može biti deljiv sa 6, jer je $3n^2+3n+7=3n(n+1)+6+1\equiv 1 \pmod 6$, zbog $n(n+1)=2k$.

106. Sređivanjem datog izraza dobijamo polinom: $4n^2+12n+14=(2n+3)^2+5$. Ovaj polinom je deljiv sa 10 za svaki prirodni broj n za koji se $2n+3$ završava sa 5, a to je ispunjeno za $n=5k+1$, gde je k celi broj, $k\geqslant 0$.

107. Ako m i n nisu deljivi sa 3, onda je $m = 3p \pm 1$ i $n = 3q \pm 1$. Tada je, npr. $m^3 = (3p \pm 1)^3 = 27p^3 \pm 27p^2 + 9p \pm 1 = 9(3p^3 \pm 3p^2 + p) \pm 1$, odnosno $m^3 \equiv 1 \pmod 9$. Zbog toga je $m^6 = (m^3)^2 \equiv (\pm 1)^2 \pmod 9 \equiv 1 \pmod 9$. Slično je i $n^6 \equiv 1 \pmod 9$, pa je $m^6 - n^6 \equiv 0 \pmod 9$.

108. Neka ja k jedan od odabranih prirodnih brojeva, koji nije deljiv sa 5. Tada je $k \equiv 1 \pmod 5$ ili $k \equiv \pm 2 \pmod 5$. U prvom slučaju je $k^2 \equiv 1 \pmod 5$, pa je i $k^4 \equiv 1 \pmod 5$. U drugom slučaju je $k^2 \equiv 4 \pmod 5$, pa je tada $k^4 \equiv 16 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$. Sledi zaključak da je u svakom slučaju ostatak deljenja broja k^4 sa 5 jednak 1. To važi i za ostala četiri odabrana prirodna broja. Stoga je zbir četvrtih stepena ovih pet brojeva deljiv sa 5. (Zbir ostataka je $1+1+1+1+1 = 5$.)

109. Broj n ne može biti paran, jer bi tada $n^2 + 2^n$ bio složen (deljiv sa 2). Dakle, n je neparan broj. Dalje je $n^2 + 2^n = n^2 - 1 + 2^n + 1 = (n-1)(n+1) + (2+1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1) = (n-1)(n+1) + 3(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1)$.

Očigledno $(n-1)(n+1)$ ne može biti deljivo sa 3, jer bi onda desna strana jednakosti bila deljiva sa 3, pa $n^2 + 2n$ ne bi bio prosti broj. Kako je $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ proizvod tri uzastopna prirodna broja, to n mora biti deljivo sa 3, jer $(n-1)$ i $(n+1)$, nisu deljivi sa 3. Kako je n neparan, broj $n-3$ biće paran i deljiv sa 3, a to znači i deljiv sa 6.

110. $m^2 + 3mn + n^2 = (m-n)^2 + 5mn$. Kako je ovo deljivo sa 25, biće $(m-n)^2 + 5mn = 25k$. Sledi da je i $m-n$ deljivo sa 5, tj. da je $m-n = 5p$, pa imamo jednakost: $25p^2 + 5mn = 25k$. Posle skraćivanja sa 5 dobijamo: $5p^2 + mn = 5k$, pa sledi da je $m \cdot n$ deljivo sa 5. Neka je, recimo, $m = 5q$. Tada iz $m - n = 5p$. tj. iz $5q - n = 5p$, sledi da je i n deljivo sa 5.

111. Ako je $p = 2$, tada je $p^2 + 11 = 15$, a broj 15 ima četiri različita delioca: 1, 3, 5 i 15. Ako je $p = 3$, tada je $p^2 + 11 = 20$, što daje rešenje zadatka, jer broj 20 ima šest različitih delilaca: 1, 2, 4, 5, 10 i 20. Ne može biti $p > 3$, jer je tada $p^2 + 11$ deljivo sa 12 (videti rešenje **zadatka 94**), a broj 12 već ima šest različitih delilaca: 1, 2, 3, 4, 6 i 12. Dakle, jedino rešenje je $p = 3$.

112. Rastavljanjem polinoma $P(x)$ na činioce dobijamo: $P(x) = (x-2)(x-1) \cdot x(x+1)(x+2)$. Za svaki celi broj x, ovo će biti proizvod pet uzastopnih celih brojeva. Zbog toga je neki od njih deljiv sa 5, neki sa 4, neki sa 3 i neki sa 2, a $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

113. Neka je $a < b < c$. Ne mogu biti svi brojevi a, b, c neparni, jer bi tada N bio parni broj, dakle ne bi bio prost. Sledi da je $a = 2$. Sada imamo jednakost: $N = b^4 + c^4 + 13$. Ako je $b \neq 3$ i $c \neq 3$, onda je $b = 3p \pm 1$ i $c = 3q \pm 1$. Tada je npr, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$, pa je $b^2 \equiv 1 \pmod 3$ i $b^4 \equiv 1 \pmod 3$, tj. $b^4 = 3m + 1$ i slično $c^4 = 3n + 1$. Ali, tada bi broj N bio deljiv sa 3, tj. bio bi složen broj. Sledi da je $b = 3$. Konačno imamo: $N = c^4 + 94$. Ako je $c \neq 5$, onda je, prema rešenju **zadatka 108**, $c^4 = 5k + 1$. Ovo nije moguće jer bi u tom slučaju broj N bio deljiv sa 5, što znači bio bi složen broj. Dakle, $c = 5$, pa je $N = 719$. Rešenja su: $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $N = 719$.

114. Dokazaćemo, prvo: ako a nije deljivo sa 2 ni sa 3, tada je m deljivo sa 6 i drugo: ako je m deljivo sa 6 tada a nije deljivo ni sa 2, ni sa 3.

Prvi deo dokaza: ako a nije deljivo ni sa 2, ni sa 3, onda pri deljenju sa 6 daje ostatak 1 ili 5, pa se može predstaviti u obliku: $a = 6k \pm 1$. Tada je $m = 4(6k \pm 1)^2 + 3(6k \pm 1) + 5 = 144k^2 \pm 48k + 18k + (9 \pm 3)$, a to je deljivo sa 6, jer je svaki sabirak sa desne strane jednakosti deljiv sa 6.

Drugi deo dokaza: ako je m deljivo sa 6, onda je $4a^2 + 3a + 5 = 6k$. Kako je desna strana parni broj, to a mora biti neparni broj, da bi i $3a + 5$ bio parni broj. Dakle, a nije deljivo sa 2. Poslednju jednakost možemo napisati u obliku: $3a^2 + 3a + a^2 - 1 + 6 = 6k$, odnosno: $3a(a + 1) + (a - 1)(a + 1) = 6k - 6$. Broj $a(a + 1)$ je deljiv sa 2, pa je $3a(a + 1)$ deljivo sa 6. Kako je i desna strana deljiva sa 6 mora biti i $(a - 1)(a + 1)$ deljivo sa 6. To je moguće samo ako je $a = 3n + 1$ ili $a = 3n - 1$, pa a nije deljivo sa 3.

115. Ne postoji! Uočimo da je $P(n) = 2n^2(n - 1) - 6n(n + 1) + 3$. Brojevi $n(n - 1)$i $n(n + 1)$ su uvek parni, pa su izrazi $2n^2(n - 1)$ i $6n(n + 1)$ deljivi sa 4. Zbog toga vrednost polinoma možemo izraziti kao $P(n) = 4k + 3$. Treba da bude $m^2 = 4k + 3$. Međutim, ako je m parni broj, tj. $m = 2p$, tada je $m^2 = 4p^2$, a ako je m neparni broj, odnosno ako je $m = 2p + 1$, tada je $m^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4q + 1$. Dakle, ne može kvadrat prirodnog broja imati oblik $4k + 3$.

116. Pregrupišimo sabirke na sledeći način: $s = (1^{1999} + 1998^{1999}) + (2^{1999} + 1997^{1999}) + \cdots + (999^{1999} + 1000^{1999}) + 1999^{1999}$. Prema formuli za rastavljanje binoma na činioce u slučaju $a^{2k+1} + b^{2k+1}$, uočavamo sledeći koristan zaključak: $a^{1999} + b^{1999} = (a + b)(a^{1998} + a^{1997}b + \cdots + ab^{1997} + b^{1998})$. Primenimo ovo na naše zagrade i primetimo da je u svakom slučaju $(a + b) = 1999$. Stoga, npr. imamo: $(1^{1999} + 1998^{1999}) = (1 + 1998)(1^{1998} + 1998 + \cdots + 1998^{1997} + 1998^{1998}) = 1999 \cdot k_1$. Tako s postaje: $s = 1999 \cdot k_1 + 1999 \cdot k_2 + \cdots + 1999 \cdot k_{999} + 1999^{1999}$. Dakle, s je deljivo sa 1999, jer su svi sabirci sa desne strane deljivi sa 1999.

117. $P(x) = x(x + 1)(x - 4)$, pa je $P(1111) = 1111 \cdot 1112 \cdot 1107$. Očigledno je broj 1111 deljiv sa 11, broj 1112 sa 8 i broj 1107 sa 9, a $11 \cdot 8 \cdot 9 = 792$.

118. Slično prethodnom zadatku: $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

119. Slično **zadatku 117**: $375 = 3 \cdot 5^3$.

120. $N = 3^2 \cdot 3^n - 2^2 \cdot 2^n + 3^n - 2^n = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n = 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1}$.

121. Iz prve jednačine je $z = 2x + 2y$, a iz druge $z = 3y - 3x$. Pomnožimo prvu jednačinu sa 3 i drugu sa -2, pa ih saberemo. Dobićemo $z = 12x$, pa kako je $x > 0$, to je $z > x$.

122. Levoj i desnoj strani nejednakosti $a < b$ dodamo broj a. Dobijamo $2a < a + b$, odakle je $a < \dfrac{a + b}{2}$. Ako umesto a dodamo b dobijemo $a + b < 2b$, odnosno $\dfrac{a + b}{2} < b$, što je trebalo utvrditi.

123. Levoj i desnoj strani nejednakosti dodamo broj 1, pa izvršimo sabiranje: $\frac{a}{b}+1 \leqslant \frac{c}{d}+1$, odakle je $\frac{a+b}{b} \leqslant \frac{c+d}{d}$. Za dokaz druge nejednakosti levoj i desnoj strani se doda broj -1.

124. Nejednakost $x > 2$ pomnožimo sa y, a nejednakost $y > 2$ pomnožimo sa x. Dobijamo $xy > 2y$ i $xy > 2x$. Ove dve nejednakosti saberemo i skratimo sa 2.

125. Uočimo da je $xyz - xy - yz - xz + x + y + z = (x-1)(y-1)(z-1)+1$. Svaki od izraza u zagradi, ima vrednost između -1 i 0. (Na primer iz $0 < x < 1$, sledi $-1 < x-1 < 0$.) Zbog toga je $-1 < (x-1(y-1)(z-1) < 0$. Dodavanjem broja 1 levo, u sredini i desno dobijamo da je $0 < (x-1)(y-1)(z-1)+1 < 1$.

126. Iz $a > b$, odnosno $b < a$, dobijamo $a+b < 2a$. Odavde sledi: $(a+b)^{100} < 2^{100}a^{100} < 2^{100}a^{100} + 2^{100}b^{100} = 2^{100}(a^{100}+b^{100})$.

127. Slično **primeru D**. Kvadriramo datu jednakost: $a^2+2ab+b^2 = 1$. Ovoj jednakosti dodamo tačnu nejednakosti $(a-b)^2 \geqslant 0$, odnosno $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$. Saberemo jednakost i nejednakost i dobijemo: $2a^2+2b^2 \geqslant 1$, odakle je $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$. Ovu nejednakost pomnožimo sa $a+b=1$ i dobijemo: $a^3+b^3+ab(a+b) \geqslant \frac{1}{2}$, odakle, zbog $a+b=1$, imamo $a^3+b^3+ab \geqslant \frac{1}{2}$, odnosno $a^3+b^3 \geqslant \frac{1}{2}-ab$. Ocenimo vrednost ab iz jednakosti: $a^2+2ab+b^2 = 1$, odnosno iz $ab = \frac{1-(a^2+b^2)}{2}$. Kako (a^2+b^2) ima minimalnu vrednost $\frac{1}{2}$ (jer je $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$), to je $ab \leqslant \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$. Konačno, kako ab ima maksimalnu vrednost $\frac{1}{4}$, jer je $ab \leqslant \frac{1}{4}$, to je $a^3+b^3 \geqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

128. Prema **primeru C**, za pozitivne brojeve x, y i z važi nejednakost: $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$. Izaberemo x, y i z tako da bude $x = ab$, $y = bc$ i $z = ac$. Dobićemo: $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geqslant ab^2c + abc^2 + a^2bc$. Ovu nejednakost podelimo sa abc i dobijemo traženu nejednakost.

129. Polazimo od nejednakosti iz **primera C**: $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$, odnosno od $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2ab+2bc+2ac$. Dodamo levoj i desnoj strani nejednakosti $(a^2+b^2+c^2)$ i dobijemo: $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$, odnosno, na osnovu formule za kvadrat trinoma, dobijamo: $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2 = 1$. Odavde je $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

130. Pođimo od tačne nejednakosti: $(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geqslant 0$. Posle oslobađanja od zagrada dobijemo: $2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2 \geqslant 0$, odakle posle skraćivanja sa 2 sledi tražena nejednakost.

131. Nejednakost $a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \geqslant 0$ je očigledno tačna. Njenim sređivanjem dobijemo: $(a^2b+ab^2)+(b^2c+bc^2)+(a^2c+ac^2) \geqslant 6abc$. Treba još samo ispred svake zagrade izvući zajednički činilac.

132. Podelimo brojilac i imenilac sa $6a$. Dobićemo: $M = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{2a}+\frac{2a}{3}}$. Neka je $\dfrac{3}{2a} = x$. Tada je $\dfrac{2a}{3} = \dfrac{1}{x}$, pa imenilac razlomka M ima oblik $x + \dfrac{1}{x}$. Prema **primeru A** je $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$, pa izraz $\dfrac{3}{2a} + \dfrac{2a}{3}$ ima minimalnu vrednost 2. Zbog toga je maksimalna vrednost datog razlomka $\dfrac{1}{6} : 2 = \dfrac{1}{12}$.

133. Ako obema stranama nejednakosti $a+d < b+c$ dodamo broj b, dobićemo: $(a+b)+d < 2b+c$. Kako je $a+b = c+d$, biće: $(c+d)+d < 2b+c$, pa je $2d < 2b$ i $d < b$. Sada obema stranama nejednakosti $a+d < b+c$ dodamo broj c i dobićemo: $a+(d+c) < b+2c$. Kako je $(d+c) = a+b$, dobićemo: $a+(a+b) < b+2c$, a odavde je $2a < 2c$, odnosno $a < c$. Dakle biće konačno: $a < c < d < b$.

134. Uočimo sledeće očigledne nejednakosti: $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{5}{6} < \dfrac{6}{7}, \dots$ $\dfrac{78}{79} < \dfrac{79}{80}$, $\dfrac{80}{81} < \dfrac{81}{82}$. Pomnožimo ovaj niz nejednakosti i dobićemo:
$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{78}{79} \cdot \dfrac{80}{81} < \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \dfrac{79}{80} \cdot \dfrac{81}{82}$.

Uvedemo oznaku $x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{78}{79} \cdot \dfrac{80}{81}$ i uočimo da na desnoj strani nejednakosti imamo broj $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{82}$. Tako dobijamo nejednakost: $x < \dfrac{1}{82 \cdot x}$, odakle je $x^2 < \dfrac{1}{82} < \dfrac{1}{81}$, pa je $x < \dfrac{1}{9}$, što se i tvrdilo.

135. Iz $\dfrac{p}{q} < \dfrac{a}{b}$ dobijamo $aq - bp > 0$, a iz $\dfrac{a}{b} < \dfrac{r}{s}$ sledi: $br - as > 0$. S obzirom da imamo posla sa celim brojevima, iz $aq - bp > 0$ sledi $aq - bp \geqslant 1$ i slično $br - as \geqslant 1$. Sada imamo: $b = b \cdot 1 = b(qr - ps) = bqr - bps = bqr - aqs + aqs - bps = q(br - as) + s(aq - bp) \geqslant q + s$, što se i tvrdilo.

136. Ako je n prosečna starost ekipe (aritmetička sredina) tada cela ekipa ima $11n$ godina, a desetorica fudbalera, bez kapitena, imaju ukupno $10(n-1)$ godina. Tada kapiten ima $11n - 10(n-1) = n + 10$ godina. Dakle, starost kapitena je za 10 godina veća od prosečne starosti ekipe.

137. Koristimo nejednakosti između aritmetičkih i geometrijskih sredina: $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$, $c + a \geqslant 2\sqrt{ac}$, odakle množenjem dobijamo:
$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$.

138. Slično prethodnom zadatku.

139. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{a}} = 3\sqrt[3]{1} = 3$, a znak jednakosti važi ako je $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{a}$. Iz $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ dobijamo $b^2 = ac$, iz $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{a}$ je $a^2 = bc$. Podelimo ove dve jednakosti i dobijemo $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a}{b}$, odnosno $b^3 = a^3$, pa je $a = b$. Slično dobijemo i $a = c$.

140. $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$.

141. $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ i $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Pomnožimo ove dve nejednakosti i dobijemo traženu nejednakost.

142. Slično prethodnom zadatku.

143. Najpre uočimo da je $1 + b^2 \geqslant 2\sqrt{1 \cdot b^2} = 2b$ i slično $1 + c^2 \geqslant 2c$ i $1 + a^2 \geqslant 2a$. Dalje je $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geqslant 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a$, itd.

144. Slično prethodnom zadatku.

145. $2a^3 + 11 = (a^3 + 1 + 1) + (a^3 + 8 + 1) > 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} + 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 8 \cdot 1} = 9a$. Ovde ne važi znak "$\geqslant$", jer ne mogu biti jednaki brojevi a^3, 8 i 1.

146. $\dfrac{1}{a_1} - 1 = \dfrac{1 - a_1}{a_1} = \dfrac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{a_1} \geqslant \dfrac{4}{a_1}\sqrt[4]{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5}$. Slično je $\dfrac{1}{a_2} - 1 \geqslant \dfrac{4}{a_2} \cdot \sqrt[4]{a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5}$, $\dfrac{1}{a_3} - 1 \geqslant \dfrac{4}{a_3} \cdot \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_5}$, $\dfrac{1}{a_4} - 1 \geqslant \dfrac{4}{a_4} \cdot \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_5}$ i $\dfrac{1}{a_5} - 1 \geqslant \dfrac{4}{a_5} \cdot \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}$. Množenjem ovih pet nejednakosti dobijamo zadatu nejednakost.

147. Slično **zadatku 137**.

148. $a - x = x + y + z - x = y + z$, itd. Slično **zadatku 137**.

149. Iz $xyz \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = xyz \cdot 1$ dobijamo: $xy + xz + yz = xyz$. Dalje je $(x+y+z)\cdot 1 = (x+y+z)\cdot\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geqslant 9$ (prema **zadatku 141**). Dalje računamo: $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz-(xy+yz+xz)+x+y+z-1 = xyz-xyz+x+y+z-1 \geqslant 9 - 1 \geqslant 8$.

150. $a_1^2 + a_1 + 1 \geqslant 3\sqrt[3]{a_1^2 \cdot a_1 \cdot 1} = 3a_1$, itd.

151. Slično **zadatku 142**.

152. $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_1} \geqslant n \cdot \sqrt[n]{\dfrac{a_1}{a_2} \cdot \dfrac{a_2}{a_3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_1}} = n \cdot \sqrt[n]{1} = n$.

153. Slično **zadatku 149**.

154. Pretpostavimo da među napisanim brojevima postoji najveći i neka je to broj s. On ima četiri suseda, koja ćemo označiti sa a, b, c i d. Tada je $4s = a+b+c+d$, što možemo zapisati i ovako $(s - a) + (s - b) + (s - c) + (s - d) = 0$. Kako je $s \geqslant a$, $s \geqslant b$, $s \geqslant c$ i $s \geqslant d$, to nijedna zagrada na levoj strani ne može biti negativna, pa će zbir ove četiri zagrade biti jednak nuli samo ako je $s - a = 0$ i $s - b = 0$ i $s - c = 0$ i $s - d = 0$, tj. ako je $s = a = b = c = d$. Dakle, ne postoji najveći broj, svi su jednaki među sobom.

155. Slično prethodnom zadatku.

156. $(\sqrt{2})^{300} = 2^{150} = 2^{3\cdot 50} = 8^{50} < 9^{50} = 3^{100} = (\sqrt{3})^{2\cdot 100} = (\sqrt{3})^{200}$. Tačna je nejednakost: $(\sqrt{2})^{300} < (\sqrt{3})^{200}$.

157. Budući da je potkorena veličina manja od 1, vrednost korena biće manja od 1 i veća od potkorene vekličine, pa je $\sqrt{0,9999999999} = 0,9999999999\ldots$

158. a) $1,\dot{4}\dot{2}+\sqrt{9+6\sqrt{3}+3}+\sqrt{9-6\sqrt{3}+3} = 1\frac{42}{99}+\sqrt{3^2+6\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}+\sqrt{3^2-6\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} = 1\frac{14}{33}+\sqrt{(3+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{3})^2} = 1\frac{14}{33}+|3+\sqrt{3}|+|3-\sqrt{3}| = 1\frac{14}{33}+3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3} = 7\frac{14}{33}$, a to je racionalni broj.

b) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = |\sqrt{5}-3|+\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = 3-\sqrt{5}+|\sqrt{5}-2| = 3-\sqrt{5}+\sqrt{5}-2 = 1$, a to je racionalni broj.

159. a) $45^2 = 2025 < 2017$ i $44^2 = 1936 < 2017$, pa je $|\sqrt{2017}-45|+|44-\sqrt{2017}| = 45-\sqrt{2017}+\sqrt{2017}-44 = 1$, što je racionalni broj.

b) Zamenimo x sa $2-\sqrt{3}$, pa imamo $\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+2\sqrt{3} = |3-\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}|+2\sqrt{3} = 3-\sqrt{3}-(\sqrt{3}-1)+2\sqrt{3} = 3-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1+2\sqrt{3} = 4$, a to je racionalni broj.

160. a) $(\sqrt{102}+\sqrt{103})^2 = 205+2\sqrt{102\cdot 103}$, a $(\sqrt{101}+\sqrt{104})^2 = 205+2\sqrt{101\cdot 104}$. Kako je $102\cdot 103 = 10506 > 10504 = 101\cdot 104$, sledi da je $\sqrt{102}+\sqrt{103} > \sqrt{101}+\sqrt{104}$.

b) Slično prethodnom: $(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})^2 = 98+40\sqrt{6}$ i $(3\sqrt{5}+7)^2 = 94+42\sqrt{5}$. Kako je $98 > 94$ i $40\sqrt{6} > 42\sqrt{5}$ (jer je $(40\sqrt{6})^2 = 9600$, a $(42\sqrt{5})^2 = 8820$, zaključujemo da je $5\sqrt{2}+4\sqrt{3} > 3\sqrt{5}+7$.

161. a) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \sqrt{6}+\sqrt{5}$, a $\dfrac{5+2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2}+\sqrt{5}$. Kako je $(\sqrt{6})^2 = 6 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$, sledi da je $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \sqrt{6}+\sqrt{5} < \dfrac{5}{2}+\sqrt{5} = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{2}$.

c) Slično prethodnom: $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2} > \dfrac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$.

162. $(\sqrt{a+b})^2 = a+b$ i $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$, pa je $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

163. a) $\sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$.

b) $\sqrt{1+\sqrt{2}} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} = 1,732\ldots < 1,75 = \dfrac{7}{4}$.

c) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}} > \sqrt{1+\sqrt{2+2}} = \sqrt{3} > \frac{8}{5} = 1,6.$

164. a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}+1} - \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}+1-(\sqrt{5}-1) = 2.$

b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 6.$

165. $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - \sqrt{2-\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$. (Vidi rešenje **zadatka 158**.)

166. $\sqrt{17-4\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}} - \sqrt{5} = \sqrt{17-4(2+\sqrt{5})^2} - \sqrt{5} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{5} = \sqrt{5}-2-\sqrt{5} = -2.$

167. a) Najpre je $4+\sqrt{15} = \sqrt{(4+\sqrt{15})^2}$, pa imamo: $\sqrt{4+\sqrt{15}}(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{4+\sqrt{15}}(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot 1 = \sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2} = \sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{16-4\sqrt{15}} = \sqrt{(4+\sqrt{15})\cdot 4(4-\sqrt{15})} = 2.$
(Imali smo: $\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{4^2-(\sqrt{15})^2} = \sqrt{1} = 1.$)

b) Zbog $\sqrt{3} < 2$, tj. $\sqrt{3}-2 < 0$ je $\sqrt{3}-2 = -\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$, pa imamo: $-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+2}$, itd., slično prethodnom zadatku.
Rezultat je: -2.

168. Slično **primeru C**. Uočimo da je: $444\ldots444 + 11\ldots11 - 66\ldots6 = \frac{4}{9}(10^{2n}-1)+\frac{1}{9}(10^{n+1}-1)-\frac{6}{9}(10^n-1) = \frac{1}{9}(4\cdot10^{2n}+4\cdot10^n+1) = \left(\frac{1}{3}(2\cdot10^n+1)\right)^2.$
Vrednost korena je: $\frac{1}{3}(2\cdot10^n+1) = \frac{200\ldots01}{3} = \underbrace{66\ldots67}_{n}.$

169. Neka je $\frac{a-b\sqrt{2017}}{b-c\sqrt{2017}} = q$, gde je q racionalni broj. Odavde je $a-b\sqrt{2017} = q(b-c\sqrt{2017})$, odakle dobijamo: $a-qb = (b-cq)\sqrt{2017}$. Ova jednakost moguća je samo ako je $b-cq=0$ i $a-qb=0$. Iz prvog slova je $q=\frac{b}{c}$, a iz drugog $q=\frac{a}{b}$. Dakle, $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$, a odavde je $b^2=ac$.

170. Neka je $r+\sqrt{3}=k$, gde je k celi broj. Onda je $r=k-\sqrt{3}$, pa je $\frac{1}{r} = \frac{1}{k-\sqrt{3}} = \frac{k+\sqrt{3}}{k^2-3}$. Sledi da je $\frac{1}{r}-\sqrt{3} = \frac{k+\sqrt{3}}{k^2-3}-\sqrt{3} = \frac{k+\sqrt{3}-(k^2-3)\sqrt{3}}{k^2-3} =$

$\dfrac{k+(4-k^2)\sqrt{3}}{k^2-3}$. Ovaj broj je realan samo ako je $4-k^2=0$, a to je ispunjeno za $k=2$ i $k=-2$. Traženi broj r je $r=k-\sqrt{3}$, pa su traženi brojevi: $2-\sqrt{3}$ i $-2-\sqrt{3}$.

9.2. Jednačine i nejednačine

171. a) $x=50$.

b) Kako je $1680=5\cdot6\cdot7\cdot8=(-5)\cdot(-6)\cdot(-7)\cdot(-8)$, a leva strana jednakosti je proizvod četiri broja koji se dobijaju uzastopnim umanjivanjem za 1, zaključujemo da je $x-7=5$ ili $x-7=-8$. Rešenja su $x=12$ i $x=-1$.

c) Postupajući slično kao u rešenju **primera E**, iz odeljka 1.1, dobijamo jednakost: $(x^2+3x-1)^2+1=0$, koja očigledno nema rešenja. (Leva strana jednakosti je veća od 1, ili jednako 1.)

172. a) Sređivanjem izraza sa obe strane jednačine dobijemo $x\cdot\dfrac{1}{2}=10$, pa je $x=20$.

b) Neka je $n=999999999$. Tada je $999999998=n-1$ i $10^9=n+1$, pa imenilac razlomka ima oblik: $n^2-(n-1)(n+1)=1$. Jednačina prelazi u $10^{10}-x=10^9-1$, čije je rešenje: $x=10^{10}-10^9+1=9000000001$.

c) Rastavljanjem složenih brojeva na proste činioce dobijamo jednačinu:

$$3\cdot7\cdot13\cdot37\left(\frac{1}{3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37}+\frac{5}{2\cdot7\cdot11\cdot13x}\right)=\frac{7}{22}.$$

Oslobodimo se zagrade, usput skraćujući šta može, pa pomnožimo jednačinu sa $22x$. Dobijamo: $5x=5\cdot3\cdot37$, odakle je $x=111$.

173. a) Iz date jednačine je: $\dfrac{1999}{2000}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$, odakle je $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{2000}$.

Dalje: $1+\dfrac{1}{x}=-2000$, odnosno $\dfrac{1}{x}=-2001$ i konačno: $x=-\dfrac{1}{2001}$.

b) Iz date jednačine je $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{11}{7}$, pa je $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{4}{7}=\dfrac{1}{\dfrac{7}{4}}=$

$\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$. Sledi da je $x=3$.

174. Pregrupišemo i rastavimo na činioce polinome u brojiocu i imeniocu leve strane i dobijemo: $\dfrac{(cx+a)(ax+c)}{(cx+a)(ax-c)}=2$, odnosno $\dfrac{ax+c}{ax-c}=2$, odakle je $x=\dfrac{3c}{a}$.

175. a) Ako zamenimo x, tako da je $x = y + 1997$, dobićemo: $\dfrac{y+1997}{1997} + \dfrac{y+1998}{1998} = \dfrac{y+1999}{1999} + \dfrac{y+2000}{2000}$, odakle: $\dfrac{y}{1997}+1+\dfrac{y}{1998}+1 = \dfrac{y}{1999}+1+\dfrac{y}{2000}+1$. Dalje je: $y\left(\dfrac{1}{1997}+\dfrac{1}{1998}-\dfrac{1}{1999}-\dfrac{1}{2000}\right) = 0$. Izraz u zagradi je očigledno pozitivan, pa je $y = 0$, tj. $x = 1997$.

b) Datu jednačinu napišemo u obliku: $\dfrac{x-a-b}{c}-1+\dfrac{x-b-c}{a}-1+\dfrac{x-c-a}{b}-1 = 0$. Odavde je: $\dfrac{x-a-b-c}{c} + \dfrac{x-b-c-a}{a} + \dfrac{x-c-a-b}{b} = 0$, odnosno $(x-a-b-c)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = 0$. Sledi da je $x-a-b-c = 0$, odnosno $x = a+b+c$.

c) Postupajući slično prethodnom zadatku dobijamo $x = a + b + c$, ako je $\dfrac{4}{a+b+c} \neq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Ako je $\dfrac{4}{a+b+c} = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, onda se jednačina svodi na: $x \cdot 0 = 0$, koja je zadovoljena za svako x.

176. Iz jednačine dobijamo $x = 1 - \dfrac{2}{a+5}$. Da bi x bio ceo broj, mora biti $a \in \{-7, -6, -4, -3\}$. Samo za $a = -4$ dobijamo negativno x i to $x = -1$.

177. Dovedemo desnu stranu jednakosti na zajednički imenilac i dobijemo: $\dfrac{3x+14}{x^2+x-6} = \dfrac{A(x-2)+B(x+3)}{x^2+x-6}$. Sledi da je $3x + 14 = A(x-2) + B(x+3) = (A+B)x + 3B - 2A$. Odavde je $A + B = 3$ i $3B - 2A = 14$, pa je $A = -1$ i $B = 4$.

178. Iz $a : b = 1\dfrac{1}{3} : 1 = \dfrac{4}{3} : 1 = \dfrac{4}{3} : \dfrac{3}{3}$, dobijamo $a : b = 4 : 3$. Slično dobijemo $a : c = 2 : 3$ i $b : d = 9 : 4$. Dalje iz $a : b = 4 : 3$ i $a : c = 2 : 3 = 4 : 6$, dobijemo $a : b : c = 4 : 3 : 6$. (U prvoj razmeri slovu a odgovara broj 4, a u drugoj broj 2, pa smo ih doveli na najmanji zajednički sadržalac.) Slično, iz $a : b : c = 4 : 3 : 6$ i $b : d = 9 : 4$, dobijamo $a : b : c : d = 12 : 9 : 18 : 4$. Odavde zaključujemo da je $a = 12k$, $b = 9k$, $c = 18k$ i $d = 4k$, pa iz $c-a-d = 3\dfrac{1}{3}$, dobijamo $2k = \dfrac{10}{3}$, odnosno $k = \dfrac{5}{3}$. Prema tome: $a = 20$, $b = 15$, $c = 30$ i $d = \dfrac{20}{3}$.

179. a) Sabiranjem datih jednačina dobijemo $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = 5997$. Sada, npr. oduzimanjem jednačine $\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z} = 3998$ od ove, dobijemo: $\dfrac{2}{x} = 1999$, pa je $x = \dfrac{2}{1999}$. slično je $y = \dfrac{2}{1997}$ i $z = \dfrac{2}{2001}$.

b) Svako rešenje svake od jednačina sistema mora biti i rešenje jednačine koju dobijemo sabiranjem svih datih jednačina. Taj zbir je $1+x^2+1+y^2+1+z^2+1+t^2-2x-2y-2z-2t = 0$, odnosno: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(t-1)^2 = 0$. Ova jednačina je zadovoljena samo za $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 1$, što je ujedno i rešenje datog sistema jednačina.

c) Transformišemo date jednačine u oblik:
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(y-1)^2+(z-1)^2=5$ i $(z-1)^2+(x-1)^2=4$.

Postupajući slično kao u rešenju zadatka pod a) (najpre sabiramo sve jednačine, itd.) dobićemo: $(x-1)^2=0$, $(y-1)^2=1$ i $(z-1)^2=4$. Odatle je $x=0$, $y=1$ ili $y=-1$ i $z=2$ ili $z=-2$. Rešenja sistema su trojke (x,y,z) redom: $(0,\,1,\,2)$, $(0,\,1,\,-2)$, $(0,\,-1,\,2)$ i $(0,\,-1,\,-2)$.

180. Ako je $p=0$, očigledno je $x=3$ i $y=1,5$, pa je ispunjen uslov $|y-x|>1$. Ako je $p\neq 0$, rešenja sistema su: $x=\dfrac{6}{p+2}$, $y=\dfrac{3}{p+2}$, pa je $|y-x|=\dfrac{3}{|p+2|}>1$ za $|p+2|<3$. Odavde je $-3<p+2<3$, odnosno $-5<p<1$.

181. Iz $a(bcd-1)=1999$, zatim $b(acd-1)=999$, zatim $c(abd-1)=99$ i još $d(abcd-1)=9$, sledi da su svi brojevi a, b, c i d obavezno neparni. Međutim, iz npr. $d(abc-1)=9$, sledi da je i $(abc-1)$ neparno, što je kontradikcija. Dakle, traženi celi brojevi a, b, c i d ne postoje.

182. Primetimo da je $y+1=\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x^2}}{x^2-\dfrac{1}{x^2}}+1=\dfrac{2x^2}{x^2-\dfrac{1}{x^2}}$ i $y-1=\dfrac{\dfrac{2}{x^2}}{x^2-\dfrac{1}{x^2}}$.

Sledi da je $\dfrac{y+1}{y-1}=x^4$, pa je $z=\dfrac{x^4+\dfrac{1}{x^4}}{x^4-\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{y^2+1}{2y}$.

183. Slično prethodnom zadatku.

184. $\dfrac{2xy}{x+z}=\dfrac{2ac}{(b+c)(a+b)}:\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{c}{a+b}\right)=\dfrac{2ac}{a^2+c^2+b(a+c)}$. Kako je $b=\dfrac{2ac}{a+c}$, biće $\dfrac{2xz}{x+z}=\dfrac{2ac}{a^2+c^2+2ac}=\dfrac{2ac}{(a+c)^2}=\dfrac{b}{a+c}=y$.

185. Prvu jednačinu, koristeći se recipročnim vrednostima, zapisaćemo u obliku: $\dfrac{x+y}{xyz}=\dfrac{1}{2}$, odnosno: $\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=\dfrac{1}{2}$. Slično, ostale dve jednačine postaju: $\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{6}$ i $\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{2}{3}$. Dalje postupamo slično rešenju **zadatka 179**. Najpre dobijemo: $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=1$, pa oduzimanjem redom prve, druge, treće jednačine, dobijamo $\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{yz}=\dfrac{1}{6}$ i $\dfrac{1}{xz}=\dfrac{1}{3}$. Odavde je $xy=2$, $yz=6$ i $xz=3$. Množenjem poslednjih jednačina dobijemo: $(xyz)^2=36$, pa je $xyz=6$. Sada iz $\dfrac{xyz}{yz}=\dfrac{6}{6}$ dobijemo $x=1$, a slično $y=2$ i $z=3$.

186. Postupamo kao u **primeru B**.

a) $(1-x)^2$ je pozitivno za $x\neq 1$, a zbog znaka ispred $\dfrac{1}{7}$, mora biti $3-x>0$, tj. $x<3$. Prema tome, rešenja su: $x<1$ i $1<x<3$.

b) Sređivanjem dobijamo: $(x-2)^2 - x(x-2) < 0$, odnosno $-2x+4<0$, pa je $x>2$.

c) $4x^2-4x+3 = 4x^2-4x+1+2 = (2x-1)^2+2 \geqslant 2 > 0$ za svako x.

d) Za $x<0$ dobijamo: $-x+24>5x$, odnosno $x<4$, pa je $x<0$. Za $x \geqslant 0$ imamo $x+24>5x$, odakle je $x<6$. Dakle, konačno rešenje je $x<6$.

e) $-1 < x < \dfrac{2}{3}$. f) $1 < x < \dfrac{8}{5}$.

187. a) Rešenja prve nejednačine su $y \geqslant -8$, a druge $y > -\dfrac{1}{5}$, pa su zajednička rešenja $y > -\dfrac{1}{5}$.

b) Rešenje prve nejednačine je $x > 9\dfrac{1}{2}$, a druge $x<6$. Dakle, nema zajedničkih rešenja.

188. Rešavamo nejednačinu $\dfrac{3x-4}{2} - \dfrac{x+1}{4} > \dfrac{2-5x}{3}$, koja daje rezultat $x>1$.

189. Nejednačina $\dfrac{5n}{6} - \dfrac{n-6}{2} + \dfrac{2n-3}{3} - 2n \geqslant 1$ ima rešenje $n \leqslant 1$, pa u skupu prirodnih brojeva rešenje je samo $n=1$.

190. Treba utvrditi kad je $k+1=k^2+1$, zatim $k+1<k^2+1$ i $k+1>k^2+1$. U prvom slučaju imamo ekvivalentnu jednačinu $k^2-k=0$, tj. $k(k-1)=0$, pa je $k=0$ ili $k-1$.

U drugom slučaju dobijamo $k^2-k>0$, odnosno $k(k-1)>0$, pa je $k<0$ ili $k>1$. U trećem slučaju rešenje je $0<k<1$.

191. a) Datu nejednakost možemo dovesti na oblik: $\dfrac{21}{84} < \dfrac{12(2-z)}{84} < \dfrac{77}{84}$, pa je $21 < 12(2-z) < 77$. Kada podelimo sa 12, dobićemo $1,7 < 2-z < 6,4$. Rešenje tražimo u skupu celih brojeva, pa je $1 < 2-z < 7$. Odavde dobijamo $z \in \{-4,-3,-2,-1,0\}$. Ima 5 rešenja.

b) Dati uslov kaže da je $-100 < |z|-1 < 100$, odnosno $-99 < |z| < 101$. Kako je $|z| \geqslant 0$, sledi da je $|z| < 101$, a to znači da je $-101 < z < 101$. Rešenja su celi brojevi: $-100,-99,-98,\ldots,0,1,\ldots,99,100$, njih ukupno 201.

192. a) Rešenje date jednačine je $x = \dfrac{4-7k}{3}$ i $x \leqslant -1$.

Nejednačina $\dfrac{4-7k}{3} \leqslant -1$ daje rešenja $k \geqslant 1$.

b) Data jednačina ima rešenje $x = \dfrac{2(2k-3)}{4-k}$, pa dobijamo nejednačinu $\dfrac{2(2k-3)}{4-k} < 0$. Rešenja su: $k < \dfrac{3}{2}$ i $k>4$.

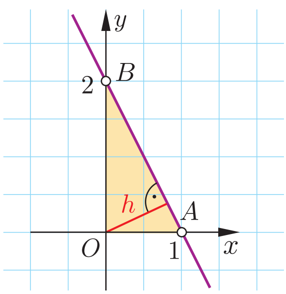
193. Sela A, B i C određuju trougao ABC. Neka je S položaj škole. Tada, na osnovu nejednakosti trougla sledi da je $SA+SB \geqslant AB = 3$ i $SA+SC \geqslant AC = 4$.

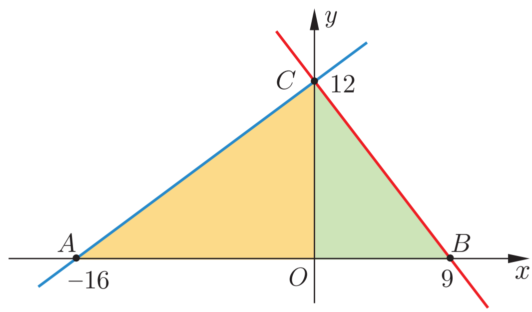
Neka je udaljenost škole S od sela A, B, C izražena u kilometrima: $SA = x$ km, $SB = y$ km i $SC = z$ km. Tada je ukupan broj pređenih kilometara od strane svih učenika, u jednom odlasku u školu: $U = 300x + 200y + 100z$, a to možemo izraziti ovako: $U = 200(x+y)+100(x+z)$. Kako je $SA+SB \geqslant AB$, tj. $x+y \geqslant 3$ i $x+z \geqslant 4$, to je $U \geqslant 200\cdot 3+100\cdot 4 = 1000$ km. Najmanju vrednost U dostiže kad je $x+y = 3$ i $x+z = 4$, a to važi samo kad tačka S pripada duži AB i duži AC. To znači da je $S = A$, pa školu treba sagraditi u selu A.

194. Ako je $xy < x+y < x-y$, onda iz $x+y < x-y$ dobijamo $y < 0$. Tada iz $xy < x+y$ sledi $x(1-y) > -y$, tj. $x(1-y) > 0$, pa zbog $-y > 0$, zaključujemo da je $x > 0$. Ako je, pak $xy < x+y < y-x$, onda dobijemo $x < 0$, a $y > 0$.

195. Pretpostavimo da olovka staje x para. Tada imamo uslove: $1100 < 9x < 1200$ i $1500 < 13x < 1600$. Prvi uslov podelimo sa 9, a drugi sa 13 i dobićemo: $122 < x < 134$ i $115 < x < 124$. Odavde je: $122 < x < 124$, pa je $x = 123$ pare.

196. Slično rešenju **primera A**, slučaj c). Rešenja: odsečak između koordinatnih osa je dužine $\sqrt{5}$, a normalno rastojanje koordinatnog početka dobijamo iz površine trougla OAB, slika levo: $P = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$, odnosno $P = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot h$. Odavde je $1 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot h$, pa je $h = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

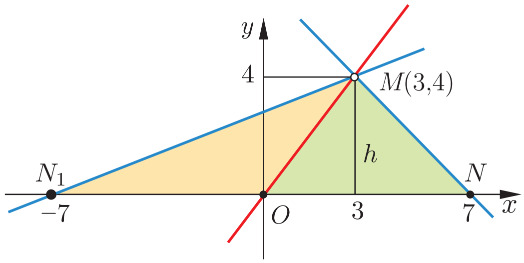




197. Nulu prve funkcije nalazimo iz uslova: $0 = \frac{3}{4}x_0 + 12$ i $x_0 = -16$. Tako odredimo tačku $A(-16,\ 0)$. Slično, iz druge funkcije odredimo tačku $B(9,\ 0)$. Zajednička tačka oba grafikona očigledno je tačka $C(0,\ 12)$, slika gore desno.

a) Iz pravouglog trougla OAC sa katetama $OA = 16$ i $OC = 12$, koristeći se Pitagorinom teoremom, izračunamo hipotenuzu $AC = 20$. Slično, iz trougla OBC nalazimo $BC = 15$. Kako je $AB = 16+9 = 25$, a važi jednakost: $20^2 + 15^2 = 25^2$ (to jest: $400 + 225 = 625$), na osnovu obrnute Pitagorine teoreme, zaključujemo da je trougao ABC pravougli.

b) Na osnovu prethodno izračunatih dužina stranica trougla ABC, računamo: $O = AB + BC + CA = 25 + 15 + 20 = 60$ i $P = \frac{1}{2}BC\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15 = 150$.



198. Tačka M određuje visinu trougla: $h = 4$. Površina trougla OMN biće 14, ako mu je osnovica ON dužine 7. Taj uslov ispunjavaju dve tačke: $N(7, 0)$ i $N_1(-7, 0)$, što se vidi na slici. Jednačine pravih OM i MN određujemo poznatim postupkom za prave koje sadrže dve date tačke. Tako dobijamo pravu OM: $y = \frac{4}{3}x$, prave MN: $y = -x + 7$ i prave MN_1: $y = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$.

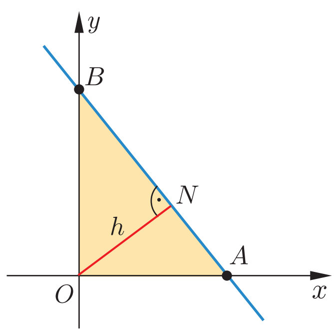
199. Ako se seku grafici funkcija $y = 3x+a$ i $y = x+1$, onda je $3x+a = x+1$. Odavde je $x = \frac{1-a}{2}$. Apscisa preseka grafika funkcija $y = -2x + b$ i $y = x + 1$ dobija se iz uslova $-2x+b = x+1$. Odavde je $x = \frac{b-1}{3}$. Ako sva tri grafika sadrže istu tačku, onda je $\frac{1-a}{2} = \frac{b-1}{3}$. Sređivanjem dobijamo traženi uslov $a = \frac{5-2b}{3}$.

200. a) Grafici linearnih funkcija predstavljaju paralelne prave, ako imaju jednake koeficijente pravaca: $2m - \frac{1}{2} = 7m + 2$. Odavde sledi da je $m = -\frac{1}{2}$.

b) Funkcija je rastuća ako ima pozitivan koeficijent pravca: $2m - \frac{1}{2} > 0$, pa je $m > \frac{1}{4}$.

c) $7m + 2 < 0$, pa je $m < -\frac{2}{7}$.

201. Grafik seče x osu, ako je $y = 0$, t.j. $\frac{x}{k-4} + 10 = 0$. Onda je $x = -10(k-4)$. Presek sa y osom dobijamo za $x = 0$, a to je $y = 10$. Odredićemo k iz jednakosti: $-10(k-4) = 10$. Odavde je $k = 3$. Tada su odsečci na obe koordinatne ose dužine 10, pa je površina dobijenog trougla: $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$.



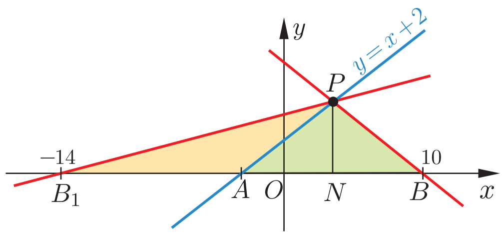
202. Na uobičajeni način odredimo preseke grafika sa koordinatnim osama: za $y = 0$ je $x = \frac{n}{4}$, a za $x = 0$ je $y = \frac{n}{3}$. To su ujedno dužine kateta pravouglog trougla OAB, slika desno. Površina ovog trougla je $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{3} = \frac{n^2}{24}$. Po uslovu, visina h koja odgovara hipotenuzi AB je $ON = 12$. Dužina hipotenuze je $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{n^2}{16} + \frac{n^2}{9}} = \sqrt{\frac{25n^2}{9 \cdot 16}} = \frac{5}{12}n$. Sada iz formule za površinu trougla, $P = \frac{1}{2}AB \cdot h$, dobijamo jednakost: $\frac{n^2}{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5n}{12} \cdot 12$. Odavde je $n = 60$, pa je $OA = \frac{n}{4} = 15$ i $OB = \frac{n}{3} = 20$, a površina trougla OAB je 150.

203. a) Zamenimo $x = -4$ i $y = 6$ i dobijemo: $6 = (m + 0,25) \cdot (-4) + 1 - 2m$. Odavde je $m = -1$, pa imamo linearnu funkciju $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

b) Funkcija $y = -\frac{3}{4}x + 3$ preseca koordinate ose u tačkama: $A(4,\, 0)$ i $B(0,\, 3)$, pa odseca trougao površine $P = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

204. a) Kao u prethodnom zadatku, odredimo $m = -\frac{7}{8}$.

b) Za $m = -\frac{7}{8}$ data funkcija ima formulu $y = -\frac{3}{4}x + 6$, a njen grafik seče koordinatne ose u tačkama: $A(8,\, 0)$ i $B(0,\, 6)$. Slično rešenju **zadatka 196** nalazimo: $AB = 10$, pa je traženo rastojanje $h = 4,8$.



205. Tačka $P(4,\, 6)$ pripada i grafika funkcije $y = x + 2$, pa je ona teme trougla kojeg grafici datih linearnih funkcija određuju sa osom Ox. Dakle, visina trougla je $PN = 6$. Dalje, slično **zadatka 198**, zaključujemo da osnovica AB trougla mora imati dužinu 12. Na taj način određene su tačke $B(10,\, 0)$ i $B_1(-14,\, 0)$. Njima odgovaraju $k = -1$ i $n = 10$, odnosno $k_1 = \frac{1}{3}$ i $n_1 = \frac{14}{3}$.

206. Rastavimo svaki trinom na činioce pa imamo: $\sqrt{(x-5)^2(x-2)^2(x+1)^2} = |(x-5)(x-2)(x+1)| = |(-3-\sqrt{3})(-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})| = (3+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \cdot (3-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$.

207. Kako je $x = \sqrt{5} - 1999 < 0$, to je $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, pa je $A = x + 1 - x = 1$.

208. $\sqrt{a-1-4\sqrt{a-1}+4} + \sqrt{a-1-6\sqrt{a-1}+9} = \sqrt{(\sqrt{a-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-1}-3)^2} = |\sqrt{a-1}-2| + |\sqrt{a-1}-3| = \sqrt{a-1} - 2 + 3 - \sqrt{a-1} = 1$, jer zbog $5 \leqslant a \leqslant 10$ važi: $2 \leqslant \sqrt{a-1} \leqslant 3$.

209. a) Za $x \geqslant \frac{3}{2}$ rešenje je $x = 12$, a za $x \leqslant \frac{3}{2}$ je $x = \frac{6}{11}$.

b) Zbir u zagradi iznosi $\frac{49}{50}$ (koristi ideju: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$), pa je jednačina ekvivalentna sa $|x - 5| = 100$. Rešenja su $x = 105$ i $x = -95$.

c) Za $x \geqslant \frac{1}{2}$ rešenje je $x = 1$, a za $x \leqslant \frac{1}{2}$ jednačina prelazi u nemoguću jednakost: $1 = 3$, pa nema rešenja za $x \leqslant \frac{1}{2}$.

d) Za $-2 \leqslant x \leqslant 1$ jednačina prelazi u običnu $\dfrac{x+2}{x-1} = -1$, koja daje rešenje $x = -\dfrac{1}{2}$. Za $x \leqslant -2$ ili $x > 1$ dobijamo jednačinu $\dfrac{x+2}{x-1} = 1$, koja nema rešenja.

210. a) Za $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ i za $x \geqslant \dfrac{3}{2}$ jednačina nema rešenja, a za $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}$ imamo jedino rešenje $x = 1$.

b) Za $x \leqslant -3$ imamo: $-(x-1) - (x+3) = 2x + 2$, odakle je $x = -1$, kako nije $-1 \leqslant -3$, ovo nije rešenje. Za $-3 \leqslant x \leqslant 1$ jednačina je ekvivalentna sa $-(x-1) + (x+3) = 2x + 2$, odakle dobijamo $x = 1$. Kako je $x = 1$ iz intervala $-3 \leqslant x \leqslant 1$, to jeste rešenje. Konačno, za $x \geqslant 1$ imamo jednačinu: $(x-1)+(x+3) = 2x+2$, odnosno $2x+2 = 2x+2$, što predstavlja identičnost (tačna je za sve $x \geqslant 1$). Dakle, rešenja su sve vrednosti x, za koje je $x \geqslant 1$.

c) $x^2+2x+100 = x^2+2x+1+99 = (x+1)^2+99 > 0$ i $x^2+200 > 0$, pa možemo brisati oznake za apsolutnu vrednost. Dobijamo $x^2 + 2x + 100 - (x^2 + 200) = 3898$, odakle je $x = 1999$.

211. $1 - |x| = 2$ ili $1 - |x| = -2$. U prvom slučaju nema rešenja, a u drugom je $|x| = 3$, odakle je $x = 3$ ili $x = -3$.

212. a) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2} = |x - 4|$. Rešavanjem dobijamo: za $x \geqslant 4$, jedino rešenje je $x = 4$, a za $x \leqslant 4$ jednačina je ekvivalentna identičnosti $0 = 0$, pa su rešenja sve vrednosti $x \leqslant 4$. U skupu prirodnih brojeva imamo $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ i $x = 4$.

b) $|x-2|-|x+3| = 13$, za $x \leqslant -3$ nema rešenja, jer je ekvivalentna nemogućoj jednačini $-1 = 13$. Slično je i za $x \geqslant 2$. Ako je $-3 \leqslant x \leqslant 2$, jednačina postaje $-x + 2 - x - 3 = 13$, odakle izlazi $x = -7$. Međutim, ovo nije rešenje, jer -7 nije iz intervala $-3 \leqslant x \leqslant 2$. Dakle, jednačina nema rešenja.

c) Rešenja su sve vrednosti $x \geqslant 1$.

213. Razlikujemo četiri slučaja:

1) $x > 0$ i $y > 0$: $x + y = 2000$ i $y - x = 2$; rešenje je $x = 999$, $y = 1001$.

2) $x < 0$ i $y > 0$: $-x + y = 2000$ i $y - x = 2$; nema rešenja.

3) $x < 0$ i $y < 0$: $-x - y = 2000$ i $y - x = 2$; rešenje je $x = -2001$, $y = -999$.

4) $x > 0$ i $y < 0$: $x - y = 2000$ i $y - x = 2$; nema rešenja.

214. Najpre rešimo sistem, kao da su promenljive $|x|$ i $|y|$ "obične". Dobijemo rešenja: $|x| = 4$ i $|y| = 1$. Odavde je $x = \pm 4$ i $y = \pm 1$, pa su rešenja parovi (x, y) redom: $(4, 1)$, $(4, -1)$, $(-4, 1)$, $(-4, -1)$.

215. a) Za $x \leqslant 0$ imamo: $-x + 2000 > 5x$, odakle je $x < \dfrac{1000}{3}$. Rešenja su sve vrednosti $x \leqslant 0$. Ako je $x \geqslant 0$, dobijamo: $x + 2000 > 5x$, odakle je $x < 500$. Uzimajući u obzir oba slučaja, rešenje je svako $x < 500$.

b) Nema rešenja, jer za $x \leqslant 0$ dobijemo $x > \dfrac{2}{3}$ (protivrečno) i za $x \geqslant 0$ treba da bude $x < -2$ (opet protivrečno).

c) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$, pa iz $|x-1|<1999$, dobijamo: $-1999<x-1<1999$, odakle je $-1998<x<2000$.

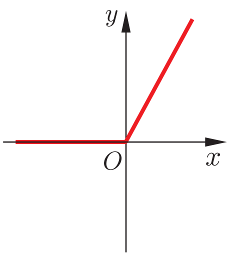
216. Tražimo uniju rešenja nejednačina $|2x+1|-5<-2$ i $|2x+1|-5>2$, odnosno $|2x+1|<3$ i $|2x+1|>7$. Iz prve dobijamo $-3<2x+1<3$, odakle je $-2<x<1$. Iz druge je $2x+1<-7$ ili $2x+1>7$, što daje rešenja $x<-4$ ili $x>3$. Dakle, rešenja su: $-2<x<1$. $x<-4$, $x>3$.

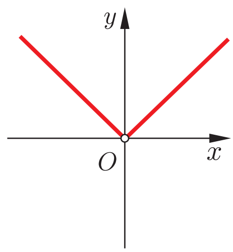
217. Rešenje dobijamo iz $|x-1|<1998$, a to je $-1997<x<1999$.

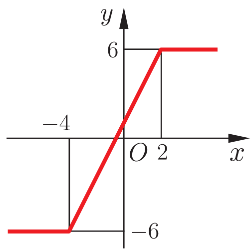
218. Rešavamo slično **primeru D**.

a) $y=0$, za $x\leqslant 0$, a za $x\geqslant 0$ je $y=2x$, slika levo.

b) $x\neq 0$, za $x<0$ je $y=-x$, a za $x>0$ je $y=x$, slika u sredini.

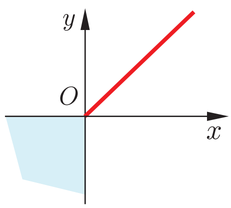


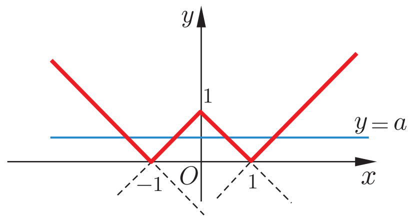




c) Za $x\leqslant -4$ je $y=-6$, za $-4\leqslant x\leqslant 2$ je $y=2x+2$, za $x\geqslant 2$ je $y=6$, slika gore desno.

d) Grafik je na slici dole levo (pripadaju mu sve tačke trećeg kvadranta).





219. Najpre nacrtamo grafik funkcije $y=\big||x|-1\big|$, slika gore desno. Za $x\geqslant 0$ to je $y=|x-1|$, a za $x\leqslant 0$ je $y=|-x-1|=|x+1|$. Dalje, imamo:
$y=|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{za} \quad x\geqslant 1\\ 1-x, & \text{za} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ i $y=|x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{za} \quad -1\leqslant x\leqslant 0\\ -x-1, & \text{za} \quad x\leqslant -1\end{cases}$
Zatim, ovaj grafik presecamo pravim $y=a$. To su prave paralelne sa osom Ox, na slici prava označena plavom linijom. Broj rešenja date jednačine predstavlja broj presečnih tačaka grafika funkcije sa pravom $y=a$. Očigledno, najviše rešenja (preseka), četiri, biće kad je $0<a<1$.

220. Neka su upisani brojevi a, b, c, d, e, f. Tada je $a+b+c+d+e+f=1$ i $a=|e-f|$, $b=|f-a|$, $c=|a-b|$, $d=|b-c|$, $e=|c-d|$ i $f=|d-e|$. Prema tome: $|e-f|+|f-a|+|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|=1$. Po uslovu su svih šest brojeva nenegativni, pa postoji broj koji je najveći. Neka je to a. Sada iz $a = |e - f|$ zaključujemo da je jedan od brojeva e i f nula, a drugi je jednak sa a. Ako je npr. $f = a$, onda je $e = 0$, pa je $b = 0$, $c = a = d$. U svakom slučaju je $4a = 1$, pa je $a = \frac{1}{4}$. Upisani su redom brojevi: $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$.

221. a) Rešimo po $x : x = y + 2 + \frac{2y+1}{3}$, pa iz $\frac{2y+1}{3} = z$, gde je z celi broj, dobijamo $y = z + \frac{z-1}{2}$. Zatim iz $\frac{z-1}{3} = t$, gde je t celi broj, $z = 2t + 1$. Vraćajući se unazad, dobijamo $y = 3t + 1$ i $x = 5t + 4$.

b) Jedno rešenje je $x_0 = 201$, $y_0 = 19$, pa je konačno $x = 201 + 10t$ i $y = 19 - 9t$.

c) Ako je $x = 1$, onda je $y = 12$. Ako je $x > 1$, onda je $x!$ paran broj, pa je leva strana jednačine parna, a desna neparna, što znači da više nema rešenja.

d) Ako je $x = 1$, onda je $p^2 = 3$, pa nema rešenja. Ako je $x = 2$, onda je i $p = 2$. Ako je $x > 2$, onda je $p^2 > 4$, tj. $p > 2$, onda je leva strana jednakosti neparna, a desna paran broj, pa nema više rešenja.

222. Tražimo parove prirodnih brojeva (x, y) koji su rešenja jednačine $4x + 7y = 99$. Rešimo po x i dobijamo $x = \frac{-7y+99}{4} = -2y + 24 + \frac{y+3}{4}$. Mora biti $\frac{y+3}{4}$ celi broj, pa je $y + 3 = 4z$, odnosno $y = 4z - 3$. Onda je $x = -7z + 30$. Očigledno je $z \leqslant 4$ (da bi bilo $x > 0$) i $z \geqslant 1$ (da bude $y > 0$). Imamo četiri tražene tačke za $z \in \{1, 2, 3, 4\}$. To su $(23, 1)$, $(16, 5)$, $(9, 9)$ i $(2, 13)$.

223. Ako su članovi tog niza: a, b, c, d, 7, e, tada je: $a + b = c$ i $b + c = d$, pa je $a + 2b = d$. Dalje je $c + d = 7$, tj. $(a + b) + (a + 2b) = 7$, odnosno $2a + 3b = 7$. Ovo je moguće samo za $a = 2$ i $b = 1$. Ostali brojevi su: $c = 3$, $d = 4$, $e = 11$.

224. Imamo jednačinu $2x + 3y = 17$, gde je x broj devojčica, a y broj dečaka. Rešenja ove jednačine su: $x = 1$, $y = 5$, ili $x = 4$, $y = 3$, ili $x = 7$, $y = 1$. Uslove zadovoljava samo: $x = 4$, $y = 3$.

225. Iz uslova imamo: $100x + 10 + y = 9(10x + y)$, itd. Traženi broj je 315.

226. Ako je x stolica sa tri noge i y stolica sa četiri noge, tada imamo jednačinu: $5x + 6y = 69$, itd. Imamo dva rešenja: $x = 3$, $y = 9$ i $x = 9$, $y = 4$.

227. Ako je na čeku napisano x dolara i y centi, tada odgovarajuća jednačina glasi: $100y + x - 5 = 2(100x + y)$, odnosno: $199x - 98y = -5$, gde je $y < 100$, itd. Na čeku je pisalo 31,63 dolara.

228. a) Iz $\frac{a}{6} + \frac{b}{7} = \frac{59}{42}$ dobijamo diofantsku jednačinu $7a + 6b = 59$, koja daje jedinstveno rešenje $a = 5$, $b = 4$.

b) Jednačina $\frac{a}{7} + \frac{b}{13} = \frac{9}{31}$ nema rešenja, a $\frac{a}{7} - \frac{b}{13} = \frac{9}{91}$ i $\frac{a}{13} - \frac{b}{7} = \frac{9}{91}$ daju rešenja: $a = 5$, $b = 8$, odnosno $a = 5$, $b = 2$.

229. Slično **primeru C**. Postoje tri rešenja: 14, 15 i 1, ili 18, 10 i 2, ili 22, 5 i 3.

230. Sistem jednačina: $x+y+z=30$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+2z=30$, daje: $x=9$ (vrabaca), $y=10$ (čavki) i $z=11$ (golubova).

231. a) Jednačina je ekvivalentna sa $(x-3)(y+1)=7$. Rešenja dobijamo iz: $x-3=1$ i $y+1=7$, ili $x-3=7$ i $y+1=1$.

Prvi sistem daje $x=4$, $y=6$, a drugi nema rešenja u skupu prirodnih brojeva.

b) Transformisanjem dobijamo: $(x+1)(y+1)(z+1)=2001=3\cdot 23\cdot 29$. Kako je $x,y,z\in N$, to je $x+1>1$, $y+1>1$ i $z+1>1$, pa rešenja dobijamo iz kombinacija: $x+1=3$, $y+1=23$, $z+1=29$, ili $x+1=3$, $y+1=29$, $z+1=23$, ili $x+1=23$, $y+1=3$, $z+1=29$, itd. Ima ukupno šest mogućnosti. Rešenja za uređenu trojku $(x,\ y,\ z)$ su permutacije (ispremeštane) trojke (2, 22, 28) – šest rešenja.

c) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1998=2-999$. Brojevi x i y ne mogu biti jedan paran i jedan neparan, jer bi i desna strana jednakosti tada morala biti neparna. Ali, ako su x i y oba parna ili oba neparna, onda su $x-y$ i $x+y$ oba parna i njihov proizvod mora biti deljiv sa 4, a 1998 nije deljivo sa 4. Zadatak nema rešenja.

d) Pomnožimo jednačinu sa 4, pa iz $4x^2+12x+96=4y^2$, dobijemo $(2x+3)^2+87=4y^2$, odnosno $(2y-2x-3)(2y+2x+3)=3\cdot 29$. Rešenja tražimo u kombinacijama: $2y-2x-3=1$, $2y+2x+3=87$ i $2y-2x-3=3$, $2y+2x+3=29$. Prvi slučaj daje rešenja $x=20$, $y=22$, a drugi $x=5$, $y=8$.

e) Očigledno je da ne može biti $x=1$. Dakle, najmanja vrednost za x je $x=2$, itd., slično **primeru C**. Rešenje: $x=2$, $y=3$, $z=6$.

232. a) Slično **primeru A**. Iz $(x+3)(y-5)=-3$, kombinovanjem nalazimo četiri rešenja za $(x,\ y)$. To su: $(-2,\ 2)$, $(-4,\ 8)$, $(0,\ 4)$ i $(-6,\ 6)$.

b) Mora biti jedan broj paran i jedan neparan. Neka je $m=2p$ i $n=2q-1$. Jednačina prelazi u sledeću: $4p^2+4q^2-4q=2018$. Leva strana je deljiva sa 4, a desna nije, što znači da nema rešenja u skupu celih brojeva.

c) Iz $(x-1)^2+y^2=1$, slično **primeru B**, nalazimo rešenja $(x,\ y)$. To su: $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(1,\ 1)$ i $(1,\ -1)$.

d) Slično **zadatku 231**d). Rešenja su: $(20,\ 23)$, $(66,\ -23)$, $(-1,\ 5)$, $(9,\ -5)$, $(-4,\ 5)$, $(6,\ -5)$, $(-25,\ 23)$ i $(21,\ -23)$.

e) Slično **primeru B**. Rešenja su: $(1,\ 2,\ 3)$ i $(1,\ 2,\ -3)$.

233. a) Iz $m^2-n^2=1954$, odnosno $(m-n)(m+n)=2\cdot 977$, zaključujemo da su m i n oba parna, ili oba neparna broja. Tada su $(m-n)$ i $(m+n)$ parni brojevi, pa njihov proizvod mora biti deljiv sa 4, a $2\cdot 977$ nije deljivo sa 4.

b) Kao pod a).

c) x i y ne mogu biti različite parnosti, jer je desna strana jednakosti parni broj. Ne mogu biti oba broja parna, npr. $x=2m$ i $y=2n$, jer bismo tada imali: $4m^2+4n^2=2\cdot 999$, što nije moguće. (Leva strana deljiva sa 4, a desna nije.) Ako su oba broja neparna, $x=2m+1$ i $y=2n+1$, dobićemo: $4m^2+4m+4n^2+4n=1996$. Posle skraćivanja sa 4, biće: $m^2+m+n^2+n=499$, odnosno $m(m+1)+n(n+1)=$

499. Kako su oba izraza na levoj strani parni brojevi, a desna strana je neparni broj, zaključujemo da jednačina nema rešenja u skupu celih brojeva.

d) Jednačina je ekvivalentna sa $(x-1)^2 - y^2 = 2$. Dalje, kao pod a).

234. Broj maraka je deljiv sa 5 i sa 7, pa možemo reći da ih ima $35k$, gde je k prirodni broj. Iz uslova pravimo jednačinu $7k + 5ky + 303 = 35k$, odnosno $28k - 5ky = 303$ ili $k(28-5y) = 303$. Očigledno je $y = 1$, ili $y = 3$, ili $y = 5$. Samo za $y = 5$ dobijamo prirodni broj k, i to $k = 101$. Bilo je 3535 markica.

235. Mora biti $k \in N$. Tada je $k + 2 = m^2$ i $k - 7 = n^2$, pa je $m^2 - n^2 = 9$, itd, slično **primeru A**. Rešenja su: $x = 7$ ili $x = 23$.

236. Traže se prirodni brojevi m i n, takvi da je $mn = 10(m+n)$. Odavde imamo: $mn - 10m - 10n + 100 = 100$, odnosno $(m-10)(n-10) = 100$, itd. Traženi parovi (m, n) su: $(11, 110)$, $(14, 35)$, $(15, 30)$ i $(20, 20)$.

237. Ni jedan od brojeva ne može biti jednak 1, jer bi leva strana tada bila veća od 1. Takođe ni jedan broj ne može biti veći od 2, jer bi, na primer, za $a = 3$ bilo: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \leqslant \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$. Jedino rešenje je: $a = b = c = d = 2$.

238. Neka su a cm i b cm stranice pravougaonika, $a, b \in N$. Rešenja jednačine $ab = 2(a+b)$ određuju tražene pravougaonike. To su: $a = 3$ cm, $b = 6$ cm ili $a = 4$ cm $= b$.

239. Neka su katete $a = 21$ cm i b, a hipotenuza je c. Prema Pitagorinoj teoremi je $c^2 - b^2 = 21^2 = 441$, itd, slično **zadatku 235**. Rešenja za trojke (a, b, c) su: $(21, 72, 75)$, $(21, 28, 35)$ i $(21, 20, 29)$.

240. Za $k \geqslant 3$ imamo jednakost: $(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+k) = 2001$. Odavde dobijamo: $(n+1+n+k) + (n+2+n+k-1) + \cdots = 2001$, odnosno: $(2n+k+1) + (2n+k+1) + \cdots = 2001$. Zbir na levoj strani jednakosti nam je poznat: $\frac{k}{2}(2n+k+1) = 3 \cdot 23 \cdot 29$ i konačno dobijamo diofantsku jednačinu: $k(2n+k+1) = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$. Rešenja za n i k daju sledeće kombinacije: $k = 3$ i $2n+k+1 = 1334$ ili $k = 6$ i $2n+k+1 = 667$, ili $k = 23$ i $2n+k+1 = 174$, ili $k = 29$ i $2n+k+1 = 138$, ili $k = 46$ i $2n+k+1 = 87$, ili $k = 58$ i $2n+k+1 = 69$. Mora biti $2n+k+1 > k$, pa nema više kombinacija. Dobijaju se sledeća rešenja: $k = 3$, $n = 665$, tj. $666+667+668 = 2001$; $k = 6$, $n = 330$, tj. $331+332+333+334+335+336 = 2001$; $k = 23$, $n = 75$, tj. $76 + 77 + \cdots + 98 = 2001$; $k = 29$, $n = 54$; $k = 46$, $n = 20$ i $k = 58$, $n = 5$. Ima ukupno sedam razlaganja broja 2001 na zbir uzastopnih prirodnih brojeva.

241. Neka je $\overline{ab}$ naš broj. Tada je $\overline{5ab} - \overline{ab5} = 252$, ili $\overline{ab5} - \overline{5ab} = 252$. U prvom slučaju imamo jednačinu: $500 + \overline{ab} - (10 \cdot \overline{ab} + 5) = 252$. Odavde je $\overline{ab} = 27$. Slično, u drugom slučaju dobijamo $\overline{ab} = 83$.

242. Neka je $\overline{ab}$ dvocifreni broj. Dopisivanjem dobijamo: $\overline{1ab1} = 23\overline{ab}$, odnosno: $1001 + 10\overline{ab} = 23\overline{ab}$. Odavde nalazimo $\overline{ab} = 77$.

243. Ako sa x označimo broj koji dobijamo izostavljanjem cifre 7, dobijamo jednakost: $7 \cdot 10^k + x = 4(10x + 7)$, gde je k prirodni broj. Odatle je: $x = \dfrac{7(10^k - 4)}{39}$. Bilo kakav da je broj k, broj $10^k - 4$ napisan je pomoću cifara 9 i 6, pa je deljiv sa 3 i izraz koji smo dobili za x može da se skrati sa 3. Rešenje za x dobijamo varirajući vrednost prirodnog broja k, tako da $10^k - 4$ bude deljivo sa 13. Najmanja odgovarajuća vrednost je $k = 5$. Tada je $x = 17948$, pa je traženi broj $717\,948$.

244. Dopisivanjem cifre 1, broj x se uvećao za 10, što u procentima iznosi $\dfrac{10}{x}$. Iz daljeg opisa sledi jednačina: $x + 10 + \dfrac{10}{x}(x + 10) = 72$. Sređivanjem dobijemo: $x^2 - 52x + 100 = 0$, ili $(x - 2)(x - 50) = 0$. Tražimo jednocifren broj x, pa je $x = 2$.

245. Neka je $\dfrac{a}{b}$ traženi razlomak, $b \neq 0$ i $D(a, b) = 1$. Tada je $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a + x}{bx}$, odnosno $a = \dfrac{a + x}{x}$. Odavde je $x = \dfrac{a}{a - 1} = \dfrac{a - 1 + 1}{a - 1} = 1 + \dfrac{1}{a - 1}$. Kako je x prirodni broj, to mora biti $a - 1 = 1$, tj. $a = 2$. Tada je i $x = 2$. Imenilac b može uzeti vrednosti 3 i 5. (Ne može biti $b = 4$, jer $a = 2$ i $b = 4$ ne bi bili uzajamno prosti, a za $b \geqslant 6$ je $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{1}{3}$.) Traženi razlomci su $\dfrac{2}{3}$ i $\dfrac{2}{5}$.

246. Kada od x litara alkohola odlijemo 2 litra i dolijemo 2 litra vode u rastvoru će biti $(x - 2)$ litara čistog alkohola, tj. dobićemo rastvor od $\dfrac{(x - 2) \cdot 100}{x}$ procenata alkohola. Ukupna količina čistog alkohola posle drugog presipanja biće $x - 2 - 2 \cdot \dfrac{x - 2}{x}$ litara, a to je prema uslovu $0,36x$. Tako dobijemo jednačinu $x - 2 - \dfrac{2(x - 2)}{x} = 0,36x$. Posle množenja sa x biće: $x(x - 2) - 2(x - 2) = 0,36x^2$, odnosno $(x - 2)^2 = 0,36x^2$. Kako su x i $x - 2$ pozitivne veličine, dobijamo $x - 2 = 0,6x$, odakle je $x = 5$. Dakle, posuda sadrži 5 litara rastvora.

247. Neka 16 kivija vredi koliko x limunova. Tada x kivija vredi koliko 36 limunova. Postavimo proporciju $16 : x = x : 36$, odakle je $x = 24$. Dakle, 16 kivija vredi koliko 24 limuna, pa tuce limunova vredi koliko 8 kivija.

248. Ako je c cena pre sniženja, tada se za 270 dinara moglo kupiti $\dfrac{270}{c}$ metara platna. Posle sniženja cena je $\dfrac{80c}{100} = \dfrac{4}{5}c$, pa se za 240 dinara moglo kupiti $240 : \dfrac{4c}{5} = \dfrac{300}{c}$ metara platna. Prema uslovu dobijamo jednačinu: $\dfrac{300}{c} - \dfrac{270}{c} = 1$, pa je $c = 30$. Cena je pre sniženja iznosila 30 dinara.

249. Neka je bilo x zlatnika. Prvi brat je dobio $100 + \dfrac{1}{6}(x - 100)$, a drugi $200 + \dfrac{1}{6}\left(x - 200 - 100 - \dfrac{1}{6}(x - 100)\right)$ zlatnika. Ova dva iznosa su jednaka. Kad ih izjednačimo dobijamo jednačinu čije je rešenje $x = 2500$. Izračunajmo koliko je dobio prvi brat: $100 + \frac{1}{6} \cdot 2400 = 500$ zlatnika. Znači, bilo je petoro braće.

250. Po uslovu je $1900 < x^2 < 2000$, a to je moguće samo za $x = 44$, jer je $44^2 = 1936$. Pradeda je 1936. godine imao 44 godine, što znači da je rođen 1892, pa je osamdeseti rođendan slavio 1972. godine.

251. Označimo sa x godina starost sestre i sa $2x$ moju starost, u vreme kada sam bio od sestre dva puta stariji. Sada ja imam $4x$ godina, a moja sestra $3x$ godina. Kroz 15 godina imaću $4x + 15$ godina, a sestra $3x + 15$ godina. Tada ćemo imati zajedno $7x + 30$ godina, što je jednako 100 godina. Tako dobijamo jednačinu $7x + 30 = 100$, odakle je $x = 10$. Dakle, meni je 40 godina, a sestri 30 godina.

252. Neka je prošlo x minuta dok kazaljke nisu zamenile mesta. Tada su one zbirno prošle pun krug. Dok velika kazaljka prođe put od x minuta, manja prođe $\frac{x}{12}$ minuta. (Vidi **primer D**.) Tako dobijamo jednačinu: $x + \frac{x}{12} = 60$. Odavde je $x = 55\frac{5}{13}$ minuta. Toliko je Nemanja radio domaći zadatak.

Pretpostavimo da je Nemanja počeo sa radom u 12 časova i y minuta. Rastojanje između kazaljki je $\frac{11}{12}y$, a to je $\frac{1}{13}$ punog kruga, pa je $\frac{11}{12}y = \frac{1}{13} \cdot 60$. Odavde je $y = 5\frac{5}{143}$ minuta. Dakle, Nemanja je počeo sa radom u 12 časova i $5\frac{5}{143}$ minuta, a završio u 13 časova $\frac{60}{143}$ minuta.

253. Da bi se obe gume jednako istrošile moraju biti jednak broj kilometara na prednjem i zadnjem točku, i neka je to ukupno x km. Na putu dužine 1 km istrošiće se $\frac{1}{x}$ deo gume. Cela guma se istroši na prednjem točku posle 25000 kilometara, pa će se na putu dužine 1 km potrošiti $\frac{1}{25000}$ deo. Tako dobijamo jednačinu: $\frac{1}{25000} + \frac{1}{15000} = \frac{2}{x}$. Odavde je $x = 18750$ kilometara. Dakle, motociklista mora promeniti gumu na 9375 kilometara, a nove gume će kupiti posle 18750 kilometara.

254. Ako 40 krava popase livadu za 50 dana, onda su one imale 2000 "porcija" trave. Istu livadu 60 krava popase za 30 dana, što znači da su imale 1800 porcija. Zaključujemo da je 200 porcija razlike u ova dva slučaja nastalo zbog intenzivnog i ravnomernog rasta trave za 20 dana. Znači, dnevno izraste novih 10 porcija. Budući da je posle 30 dana bilo 1800 porcija, na početku je bilo $1800 - 30 \cdot 10 = 1500$ porcija.

Neka je 20 krava popaslo livadu za x dana. Tada je bilo $20x$ porcija. Iz jednačine $20x = 1500 + 10x$, dobijamo $x = 150$ dana.

Broj krava koje popasu livadu za 75 dana označimo sa y. Ukupan broj porcija je $75y = 1500 + 75 \cdot 10$. Odavde je $y = 30$ krava.

255. Prvi traktor za jedan sat izore $\frac{1}{15}$ polja, a drugi izore $\frac{1}{20}$ polja. Ako su oba traktora orala x sati zajedno, onda se dati uslov može zapisati u obliku jednačine: $\frac{x}{15} + \frac{x}{20} = \frac{14}{15}$. Odavde je $x = 8$.

256. Označimo sa t časova vreme koje pešaka, posle 3 pređena kilometra, deli od polaska autobusa. Prema uslovima dobijamo jednačinu: $3 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) = 4\left(t - \frac{2}{3}\right)$, jer je 30 min $= \frac{1}{2}$ časa i 40 min $= \frac{2}{3}$ časa. Odavde je $t = \frac{25}{6}$ časa. Od sela A do autobuske stanice ima $3 + 3 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right)$ km, a to je 17 km.

257. Neka je prvi pešak prešao put od A do B za $2t$ časova. Tada je rastojanje s od A do B: $s = 5t + 4t = 9t$. Odredićemo koliko je vremena trebalo drugom pešaku za isti put: $\frac{9t}{2} : 5 + \frac{9t}{2} : 4 = \frac{9t}{10} + \frac{9t}{8} = \frac{81t}{40} = 2t + \frac{t}{40}$. Dakle, drugi pešak je sporiji za $\frac{t}{40}$ časova.

Ako rastojanje od A do B iznosi 18 km, tada je $9t = 18$, odnosno $t = 2$ časa. Drugi pešak je zaostao za $\frac{2}{40} \cdot 4 = \frac{1}{5}$ km, odnosno za 200 metara.

258. Pešak je prvog dana putovao $3\frac{5}{6}$ časa, a drugog dana $3\frac{2}{3}$ časa. Prvog dana kretao se brzinom $12 : 3\frac{5}{6} = \frac{72}{23}$ (km/h), a drugog dana $12 : 3\frac{2}{3} = \frac{36}{11}$ (km/h). Ako sa x sati označimo vreme u koje je pešak prolazio pored traženog mesta, dobićemo jednačinu: $\frac{72}{23}\left(x - 9\frac{5}{12}\right) + \frac{36}{11}(x - 11) = 12$. Rešenje ove jednačine je $x = 12,1$ sati. Dakle, traženo mesto je od pešakovog sela udaljeno za $\frac{72}{23}\left(12,1 - 9\frac{5}{12}\right) = 8,4$ km. Oba dana pešak je tuda prošao u 12 sati i 6 minuta.

259. Neka udaljenost od A do B iznosi s km. Biciklista je od A do B putovao $\frac{s}{24}$ časova, u gradu B se zadržao $\frac{1}{3}$ časova i od B do A putovao $\frac{s}{20}$ časova. Vratio se posle tačno 4 časa. Ovo možemo zapisati u vidu jednačine: $\frac{s}{24} + \frac{1}{3} + \frac{s}{20} = 4$. Rešenje ove jednačine je $s = 40$ km. Biciklista je stigao u grad B u 13 časova i 40 minuta, a krenuo je iz grada B u 14 časova, upravo u momenta polaska automobila iz grada A. Označimo sa t časova vreme putovanja automobila i bicikliste do susreta. Za to vreme automobil je prešao $60t$ km, a biciklista $20t$ km. Tako dobijamo jednačinu: $60t + 20t = 40$, čije rešenje je $t = \frac{1}{2}$ časa $= 30$ minuta. Dakle, automobil i biciklista su se sreli u 14 časova i 30 minuta.

260. Brzinu bicikliste u prvoj vožnji označimo sa x km/h. Dobićemo jednačinu: $\frac{2a}{x} = \frac{a}{x+6} + \frac{a}{x-4}$. Rešenje jednačine je $x = 24$ km/h. Rezultat ne zavisi od a.

261. Neka je za t časova biciklista prešao prvu polovinu puta, brzinom od 10 km na čas. Na cilj je stigao u 14, umesto u 12 časova, što znači da je putovao 2 sata duže. Otuda dobijamo jednačinu: $10t = 5(t+2)$, koja daje: $t = 2$ časa. Biciklista je putovao ukupno 6 sati. Znači, krenuo je u 8 časova, i prešao ukupno 40 km.

262. Pretpostavimo da bi trgovački putnik brzinom od 60 km/h prešao ostatak puta za t časova. Isti put prešao je za 70 minuta ranije, krećući se brzinom od 80 km/h, tj. prešao je taj put za vreme $\left(t - \frac{7}{6}\right)$ časova. Tako možemo sastaviti jednačinu: $60t = 80\left(t - \frac{7}{6}\right)$, odakle je $t = \frac{14}{3}$ časova, tj. $t = 4$ časa 40 minuta. Ostatak puta je $\frac{14}{3} \cdot 60$ km, tj. 280 km. Trgovački putnik je putovao 340 km.

263. Izrazimo sa t minuta vreme za koje je voz nadoknadio zakašnjenje, a sa v brzinu voza. Nepoznato vreme dobijamo iz jednačine: $1,2vt = v(t+15)$. Odavde je $1,2t = t + 15$, pa je $t = 75$ minuta.

264. Ako sa x km označimo rastojanje između mesta A i B, dobićemo jednačinu: $\frac{x}{2} : 80 + \frac{x}{3} : 60 + \frac{x}{6} : 40 = 23$, koja daje rešenje $x = 1440$ km.

265. Neka udaljenost signala od mesta B iznosi x km. Da je voz nastavio vožnju bez zadržavanja brzinom od 60 km/h, stigao bi u mesto B po redu vožnje za $\frac{x}{60}$ časova. Posle zadržavanja od 3 min $= \frac{1}{20}$ časa, voz je morao nadoknaditi izgubljeno vreme. Stoga je nastavio vožnju brzinom od 75 km/h. Na osnovu ovih podataka imamo jednačinu: $\frac{x}{60} = \frac{1}{20} + \frac{x}{75}$. Odavde dobijamo: $x = 15$ km.

266. Neka su x i y količine datih legura, koje mešanjem daju 8 kg nove legure: $x+y = 8$. U prvoj leguri ima $\frac{2}{5}x$ bakra, u drugoj $\frac{3}{10}y$ bakra, a u trećoj, novodobijenoj leguri, treba da bude: $\frac{5}{16} \cdot 8 = 2,5$ kg bakra. Otuda dobijamo drugu jednačinu: $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = 2,5$. Dobijeni sistem jednačina daje rešenje: $x = 1$ kg i $y = 7$ kg. Dakle, treba pomešati 1 kg prve i 7 kg druge legure.

267. Lako se možemo uveriti da mora biti 6 ili 7 novčanica od 50 din. Ako je dato 7 novčanica po 50 din, onda (ako sa x označimo broj novčanica od 10 din, a sa y broj novčanica od 5 din) imamo uslove: $10x + 5y = 105$ i $x + y = 16$. Odavde je $x = 5$ i $y = 11$. Ova rešenja ne ispunjavaju uslov da je broj novčanica od 5 din najmanji. Ako je dato 6 novčanica po 50 din, onda dobijamo $x = 14$ i $y = 3$.

268. Radnici su zaradili x din i y din, a prema datim uslovima, ove sume su rešenja sistema jednačina: $x + y = 16320$ i $\frac{2}{5}x = \frac{4}{7}y$. Dakle, prvi je dobio $x = 9600$ din, a drugi $y = 6720$ din.

269. Neka je x broj predmeta koje kupi muž. On je za njih platio x^2 dinara. Ako je žena kupila y predmeta, ona je platila y^2 dinara. Prema zadatim uslovima je $x^2 - y^2 = 63$, tj. $(x+y)(x-y) = 63$, gde su x i y prirodni brojevi. Moguće su tri kombinacije, koje daju proizvod 63. To su: $63 \cdot 1$, $21 \cdot 3$, $9 \cdot 7$, jer je $x + y > x - y$. Na taj način dolazimo do sledeća tri sistema jednačina:

$$1)\ \left.\begin{array}{rl} x+y &= 63 \\ x-y &= 1 \end{array}\right\},\quad 2)\ \left.\begin{array}{rl} x+y &= 21 \\ x-y &= 3 \end{array}\right\},\quad 3)\ \left.\begin{array}{rl} x+y &= 9 \\ x-y &= 7 \end{array}\right\},$$ čija

rešenja su: 1) $x = 32$, $y = 31$; 2) $x = 12$, $y = 9$; 3) $x = 8$, $y = 1$.

Sada nalazimo one vrednosti čija je razlika 23. To su 32 i 9, što znači da je 32 predmeta kupio Zoran, a 9 predmeta kupila je Irena. Razlika 11 je između 12 i 1, što znači da je Dušan kupio 12 predmeta, a Branka 1 predmet. Tada ostaje da je Nikola kupio 8 predmeta, a Maja 31 predmet. Dakle, bračni parovi su: Zoran i Maja, Dušan i Irena, Nikola i Branka.

270. U prvom slučaju trebalo je da radnici A, B i C dobiju $\frac{8}{21}$, $\frac{7}{21}$ i $\frac{6}{21}$ delova sume, a u drugom slučaju $\frac{8}{18}$, $\frac{6}{18}$ i $\frac{5}{18}$. U drugoj podeli samo treći treba da dobije manje nego što je predviđeno, i taj manjak iznosi $\frac{6}{21} - \frac{5}{18} = \frac{1}{126}$, što u novcu vredi 50 dinara. Dakle, suma koja je podeljena je $126 \cdot 50 = 6300$ dinara. Dobili su redom: 2450 dinara, 2100 dinara i 1750 dinara.

271. Uzmimo x litara 65-procentnog i y litara 40-procentnog rastvora, tako da je: $x + y = 15$. Ukupna sadržina soli u tom mešanju, izražena u procentima, predstavljena je jednačinom: $65x + 40y = 15 \cdot 55$. Rešenje dobijenog sistema jednačina je $x = 9$ litara, $y = 6$ litara.

272. Neka je prve bronze x kg, a druge y kg. Imamo jednačinu: $x + y = 70$. U 70 kg bronze biće $\frac{4}{5} \cdot 70 = 56$ kg bakra, u prvoj bronzi $\frac{8}{11}x$ kg, a u drugoj $\frac{5}{6}y$ kg. Odavde dobijamo drugu jednačinu: $\frac{8}{11}x + \frac{5}{6}y = 56$. Rešenje dobijenog sistema jednačina je $x = 22$ kg i $y = 48$ kg.

273. Ako dati komad legure sadrži x kg bakra i y kg cinka, dobićemo jednačine $x + y = 40$ i $\frac{100}{9} \cdot \frac{x}{100} + \frac{100}{7} \cdot \frac{y}{100} = 5$. Rešenje sistema otkriva da je: $y = 17,5$ kg i $x = 22,5$ kg.

274. Označimo sa a, b i c količine vode pre presipanja. Posle prvog presipanja imamo u prva dva suda: $\frac{a}{2}$ i $\left(b + \frac{a}{2}\right)$ litara. Posle drugog presipanja u drugom sudu imamo $\frac{2}{3}\left(b + \frac{a}{2}\right)$ litara, što prema uslovu daje jednakost: $\frac{2}{3}\left(b + \frac{a}{2}\right) = 6$, odakle je: $2b + a = 18$. Kako je ukupna količina vode $a + b + c = 18$ litara, sledi: $b = c$. Prema tome, u trećem sudu imamo najpre $b + \frac{1}{3}\left(b + \frac{a}{2}\right)$ i posle prelivanja u prvi sud, dobijamo: $\frac{3}{4}\left(b + \frac{1}{3}\left(b + \frac{a}{2}\right)\right)$, odakle je $8b + a = 48$. Jednačine $2b + a = 18$ i $8b + a = 48$ daju rešenja: $a = 8$ i $b = 5 = c$. Dakle, u prvom sudu je bilo 8 litara vode, a u druga dva po 5 litara.

275. Neka leva posuda sadrži x litara, a desna y litara tečnosti. Pri tome je $x + y = 35$. Drugi uslov, presipanje, izražava se jednačinom $x - y = 2y + 5$ ili $x - y + 5 = 2y$. Sistem jednačina $x + y = 35$ i $x - y = 2y + 5$, nema rešenja u skupu prirodnih brojeva, a rešenje drugog sistema je $x = 25$ litara, $y = 10$ litara.

276. Označimo sa V i M zapreminu i masu posude. Prema datim uslovima je: $\frac{3}{4}V + M = 8100$ i $\frac{5}{12}V \cdot 13,596 + M = 49386$. Odavde je $V = 8400\ \text{cm}^3 = 8,4$ litara, a masa posude je $M = 1,8$ kg.

277. Ako je u porodici bilo x braće i y sestara, formiraćemo sledeće jednačine: $x - 1 = 2y$ i $x = 5(y - 1)$. Rešenje sistema jednačina je: $x = 5$ muških i $y = 2$ ženska člana porodice.

278. Neka su Nikola i Nemanja stari redom x i y godina. Nikola je stariji za $(x - y)$ godina. Pre toliko godina je Nikola imao onoliko godina koliko sada ima Nemanja. Nemanja je tada imao $y - (x - y) = (2y - x)$ godina. Tako iz prvog uslova dobijamo jednačinu: $x = 2(2y - x)$. Druga jednačina je $x + y = 35$. Rešavanjem sistema dobijamo $x = 20$ godina i $y = 15$ godina.

279. Slično **zadatku 254**. Označimo sa x količinu vode koja se u početku nalazi u jezeru, sa y količinu koju dnevno unosi potok i sa z količinu vode koju jedan konj popije za 24 časa. Iz prvog uslova imamo jednačinu: $x + y = 183z$. Drugi uslov daje jednačinu $5 \cdot 37z = x + 5y$, odnosno $185z = (x + y) + 4y$. Kad ovde $(x + y)$ zamenimo sa $183z$, dobićemo: $z = 2y$. Zaključujemo da jedan konj za dan popije dva puta više nego što se ulije iz potoka, tj. ako konj pije iz dana u dan, tada se ukupna količna vode u jezeru smanjuje dnevno za onoliko koliko bi se ulilo iz potoka, tj. za y. Pretpostavimo da jedan konj popije svu vodu za k dana. Tada imamo jednačinu: $x = ky$. Međutim, iz $x+y = 183z = 366y$, dobijamo vezu $x = 365y$, pa je $365y = ky$. Dakle, $k = 365$, tj. jedan konj će popiti celo jezero za godinu dana.

280. Označimo sa a, b, c, d broj sati za koje bi pojedinačno ovaj posao uradili svaki od četvorice radnika. Za jedan sat rada oni bi završili redom $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ deo posla. Sada iz datih uslova dobijamo jednačine: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$, a $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{1}{7,5}$ i $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{10}$. Saberemo ove jednačine i dobijemo: $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \frac{2}{5}$, odakle je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{5}$. Znači, svi zajedno završili bi posao za 5 sati.

281. Neka prvi radnik može da završi posao za x dana, a drugi za y dana. Tada imamo sistem jednačina: $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$, $\frac{5}{x} + \frac{5}{y} + \frac{17,5}{y} = 1$, koji daje rešenja: $x = 20$ dana, $y = 30$ dana.

282. Pretpostavimo da bi jedan traktor obradio prvo polje za a sati i drugo polje za b sati. Tada dobijamo jednačine: $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 12$ i $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3}\right) + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 20$.

Odavde dobijamo: $a = 18$, $b = 12$. Dakle, dva traktora mogu preorati prvo polje za 9 časova.

283. Neka je posao završen za x dana. Tada je prvi radio x dana, drugi $(x-y)$, treći $(x-2y)$ i četvrti $(x-3y)$ dana. Njima treba ukupno 36 dana rada za celi posao, pa je $x+(x-y)+(x-2y)+(x-3y) = 4x-6y = 36$. Drugi uslov trvdi da je $x = 5(x-3y)$. Rešenje sistema jednačina daje odgovor na postavljeno pitanje: $x = 15$ dana.

284. Ako brzinu toka reke označimo sa x, a brzinu koju čamac postiže bez uticaja toka reke označimo sa v, onda je $v+x = 2$, jer je brzina kretanja čamca nizvodno iznosila 2 km/h. Osim toga, brzine kretanja čamca uzvodno i nizvodno stoje u razmeri $2:3$, pa je $\dfrac{v-x}{v+x} = \dfrac{2}{3}$. Rešavajući dobijeni sistem jednačina nalazimo da je $x = \dfrac{1}{3}$ km/h.

285. Neka je k vidljivih stepenica i t vreme potrebno da se teret pomeri za visinu jednog stepenika. Brži pešak je prešao preko stepeništa za $(k-75)\cdot t$ vremenskih jedinica, prešavši preko 75 stepenika. Preko tri stepenika je prešao za vreme $\dfrac{(k-75)\cdot t}{25}$. Sporiji pešak je prešao celo stepenište za vreme $(k-50)\cdot t$, a jedan stepenik za $\dfrac{(k-50)\cdot t}{50}$. Dok sporiji prede jedan, brži pređe tri stepenika, pa imamo jednačinu $\dfrac{(k-75)\cdot t}{25} = \dfrac{(k-50)\cdot t}{50}$. Skratimo t i dobijemo $k = 100$.

286. Neka je s udaljenost između Beograda i Podgorice, x brzina aviona i y brzina vetra. Ako avion leti po mirnom vremenu, da ode do Podgorice i nazad treba mu $\dfrac{2s}{x}$ vremena. Ako duva stalni vetar, od Beograda do Podgorice treba $\dfrac{s}{x+y}$, a u povratku $\dfrac{s}{x-y}$. Ukupno u drugom slučaju treba vremena $\dfrac{s}{x+y}+\dfrac{s}{x-y} = \dfrac{s(x-y)+s(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{2s\cdot x}{x^2-y^2} = \dfrac{2s}{x-\dfrac{y^2}{x}} > \dfrac{2s}{x}$. Dakle, kad duva stalni vetar, avion će leteti duže.

287. Slično prethodnom zadatku. Neka je $AB = 2s$. Prvi prelazi taj put za vreme t, pa je $\dfrac{ut}{2}+\dfrac{vt}{2} = 2s$, odnosno $t = \dfrac{4s}{u+v}$. Drugi prelazi prvu polovinu puta za vreme $t_1 = \dfrac{s}{u}$, a drugu polovinu puta za $t_2 = \dfrac{s}{v}$. Ukupno vreme putovanja drugog je $T = t_1+t_2 = s\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}\right)$. Uporedimo T i t: $T-t = \dfrac{s(u+v)}{uv}-\dfrac{4s}{u+v} = \dfrac{s(u+v)^2-4suv}{uv(u+v)} = \dfrac{s(u-v)^2}{uv(u+v)} \geqslant 0$. Dakle $T-t \geqslant 0$, pa je $T \geqslant t$. Ako je $u = v$, onda je $T = t$, a ako je $u \neq v$, tada je $T > t$.

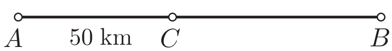
288. Označimo sa x km ukupnu dužinu uzbrdica na putu od A do B, sa y km ukupnu dužinu ravnog puta i sa z km ukupnu dužinu nizbrdica, takođe od A

ka B. U povratku nizbrdice prelaze u uzbrdice i obrnuto. Vreme putovanja od A do B izražavamo jednačinom: $\frac{x}{60}+\frac{y}{72}+\frac{z}{90}=5$, odakle je $6x+5y+4z=1800$. Za povratak važi jednačina: $\frac{x}{90}+\frac{y}{72}+\frac{z}{60}=4$, a odavde je $4x+5y+6z=1440$. Saberemo ove dve jednačine: $10(x+y+z)=3240$, pa je $x+y+z=324$ kilometra. Toliko je rastojanje između A i B.

289. Od momenta drugog susreta, dok je biciklista prešao 8 km, kamion je prešao 20 km. Ako njihove brzine označimo sa b i k, biće $\frac{8}{b}=\frac{20}{k}$. Odavde je $k=2,5b$. Između dva susretanja biciklista je prešao 18 km, a kamion 34 km i još se zadržao 22 minuta. Preračunavanjem vremena dobićemo sledeću jednačinu: $\frac{18}{b}=\frac{34}{2,5b}+\frac{22}{60}$. Odavde je $b=12$ km/h, pa je $k=30$ km/h.

290. Pretpostavimo da voz za 1 sekundu pređe v metara, a da je dužina voza x metara. Tada je lokomotiva za 27 sekundi prešla $(225+x)$ metara, tj. $27v=225+x$. Zbog kretanja pešaka u suprotnom smeru, za 9 sekundi lokomotiva prelazi $(x-9)$ metara, tj. $9v=x-9$. Rešenje dobijenog sistema jednačina je $x=126$ metara, to je dužina voza, i $v=13$ metara u sekundi je brzina voza. Ta brzina iznosi 46,8 km/h.

291. Neka rastojanje od A do B iznosi s. Označimo sa V_a brzinu voza koji polazi iz mesta A, a sa t vreme od polaska do prvog susreta sa drugim vozom. Za vreme t prvi voz je prešao put od 50 km, tj. $V_a\cdot t=50$. Oba voza zajedno prešli su relaciju od A do B jedanput. (Na slici levo put koji je prešao prvi voz je AC, put koji je prešao drugi voz je BC, a ukupno su prešli $AC+BC=AB=s$). Do sledećeg susreta oba voza su zajedno prešla put dužine $3s$. To se jasno vidi na slici desno: prvi voz je prešao put $AB+BD$, a drugi $BA+AD$. Kako je $BD+AD=s=AB$, to je $AB+BD+BA+AD=3s$.



Prema uslovu, brzine vozova su ravnomerne, pa je za prelaženje tri puta dužeg puta potrebno 3 puta više vremena. Stoga je prvi voz do drugog susreta prešao put $V_a\cdot 3t$, odnosno $3V_a\cdot t=s+30$. Zamenjujući $V_a\cdot t=50$, dobijamo: $150=s+30$, odakle je $s=120$. Dakle, udaljenost od A do B iznosi 120 km.

292. Neka je voz prešao celi put brzinom v km/h za t časova. Taj put iznosi $v\cdot t$ km. Ako je brzina $(v+6)$ km/h, putovanje traje $(t-4)$ časa. Prema tome, biće $(v+6)(t-4)=vt$, a odavde je: $6t-4v=24$. Ako je brzina voza $(v-6)$ km/h, putovanje će trajati $(t+6)$ časova, što daje jednačinu: $(v-6)(t+6)=vt$, odakle je: $6v-6t=36$. Sabiranjem ovih jednačina dobijamo: $2v=60$, odnosno $v=30$ km/h. Sada lako izračunamo da je $t=24$. Voz je prešao $30\cdot 24$ km, tj. 720 km.

293. Ako je v brzina i d dužina voza, tada je $d=(v+6)\cdot\frac{12,6}{3600}=(v-3,6)\cdot\frac{15}{3600}$. Rešenje ovog sistema jednačina je: $d=210$ metara, to je dužina voza i brzina je $v=54$ km/h.

294. Do susreta vozova prođe $\dfrac{300}{v_1+v_2} = \dfrac{300}{120} = 2,5$ časova. Za to vreme lasta preleti $2,5 \cdot 120 = 300$ km.

295. Neka se motociklista kreće uzbrdo brzinom od x km/h a nizbrdo brzinom od y km/h. Tada vreme putovanja od A do B daje jednačinu: $\dfrac{3}{x} + \dfrac{6}{y} + \dfrac{12}{18} = \dfrac{67}{60}$, a obrnuto: $\dfrac{3}{y} + \dfrac{6}{x} + \dfrac{12}{8} = \dfrac{76}{60}$. Rešenje je $x = 12$ km/h i $y = 30$ km/h.

296. Najpre uprostimo date proporcije kao u **primeru A**: $a : b = \dfrac{3}{2} : \dfrac{15}{4}$, odnosno $a : b = 2 : 5$ i slično $a : c = 5 : 9$. Desnu stranu prve proporcije proširimo sa 5, a drugu sa 2, pa u oba slučaja slovu a odgovara broj 10. Dakle, imamo $a : b = 10 : 25$ i $a : c = 10 : 18$, pa je $a : b : c = 10 : 25 : 18$.

297. Delove nasleđa koje dobijaju Zoran, Dušan i Nikola označimo sa Z, D i N. Zadato je $Z : D = 3 : 2$ i $N : Z - 4 : 5$. Sličnim postupkom kao u prethodnom zadatku dobijemo $Z : D : N = 15 : 10 : 12$. Odavde je $Z = 15k$, $D = 10k$ i $N = 12k$, pri čemu je $Z + D + N = 277500$ dolara. Dalje je: $15k + 10k + 12k = 277500$, pa je $k = 277500 : 37 = 7500$ dolara. Nasledili su: Zoran, $Z = 15k = 15 \cdot 7500 = 112500$ dolara; Dušan, $D = 10k = 10 \cdot 7500 = 75000$; Nikola, $N = 12k = 12 \cdot 7500 = 90000$ dolara.

298. Neka je $\dfrac{ay - bx}{c} = k = \dfrac{cx - az}{b} = \dfrac{bz - cy}{a}$. Odavde dobijamo $ay - bx = kc$, $cx - az = kb$ i $bz - cy = ak$, pa imamo: $\dfrac{y}{b} - \dfrac{x}{a} = \dfrac{c}{ab} \cdot k$, $\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{b}{ac} \cdot k$ i $\dfrac{z}{c} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{a}{bc} \cdot k$. Kada saberemo ove tri jednakosti, na levoj strani zbir je 0, a desnu sredimo: $0 = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{abc} \cdot k$, pa je $k = 0$. Onda je $ay - bx = 0$, $cx - az = 0$ i $bz - cy = 0$, odakle sledi da je: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$, pa je $x : y : z = a : b : c$.

299. Iz date proporcije zaključujemo da je: $\dfrac{a_1}{b_1} = k = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$, pa je $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2, \ldots a_n = kb_n$. Sada računamo: $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = (k^2b_1^2 + k^2b_2^2 + \cdots + k^2b_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = k^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = k^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^2 = (kb_1^2 + kb_2^2 + \cdots + kb_n^2)^2 = (kb_1 \cdot b_1 + kb_2 \cdot b_2 + \cdots + kb_n \cdot b_n)^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$, što se i tvrdi.

300. Neka su druga trojica radnika podelili sumu x dinara. Onda su prva dvojica dobili $\dfrac{2}{5}x$. Odredimo x iz jednačine $x + \dfrac{2}{5}x = 210000$. Sledi $x = 150000$ dinara. Označimo sa a, b, c, d i e sume koje dobijaju radnici. Za prvu dvojicu računamo: $a : b = 2 : 3$ i $a + b = 60000$ dinara. Zbog $a = 2k$ i $b = 3k$ je $5k = 60000$, pa je $k = 12000$ dinara. Prvi je dobio: $a = 2 \cdot 12000 = 24000$ dinara, a drugi $b = 3 \cdot 12000 = 36000$ dinara. Za ostale, iz $c : d : e = 3 : 4 : 5$ i $c + d + e = 150000$ dinara, sličnim postupkom izračunamo: $c = 37500$ dinara, $d = 50000$ dinara i $e = 62500$ dinara.

301. Neka je u prvih šest odeljenja bilo n učenika. Onda je 15% od n broj $0,15n$, koji mora biti celi broj deljiv sa 6. Kako je $20 \cdot 0,15 = 3$, zaključujemo da je n umnožak broja 20 i deljiv sa 6, pritom je veći od 150 i manji od 200. Dakle, $n = 180$. Budući da je $0,15 \cdot 180 = 27$, sledi da je u ostalim deljenjima bilo $180 + 27 = 207$ učenika. U školi je bilo ukupno $180 + 207 = 387$ učenika.

302. Saberimo procente učenika koji su uradili po jedan zadatak: $77,5\% + 67,5\% + 75\% = 220\%$. Učenika ima ukupno 100%, pa ovaj višak od 120% nastao je zbog toga što su neki rešili još jedan zadatak. Saberemo procente učenika koji su rešili po dva zadatka: $55\% + 60\% + 55\% = 170\%$. Ovo je za 50% više od procenta učenika koji su rešili više od jednog zadatka $(170 - 120 = 50)$. Ovaj višak od 50% učenika jesu učenici koji su rešili sva tri zadatka. Pošto njih ima 20, sledi da je kontrolnu vežbu radilo 40 učenika.

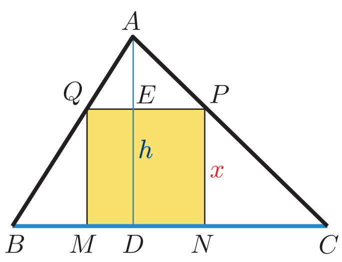
303. U jednoj toni rude ima tačno pola tone čistog metala. U našem slučaju to je 133 tone metala. Metal dobijen iz rude sadrži 5% primesa, pa 133 tome čine 95$ od količine metala dobijenog preradom rude. Neka je to x tona. Onda je $0,95x = 133$, pa je $x = 133 : 0,95 = 140$ tona.

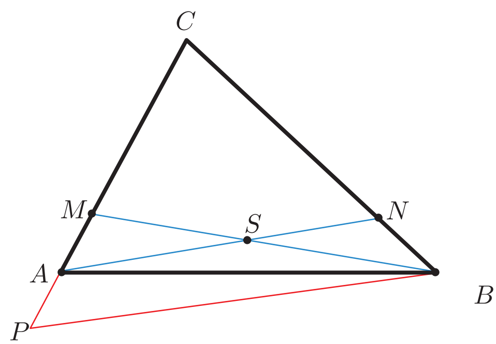
304. U suvom grožđu ima 12% vode, što znači da 88% čini materija koja ne isparava. U 16 kg suvog grožđa to iznosi $0,88 \cdot 16 = 14,08$ kg. Sveže grožđe sadrži 80% vode, pa ovih 14,08 kg predstavlja 20%, odnosno $\frac{1}{5}$ količine svežeg grožđa. Dakle, potrebno je $14,08 \cdot 5 = 70,4$ kg svežeg grožđa.

305. U 100 tona tek iskopanog uglja ima 98% čistog (suvog) uglja, što iznosi 98 tona. Posle upijanja vlage, ovih 98 tona čini 87,5% od ukupne mase x navlaženog uglja. Dakle, posle upijanja vlage bilo je $x = 98 : 0,875 = 112$ tona uglja.

9.3. Sličnost

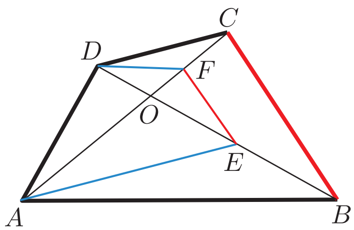
306. Neka je AD data visina i E presečna tačka ove visine sa stranicom PQ kvadrata, slika levo. Ako je x cm dužina stranice kvadrata, tada je $AE = h - x$, pa je na osnovu Talesove teoreme $BC : PQ = AD : AE$, odnosno $a : x = h : (h - x)$. Odavde je $x = \dfrac{ah}{a+h}$ cm.

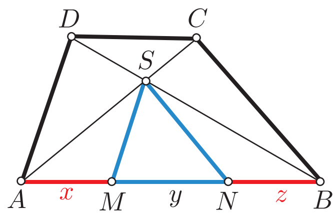




307. Slično **primeru B**. Neka je P tačka iza A u odnosu na C, takva da je $AP = AM$, poslednja slika desno. Onda, na osnovu obrnute Talesove teoreme, utvrdimo da je BP paralelno sa AN. Dalje se dokaže da je AS srednja linija trougla PBM, pa je $BS : SM = 1 : 1$.

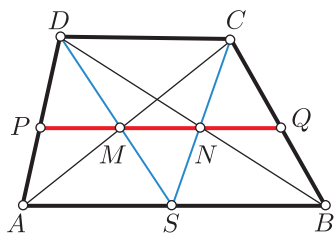
308. Dijagonale BD i AC imaju zajedničku tačku O, slika dole levo. Prema Talesovoj teoremi je $OA : OB = OF : OD$, a takođe $OE : OA = OD : OC$. Kad pomnožimo ove dve proporcije dobićemo $\dfrac{OA}{OB} \cdot \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OF}{OD} \cdot \dfrac{OD}{OC}$, pa posle skraćivanja imamo: $OE : OB = OF : OC$. Odavde, na osnovu obrnute Talesove teoreme, sledi da je $EF \| BC$.





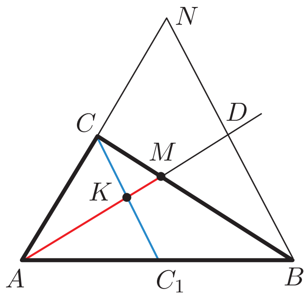
309. Neka je $AM = x$, $MN = y$ i $NB = z$, slika gore desno. Kako je $SN \| BC$, na osnovu Talesove teoreme je $AC : AS = AB : AN$. Odavde je $(AC - AS) : (AB - AN) = AS : AN$, odnosno $SC : NB = AS : AN$ ili $AN : NB = AS : SC$. Slično se dokaže da je i $BM : AM = BS : SD$ (jer je $MS \| AD$). Kako je $AB \| CD$, sledi da je $AS : SC = BS : SD$, što pokazuje da je $AN : NB = BM : AM$, tj. $(x + y) : z = (y + z) : x$. Na osnovu osobina proporcije, odavde je $(x + y + z) : (y + z + x) = z : x$, pa je $z = x$, odnosno $BN = AM$.

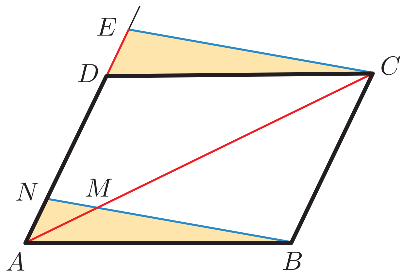
310. Koristimo najpre Talesovu teoremu i osobine proporcija. Dobijamo proporcije: $SM : MD = AS : CD$ i $SN : NC = BS : CD$. Zbog $AS = SB$ je $SM : MD = SN : NC$, pa je $(SM + MD) : (SN + NC) = SM : SN$, odnosno $SD : SC = SM : SN$. Zbog toga, na osnovu obrnute Talesove teoreme, je $MN \| CD$. Treba još dokazati da je $MN = MP = NQ$.



Zbog paralelnosti AB i PQ je $AB : MQ = CA : CM$ i $AS : MN = CA : CM$, pa je $AB : MQ = AS : MN$, odnosno $AB : AS = MQ : MN$. Međutim, $AB : AS = 2 : 1$, pa je $MQ = 2MN$, odnosno: $MN = NQ$. Slično se dokaže i da je $MN = PM$.

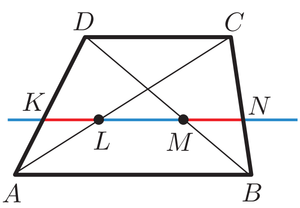
311. Na produžetku duži AC izaberimo tačku N, tako da je C središte duži AN. U trouglu ABN, po konstrukciji, duž CC_1 je srednja linija, pa je CC_1 paralelno sa BN, a četvorougao $BNCC_1$ je trapez. Neka je D tačka u kojoj prava AM seče BN. Prema **primeru C** tačka D je središte duži BN. Sada u trouglu ABN imamo dve težišne linije. To su duži BC i AD koje se seku u tački M, što vidimo na sledećoj slici. Onda je M težište trougla ABN, pa je, prema osobini težišta: $CM : MB = 1 : 2$.

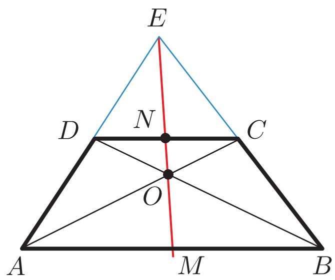




312. Neka je E tačka na produžetku stranice AD, iza D u odnosu na A, takva da je $DE = AN$, slika gore desno. Tada su jednaki uglovi BAN i CDE (sa paralelnim kracima), pa kako je $AB = CD$ (naspramne stranice paralelograma), sledi da su podudarni trouglovi ABN i DCE. Zbog toga je i $\sphericalangle BNA = \sphericalangle CED$. Onda ovi uglovi imaju paralelne krake, pa je CE paralelno sa BN. Po Talesovoj teoremi, tada je $AC : AM = AE : AN$. Kako je $DE = AN$ i $ND = 3AN$, biće $AE = 5AN$. Dakle, $AE : AN = 5 : 1$, pa je i $AC : AM = 5 : 1$. Sledi da je $AM = \frac{1}{5}AC$, što se i tvrdi.

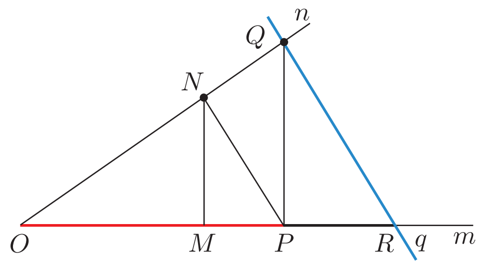
313. Prema sledećoj slici uočavamo proporcije: $KL : CD = AK : AD$ i $MN : CD = BM : BD$. Međutim, $AK : AD = BM : BD$, pa je $KL : CD = MN : CD$. Odavde sledi da je $KL = MN$.

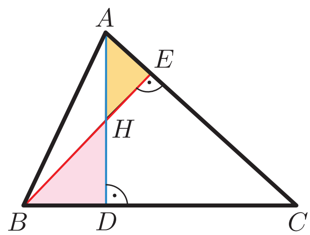




314. Primenimo Talesovu teoremu (vidi sliku gore desno): $EM : EN = AM : DN = BM : CN$, pa je $AM : DN = BM : CN$, ili $\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN}$ (što je isto, samo drugačije zapisano). Iz presecanja dijagonala i duži MN na sličan način zaključimo da je: $\frac{AM}{CN} = \frac{BM}{DN}$. Pomnožimo dve jednakosti s razlomcima: $\frac{AM^2}{CN \cdot DN} = \frac{BM^2}{CN \cdot DN}$. Odavde sledi da je $AM^2 = BM^2$, odnosno $AM = BM$. Slično se dokaže i da je $CN = DN$ (ili se primeni rezultat iz **Primera C**).

315. Paralelne prave omogućavaju primenu Talesove teoreme: $OM : OP = ON : OQ$ i $OP : OR = ON : OQ$. Desne razmere ovih proporcija jednake su, pa je $OM : OP = OP : OR$, odakle je $OP^2 = OM \cdot OR$, što se i tvrdi (sledeća slika).

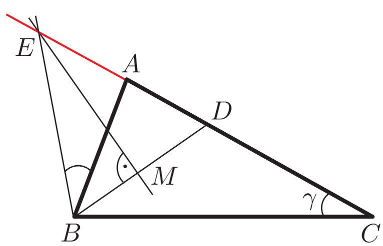


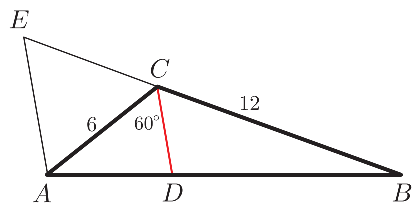


316. Iz $a : b = h_b : h_a$, dobijamo $a : b = 6 : 3$. Slično dobijamo $b : c = 7 : 6$. Dalje, iz $a : b = 42 : 21$ i $b : c = 21 : 18$, dobijamo $a : b : c = 42 : 21 : 18$. Ako traženi trougao postoji, onda je on sličan "trouglu" čije su stranice 42 cm, 21 cm i 18 cm. Međutim, ovakav trougao ne postoji, jer je $21 + 18 < 42$ (nije zadovoljena osnovna nejednakost trougla). Dakle, ne postoji trougao sa datim visinama.

317. Neka su AD i BE visine i H ortocentar, slika desno. Pravougli trouglovi AHE i BHD su slični (oštri uglovi kod H jednaki), pa je $AH : HE = BH : HD$, odakle je $AH \cdot HD = BH \cdot HE$. Slično se dokazuje i za odsečke treće visine. Na dokaz ne utiču vrste uglova trougla ABC.

318. Trougao BDE je jednakokraki, pa je $BE = DE$ i $\sphericalangle EBD = \sphericalangle BDE$, slika dole levo i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$. Ugao BDE je spoljašnji ugao trougla BCD, pa je $\gamma = \sphericalangle BDE - \sphericalangle CBD = \sphericalangle DBE - \sphericalangle ABD = \sphericalangle ABE$. Zbog $\gamma = \sphericalangle ABE$ i zajedničkog ugla kod temena E, slični su trouglovi BCE i ABE. Zbog toga je $BE : CE = AE : BE$. Zbog $BE = DE$ je $DE : CE = AE : DE$ i $DE^2 = AE \cdot CE$.



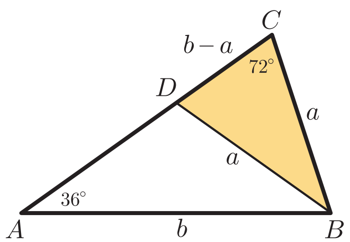


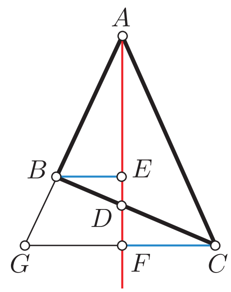
319. Neka je E tačka prave BC, takva da je $AE \| CD$, slika gore desno. Lako se dokaže da je trougao ACE jednakostraničan, a trouglovi BCD i BEA su slični.

Iz $BC : CD = BE : BA$, odnosno $12 : CD = 18 : 6$, dobijemo $CD = 4$ cm.

320. Neka je D tačka u kojoj simetrala ugla ABC seče krak, sledeća slika levo. Kako je $\sphericalangle BAC = 36^\circ$, to su trouglovi ABC i BDC slični, a trouglovi ABD i BCD jednakokraki. Zbog toga je $BC = BD = DA = 6$ cm. Iz proporcije $BC : BA =$

$CD : BC$, odnosno $a : b = (b - a) : a$, dobijamo: $b^2 - 6b = 36$ ili $b^2 - 6b + 9 = 45$. Odavde je $(b - 3)^2 = 9 \cdot 5$, pa je $b - 3 = 3\sqrt{5}$ i konačno $b = (3 + 3\sqrt{5})$ cm.

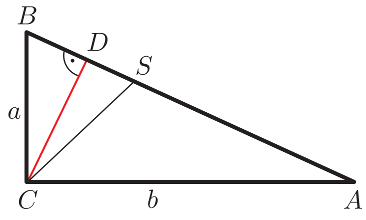


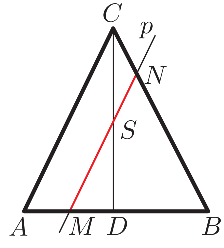


321. Neka je G presečna tačka pravih AB i CF, slika desno. Lako se dokazuje da je $AG = AC$, kao i da su trouglovi BDE i CDF slični, a takođe ABE i AGF. Imamo sledeće proporcije $AE : AF = AB : AG = AB : AC$ i $BD : CD = DE : DF$. Međutim $AB : AC = BD : DC$ (osobina simetrale ugla – vidi **primer C**), pa je $AE : AF = BD : CD$, odnosno $AE : AF = DE : DF$. Iz poslednje proporcije sledi $AE \cdot DF = AF \cdot DE$.

322. Prema osobini simetrale ugla sledi da je $m : n = BS : SA = a : b$, slika dole levo, pa je $a : b = m : n$. Uočimo da su trouglovi BCD i BAC slični, pa je $BC : BD = AB : BC$, odnosno $a : BD = AB : a$. Odavde je $BD = \dfrac{a^2}{AB}$. Slično se dobije $AD = \dfrac{b^2}{AB}$, pa je $BD : AD = \dfrac{a^2}{AB} : \dfrac{b^2}{AB} = a^2 : b^2 = (a : b)^2 = m^2 : n^2$

323. Vidi prethodni zadatak – obrnut postupak. Rezultat je $4 : 5$.

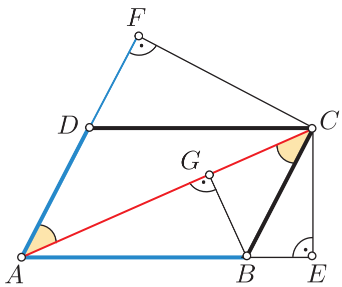


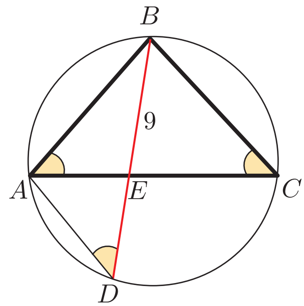


324. Prava p sadrži srednju liniju trogula ACD, pa je $AM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{4}AB$, slika gore desno. Trouglovi ABC i MBN slični su, pa iz $AC : MN = AB : BM$, dobijamo $MN = 9$ cm (jer je $AB : BM = 4 : 3$).

325. Neka je stranica AB prečnik i N presečna tačka polukruga, sa dijagonalom AC. Ugao nad prečnikom je prav, pa je $\sphericalangle ANB = 90°$ i $AN : NC = 9 : 1$. Tačka N je podnožje hipotenuzine visine pravouglog trougla ABC, pa je prema rešenju **zadatka 323** (vidi i **zadatak 322**) odnos stranica pravougaonika $AB : BC = 3 : 1$.

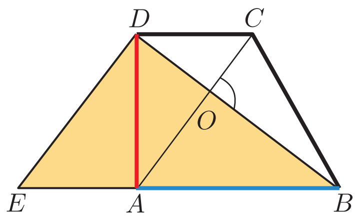
326. Neka je G podnožje normale iz B na AC, sledeća slika levo. Nije teško uveriti se da su pravougli trouglovi AEC i AGB slični, a takođe trouglovi AFC i CGB. Otuda dobijamo proporcije $AC : AE = AB : AG$ i $AC : AF = BC : CG = AD : CG$ (jer je $BC = AD$). Iz proporcija dobijamo: $AB \cdot AE = AC \cdot AG$ i $AD \cdot AF = AC \cdot CG$. Saberemo ove jednakosti: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC \cdot AG + AC \cdot CG = AC(AG + GC) = AC^2$.

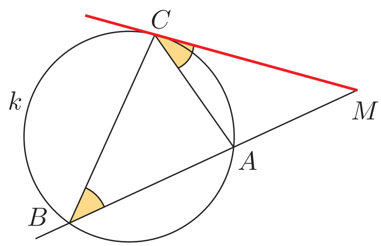




327. Iz $AB = BC$ sledi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB$, slika gore desno. Osim toga nad datom tetivom AB je $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA$, pa je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BDA$. Zbog toga su slični trouglovi ABD i EBA (imaju zajednički ugao kod temena B), a na osnovu toga je $AB : BE = BD : AB$, odnosno $12 : 9 = BD : 12$. Odavde je $BD = 16$.

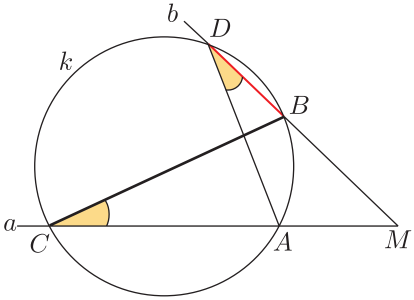
328. Neka je $ABCD$ dati trapez i $\sphericalangle AOB = 90°$, slika levo. Neka je E tačka prave AB, takva da je $DE \| AC$. Tada je trougao EBD pravougli i visina AD trapeza biće hipotenuzina visina trougla EBD. Zbog toga je $AD^2 = EA \cdot AB = CD \cdot AB$, što se i tvrdilo.

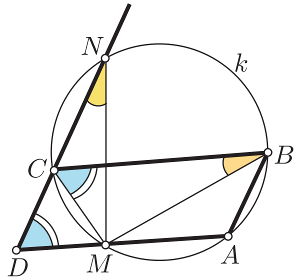




329. Trouglovi MAC i MCB slični su, slika gore desno, jer imaju zajednički ugao kod M i $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MBC$ (tangentni i periferijski ugao nad tetivom AC). Iz sličnosti imamo proporciju: $MC : MB = MA : MC$, pa je $MC^2 = MA \cdot MB = 36$ i $MC = 6$ cm.

330. Slično prethodnom zadatku. Uglovi ACB i ADB su jednaki (nad lukom AB), pa su trouglovi MBC i MAD slični (ugao kod M im je zajednički), sledeća slika levo. Otuda je $MB : MC = MA : MD$, odnosno $3 : 6 = 2 : MD$ i $MD = 4$. Tražena tetiva je $BD = MD - MB = 1$ cm.

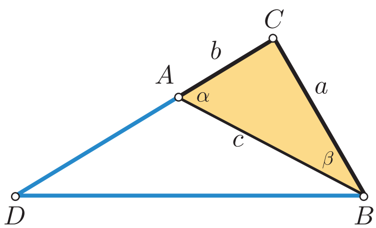


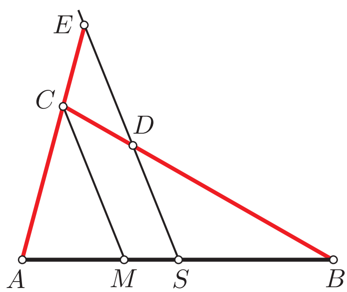


331. Uglovi MBC i MND jednaki su, kao uglovi nad tetivom MC, slika desno. Četvorougao $ABCM$ je tetivni, pa je $\sphericalangle BCM$ suplementan sa $\sphericalangle MAB$. Ugao MDC je susedni uglu DAB paralelograma, pa su ova dva ugla suplementna. Sledi da je $\sphericalangle BCM = \sphericalangle CDM$. Dakle, trouglovi MBC i MND su slični i iz te sličnosti sledi $MB : MC = MN : MD$.

332. Neka je $\sphericalangle BAC = 2\beta$, sledeća slika. Iza A u odnosu na C odredimo tačku D, takvu da je $AD = AB = c$. Tada je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBA = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \beta$. Onda su trouglovi ABC i BDC slični, pa je $BC : AC = CD : BC$, ili $a : b = (b + c) : a$. Odavde sledi tražena jednakost.

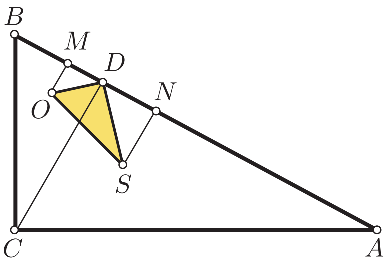
Obrnuto, ako je $a^2 - b^2 = bc$, odnosno $a^2 = b(b + c)$, onda ova jednakost daje proporciju: $a : b = (b + c) : a$ ili, prema slici: $BC : CA = CD : CB$. Odatle zaključujemo da su trouglovi BCA i DCB slični, po prvom stavu sličnosti. Sledi da je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBD = 2\beta$, što se i tvrdilo.

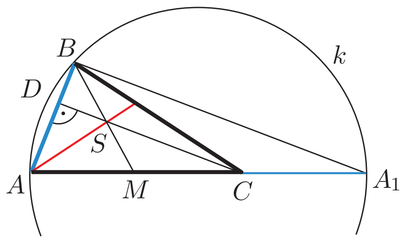




333. Trouglovi AMC i ASE slični su, slika gore desno, pa je $\frac{AE}{AC} = \frac{AS}{AM}$. Iz sličnosti trouglova BMC i BSD dobijamo proporciju: $\frac{BC}{BD} = \frac{BM}{BS}$, gde je S središte stranice AB. Iz osobine simetrale ugla dobijamo: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM}$. Kad pomnožimo dve poslednje proporcije dobićemo $\frac{AC}{BD} = \frac{AM}{BS}$. Zbog $AS = BS$ biće $\frac{AC}{BD} = \frac{AM}{AS}$. Ovu proporciju pomnožimo sa prvom i dobijamo $AE = BD$.

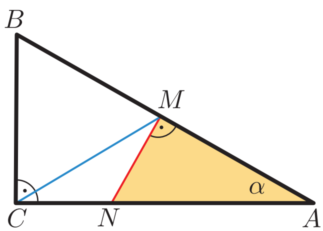
334. Tačke O i S su preseci simetrala uglova, pa je $\sphericalangle ODS = 90^\circ$, sledeća slika. Neka su OM i SN normale na AB. Ove normale su poluprečnici krugova upisanih u trouglove BCD i CAD, koji su slični međusobno, pa je $OM : SN = a : b$. Trouglovi OMD i SND su pravougli jednakokraki, pa su slični i zbog toga je $OD : SD = a : b$. Sada, na osnovu prvog stava sličnosti, sledi da su trouglovi ODS i BCA slični.

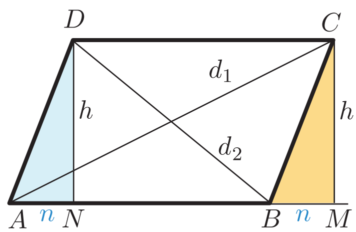




335. Neka je CD data visina, BM data težišna linija, S njihova zajednička tačka, i BA_1 tetiva, poslednja slika. Ugao ABA_1 je prav, kao ugao nad prečnikom, pa je $A_1B \| CD$. Prema Talesovoj teoremi je $MB : MS = MA_1 : MC$, a odavde je $MS : (MB - MS) = MC : (MA_1 - MC)$, odnosno $MS : SB = MC : CA_1$. Međutim, $MC = AM$ i $CA_1 = AB$, pa je $MS : SB = AM : AB$. Odavde sledi da je AS simetrala ugla ACB, prema osobini iz **primera C**.

336. Neka je M središte hipotenuze AB, slika dole levo. Tačka M je, kao što znamo, centar opisanog kruga, pa je $AB = 2CM = 40$ cm. Dalje je $AN^2 = AM^2 + MN^2 = 20^2 + 15^2 = 625$, pa je $AN = 25$ cm. Pravougli trouglovi ABC i ANM su slični (zajednički ugao α), pa je $AN : AM = AB : AC$, odakle je $AC = 32$ cm. Dalje lako izračunamo $BC = 24$ cm.





337. Neka su M i N redom središta kateta BC i AC. U pravouglom trouglu ACM hipotenuza je $AM = t_a$, pa je $t_a^2 = AC^2 + CM^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{4}$. Slično, iz trougla BCN dobijamo jednakost: $t_b^2 = a^2 + \dfrac{b^2}{4}$. Saberemo ove dve jednakosti: $t_a^2 + t_b^2 = \dfrac{5}{4}(a^2 + b^2) = \dfrac{5}{4}c^2$. Kako je $c = 2t_c$, sledi $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

338. Ako je u pitanju pravougaonik, tada je očigledno $d^2 = a^2 + b^2$, pa je $d^2 + d^2 = 2d^2 = 2a^2 + 2b^2$. Neka je $ABCD$ kosougli paralelogram, slika gore desno.

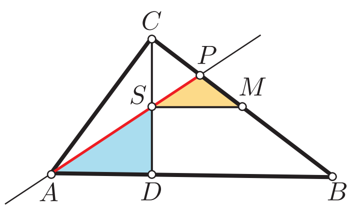
Lako se dokazuje da su trouglovi ADN i BCM podudarni, pa je $AN = n = BM$. Sada primenimo Pitagorinu teoremu na trouglove ACM i BCM. Dobijemo jednakosti $d_1^2-(a+n)^2 = h^2$ i $b^2-n^2 = h^2$, odakle je $d_1^2-(a+n)^2 = b^2-n^2$, odnosno $d_1^2 = a^2+b^2+2an$. Slično, iz trouglova BDN i ADN dobijemo: $d_2^2 = a^2+b^2-2an$. Sabiranjem dve poslednje jednakosti dobijemo: $d_1^2+d_2^2 = 2a^2+2b^2$.

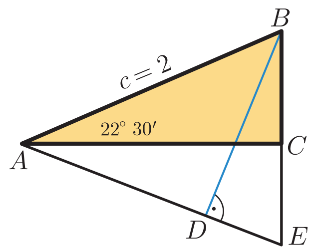
339. Neka je E tačka u kojoj se seku produžeci krakova AD i BC. Tada su trouglovi CDE, ABC, ACE i BDE pravougli. Najpre iz trouglova ACE i BDE dobijamo: $AC^2 = AE^2+CE^2$, tj. $d_1^2 = AE^2+CE^2$ i slično: $d_2^2 = BE^2+DE^2$. Saberemo i biće: $d_1^2+d_2^2 = (AE^2+BE^2)+(CE^2+DE^2) = AB^2+CD^2$ (iz prva dva pravougla trougla).

340. Pođimo od tačne jednakosti $a\cdot b = c\cdot h_c$, odnosno $\dfrac{a^2b^2}{h_c^2} = c^2 = a^2+b^2$. Podelimo ovu jednakost sa a^2b^2 i dobićemo traženu relaciju.

341. Neka je data kateta $BC = a = 6$ cm. Tada je $c^2-b^2 = a^2$, odnosno $(c-b)(c+b) = 36$. Celi brojevi $(c-b)$ i $(c+b)$ moraju biti parni (vidi, na primer, **zadatak 233**a)) i različiti, što je moguće samo u slučaju $c-b = 2$ i $c+b = 18$. Dakle $c = 10$ cm i $b = 8$ cm. Prema **zadatak 322**, ako je CD hipotenuzina visina, tada je $AD : BD = b^2 : a^2 = 16 : 9$.

342. Visinu dobijamo iz $h^2 = 9\cdot 16$, tj. $h = 12$ cm. Neka je S središte visine CD, M središte katete BC i AP tražena duž, slika levo. Iz pravouglog trougla ADS izračunavamo $AS^2 = AD^2+DS^2 = 9^2+6^2 = 117$, pa je $AS = 3\sqrt{13}$. Dalje, iz sličnih trouglova ABP i SMP imamo: $AB : AP = SM : SP$. Neka je $SP = x$. Duž SM je srednja linija trougla BCD, pa je $SM = 8$ cm. Zamenimo u proporciju: $25 : (x+3\sqrt{13}) = 8 : x$. Odavde je $x = \dfrac{24}{17}\sqrt{13}$, pa je $AP = \dfrac{75}{17}\sqrt{13}$ cm.





343. Polazimo od Košijeve nejednakosti $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. U pravouglom trouglu je $a^2+b^2 = c^2$, pa imamo $2ab \leqslant c^2$, a odavde $c^2+2ab \leqslant 2c^2$, odnosno $a^2+b^2+2ab \leqslant 2c^2$ ili $(a+b)^2 \leqslant 2c^2$. Kako su $a+b$ i c pozitivni brojevi sledi $a+b \leqslant c\sqrt{2}$. Prema polaznoj nejednakosti, znak "=" važi za $a = b$, tj. za jednakokraki pravougli trougao.

344. Neka je ABC dati trougao i $AB = 2$ cm, slika desno. Odredimo tačku E, takvu da je C središte duži BE. Trougao ACE je podudaran datom trouglu, pa je $\sphericalangle BAE = 45^\circ$. Visina BD na AE određuje jednakokraki pravougli trougao ABD, pa je $BD = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ cm. Tada je $DE = 2-\sqrt{2}$, pa iz pravouglog trougla BDE

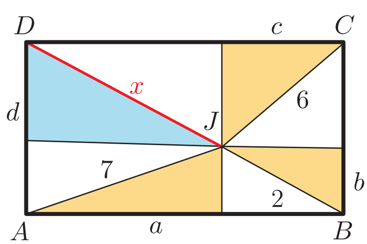
računamo: $BE^2 = BD^2 + DE^2 = 2 + (2-\sqrt{2})^2 = 4(2-\sqrt{2})$, pa je $BE = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$, a kateta datog trougla $BC = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm. Sada izračunamo $AC = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ cm.

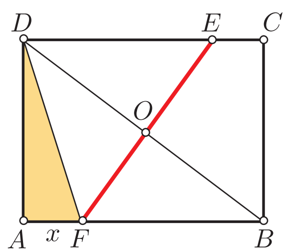
345. U svakom trenutku (osim ako neki brod prolazi kroz tačku O), položaji brodova i tačka O su temena pravouglog trougla. Tada je $|OA| = |300 - 40x|$ i $|OB| = |100 - 30x|$, pa je $|AB|^2 = (300-40x)^2 + (100-30x)^2 = 2500(x^2 - 12x + 36 + 4) = 2500((x-6)^2 + 4)$. Zaključujemo da je rastojanje od A do B najkraće za $x = 6$, tj. posle 6 časova i iznosi $\sqrt{2500 \cdot 4} = 100$ km.

346. Vidi rešenje **primera C**. Iz jednakosti $(c+h)^2 = (a+b)^2 + h^2$ sledi da je $(c+h)^2 > (a+b)^2$, pa kako su brojevi $(c+h)$ i $(a+b)$ pozitivni, dobijamo traženu nejednakost: $c + h > a + b$.

347. Prema rešenju **zadatka 322**, podnožje N normale BN na dijagonalu AC, deli dijagonalu na sledeći način: $AN : NC = AB^2 : BC^2 = 2 : 1$. Dakle $NC = \frac{1}{3}AC$. Slično dokazujemo da je $AM = \frac{1}{3}AC$, gde je DM druga normala na dijagonalu.

348. Na slici levo jablan je označen slovom J. Primenjujući Pitagorinu teoremu na pravougle trouglove koji su obojeni na slici, dobijamo sledeći niz jednakosti: $x^2 = a^2 + d^2$, $d^2 = 36 - c^2$, $a^2 = 49 - b^2$ i $c^2 = 4 - b^2$. Polazeći od prve jednakosti dobijamo $x^2 = 49 - b^2 + 36 - c^2 = 49 - b^2 + 36 - 4 + b^2 = 81$, pa je $x = 9$. Jablan je od temena D udaljen 9 m.

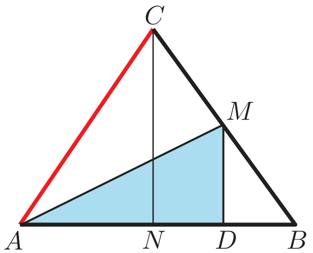


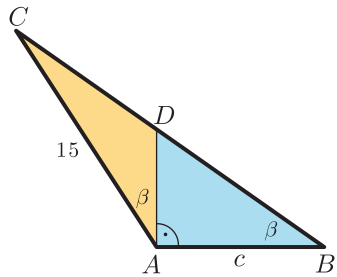


349. Neka je presavijanje izvršeno po duži EF, slika gore desno. Tada je prava EF simetrala dijagonale BD i ugao BOF je prav. Kako je $BD = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ cm, to je $BO = 10$ cm. Neka je $AF = x$, tada je $FB = 16 - x$. Trougao BFD je jednakokraki, pa je $DF = FB = 16 - x$. Sada iz pravouglog trougla ADF dobijamo jednačinu: $x^2 = (16-x)^2 - 12^2$. Odavde je $x = 3,5$ cm, pa je $FB = 12,5$ cm. Na kraju, iz trougla BOF dobijamo: $OF^2 = FB^2 - BO^2 = 12,5^2 - 10^2 = 56,25$, odnosno $OF = 7,5$ cm. Tražena dužina duži je $EF = 15$ cm.

350. Neka je AB osnovica, CN visina koja odgovara osnovici, AM data težišna linija i D središte duži BN, sledeća slika. Duž MD je srednja linija trougla BCN, pa $MD \perp AB$ i $MD = \frac{1}{2}CN$, a duž $AD = \frac{3}{4}AB = 6\sqrt{2}$ cm. Sada iz pravouglog trougla ADM računamo: $MD^2 = AM^2 - AD^2 = 100 - 72 = 28$, pa je

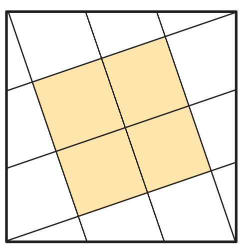
$MD = 2\sqrt{7}$ cm i $CN = 4\sqrt{7}$ cm. Krak AC računamo iz pravouglog trougla ACN, i to: $AC^2 = AN^2 + CN^2 = 32 + 112 = 144$, što znači da je $AC = 12$ cm.

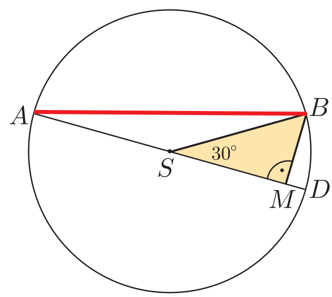




351. Neka je D tačka stranice BC, takva da je $\sphericalangle BAD = 90^\circ$. Tada je $\sphericalangle CAD = \alpha - 90^\circ = \beta$, pa su trouglovi ABC i DAC slični i $BC : AC = AC : CD$, odnosno: $20 : 15 = 15 : CD$, slika gore desno. Odavde je $CD = \frac{45}{4}$, pa je $BD = BC - CD = \frac{35}{4}$. Vraćamo se na slične trouglove: $BC : AB = AC : AD$, odnosno $20 : c = 15 : AD$. Odavde dobijamo $AD = \frac{3}{4}c$. Konačno iz pravouglog trougla ABD imamo vezu: $AB^2 + AD^2 = BD^2$, odakle je $c^2 + \frac{9}{16}c^2 = \frac{1225}{4}$, pa je $c^2 = 49$ i $c = 7$ cm.

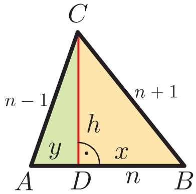
352. Kvadrat površine 10 dm^2 ima ivicu $a = \sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$. Drugim rečima, ako načinimo pravougaonik od tri pločice ivice 1 dm, dijagonala pravougaonika će biti ivica velikog kvadrata. Na slici dole vidimo kako je kvadrat popločan, pri čemu su samo četiri pločice ostale cele.

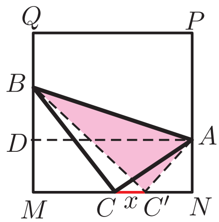


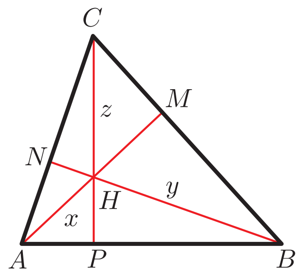


353. Neka je AD prečnik, S centar kruga i M podnožje normale iz B na AD. Kako je veći periferijski ugao ASB jednak 210°, to je $\sphericalangle BSM = 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$. Dakle: $SB = r = 6$ cm, $BM = \frac{r}{2} = 3$ cm i $MS = 3\sqrt{3}$ cm. Sada iz pravouglog trougla ABM računamo: $AB^2 = BM^2 + AM^2 = 9 + (6 + 3\sqrt{3})^2 = 9 + 36 + 36\sqrt{3} + 27 = 72 + 36\sqrt{3} = 18(4 + 2\sqrt{3}) = 9 \cdot 2(3 + 2\sqrt{3} + 1) = 9 \cdot 2(\sqrt{3} + 1)^2$, pa je $AB = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$ cm.

354. Neka je $h = CD$ visina koja odgovara srednjoj po veličini stranici AB i neka su x i y odsečci na koje tačka D deli stranicu AB, slika levo. Dužine stranica AC, AB, BC označimo redom sa $n-1$, n, $n+1$. Tada je $x+y=n$. Iz pravouglih trouglova ACD i BCD je $(n-1)^2 - y^2 = h^2$ i $(n+1)^2 - x^2 = h^2$, odakle dobijamo: $(n-1)^2 - y^2 = (n+1)^2 - x^2$. Poslednju jednakost možemo napisati kao $x^2 - y^2 = (n+1)^2 - (n-1)^2$, a odavde je: $(x-y)(x+y) = 4n$. Kako $x+y=n$, biće: $(x-y)\cdot n = 4n$, odakle dobijamo traženu relaciju: $x - y = 4$.





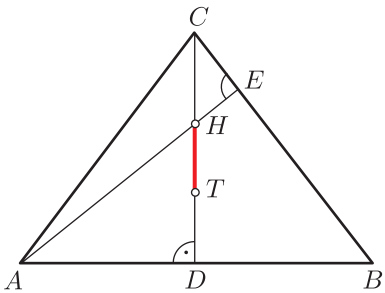


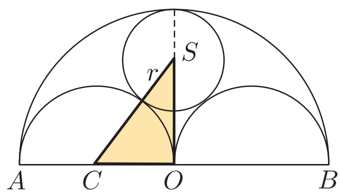
355. Pretpostavimo da tačku C treba pomeriti u položaj C', da bi trougao ABC', slika u sredini, bio pravougli. Neka je $x = CC'$ duž koju treba odrediti. Neka je, dalje, D središte duži MB. Tada je $DB = \dfrac{1}{3} = AN$ i $MC = NC = \dfrac{1}{2}$. Uočimo pravougle trouglove: ADB, ANC', MBC' i ABC'. Iz njih izračunavamo: $AB^2 = 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$, $AC'^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2$ i $BC'^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} + x\right)^2$ U trouglu ABC' je AB hipotenuza, pa imamo uslov: $AC'^2 + BC'^2 = AB^2$. Koristeći prethodne jednakosti dobićemo: $\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{4} - x + x^2 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{4} + x + x^2 = \dfrac{10}{9}$, a odavde je $2x^2 = \dfrac{1}{18}$ odnosno $x^2 = \dfrac{1}{36}$. Sledi da je $x = \dfrac{1}{6}$, a može biti i $x = -\dfrac{1}{6}$, što znači da tačku C treba pomeriti levo ili desno za $\dfrac{1}{6}$.

356. Uočimo pravougle trouglove BCN i CHN, slika desno. Iz prvog izračunamo: $a^2 = h_b^2 + CN^2$, a u drugom: $CN^2 = z^2 - NH^2 = z^2 - (h_b - y)^2$. Zamenimo CN^2 pa dobijemo: $a^2 = h_b^2 + z^2 - (h_b - y)^2 = z^2 - y^2 + 2yh_b$. Slično, koristeći se trouglovima ACP i AHP, dobijamo: $b^2 = x^2 - z^2 + 2zh_c$, a iz trouglova ABM i BHM izračunamo: $c^2 = y^2 - x^2 + 2xh_a$. Zbir ove tri jednakosti predstavlja traženu relaciju.

357. Iz pravouglog trougla BCD izračunamo visinu koja odgovara osnovici: $CD^2 = BC^2 - BD^2 = 20^2 - 12^2 = 256$, tj. $CD = 16$ cm, sledeća slika levo. Težište T deli CD u razmeri $2:1$, pa je $CT = \dfrac{32}{3}$ cm. Da bismo izračunali CH, treba nam duž CE. Stoga najpre iz $AB \cdot CD = BC \cdot AE$, tj. iz $24 \cdot 16 = 20 \cdot AE$, dobijemo visinu na krak: $AE = \dfrac{96}{5}$. Dalje, iz pravouglog trougla ACE računamo:

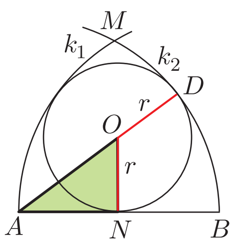
$CE^2 = AC^2 - AE^2 = 20^2 - \left(\frac{96}{5}\right)^2$. Odavde je $CE = \frac{28}{5}$. Primetimo da su trouglovi CHE i CBD slični, i da je $CE : CH = CD : BC$, odnosno $\frac{28}{5} : CH = 16 : 20$. Odavde je $CH = 7$ cm. Traženo rastojanje je $HT = CT - CH = \frac{32}{3} - 7 = \frac{11}{3}$ cm.

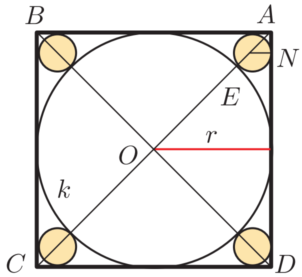


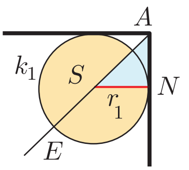


358. Neka je tačka S centar i r poluprečnik kruga koji dodiruje tri data polukruga na opisani način i neka je tačka C centar jednog od upisanih polukrugova. Tada je $SC = r + 3$ i $OS = 6 - r$. Primenimo Pitagorinu teoremu na pravougli trougao COS, poslednja slika. Dobijamo jednačinu: $(r+3)^2 = 3^2 + (6-r)^2$. Rešenje ove jednačine je $r = 2$ cm.

359. Neka je O centar upisanog kruga, slika levo. Dodirna tačka D ovog kruga i luka BM mora pripadati pravoj AO. Neka je N dodirna tačka upisanog kruga i date duži. Trougao ANO je pravougli, sa katetama r i $\frac{AB}{2} = 4$ cm i hipotenuzom $OA = AB - r = 8 - r$, $(AD = AB)$. Primenimo Pitagorinu teoremu: $(8-r)^2 - r^2 = 4^2$. Odavde je $r = 3$ cm.







360. Poluprečnik kruga k je $r = \frac{a}{2}$, slika u sredini. Prema slici desno, za izračunavanje poluprečnika r_1 kruga k_1, odredićemo duž AS iz pravouglog trougla ASN: $AS = r_1\sqrt{2}$. Otuda je $AE = r_1\sqrt{2} + r_1$. Prema srednjoj slici je $AE = OA - OE$, pa je $AE = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}$. Sada imamo: $r_1(\sqrt{2}+1) = \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$. Pomnožimo ovu jednakost sa $(\sqrt{2}-1)$ i dobijemo: $r_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)^2$. To je približno $0,08a$.

9.4. Mnogougao

361. Mnogougao je imao n stranica, a posle povećanja tog broja imao je $2n$ stranica. Tada važi jednakost: $\frac{2n(2n-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 1998$. Sređivanjem dobijamo: $3n(n-1) = 3996$, odnosno: $n(n-1) = 1332 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 36 \cdot 37$. Zaključujemo da je $n = 37$, pa je $2n = 74$. Zbir unutrašnjih uglova prvobitnog mnogougla je $S_{37} = 35 \cdot 180^\circ$, a drugog $S_{74} = 72 \cdot 180^\circ$. Zbir unutrašnjih uglova povećao se za $37 \cdot 180^\circ = 6660^\circ$.

362. Treba da važi uslov: $\frac{n(n-3)}{2} - n = 2016$, koji se svodi na jednakost: $n(n-5) = 4032 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Vidimo da se može dobiti $4032 = 64 \cdot 63 = 56 \cdot 72 = \cdots$ Nije moguće načiniti proizvod dva broja koji se razlikuju za 5. Dakle, traženi mnogougao ne postoji.

363. Postavljen je uslov: $\frac{(n+5)(n+5-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 45$, koji kada se sredi daje jednačinu $10n = 80$, pa je $N = 8$. Prvobitni mnogougao imao je 8 stranica.

364. Po uslovu je $(n-2) \cdot 180 \cdot \frac{n(n-3)}{2} = 97200$. Sređivanjem dobijamo: $n(n-2)(n-3) = 1080 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3) = 12 \cdot 10 \cdot 9 = 12 \cdot (12-2) \cdot (12-3)$. Dakle, $n = 12$. Toliko stranica ima ovaj mnogougao.

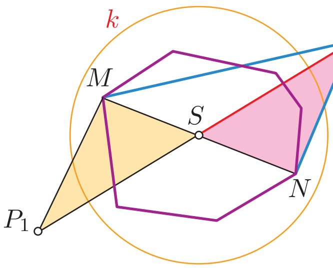
365. a) Iz $\frac{n(n-3)}{2} = 1710$ dobijamo: $n(n-3) = 3420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 57 = 60 \cdot 57 = 60 \cdot (60-3)$, pa mnogougao ima $n = 60$ stranica.

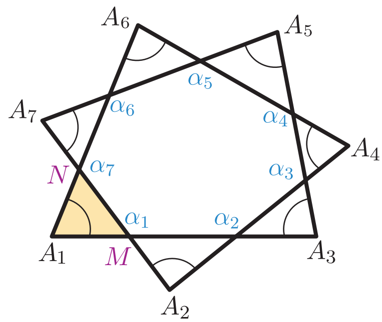
b) Slično prethodnom dobijamo: $n \cdot (n-3) = 4004 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 91 \cdot 88 = 91 \cdot (91-3)$, pa je $n = 91$.

c) Iz $n(n-3) = 4034$ ne može za n da se dobije rešenje prirodni broj. Takav mnogougao ne postoji.

366. Izaberimo na mnogouglu tačke M i N, tako da ove tačke polove obim mnogougla. Konstruišimo krug k poluprečnika 25 mm, kome je centar središte S duži MN. Dokažimo da krug k pokriva celi mnogougao. Stoga, pretpostavimo da postoji tačka P koja pripada mnogouglu, a leži van kruga k, sledeća slika levo. Spojimo P sa M, N i S. Kako je P van kruga, biće $PS > 25$ mm, a $MP+NP$ manje je od polovine obima mnogougla, t.j. $MP + NP \leqslant 5$ cm, jer tačka P pripada polovini mnogougla. Neka je P_1 tačka takva da je S središte duži PP_1. Očigledno su trouglovi SNP i SMP_1 podudarni i $MP_1 = NP$. Za trougao MPP_1 važi nejednakost: $MP+MP_1 > PP_1$, odakle je $MP + NP > 5$ cm (jer je $MP_1 = NP$ i PP_1 veće od prečnika kruga k). Dobijamo dva oprečna uslova: $MP+NP > 5$ i $MP+NP \leqslant 5$. Ova protivrečnost nastala je zbog pogrešne pretpostavke da postoji tačka P mnogougla van kruga k. Time je dokazano tvrđenje da krug k poluprečnika 25 mm pokriva dati mnogougao.

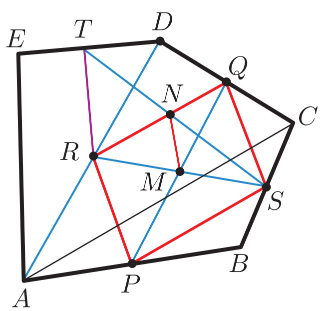
367. Kada bismo zvezdastom mnogouglu odsekli krake, ostao bi običan sedmougao sa unutrašnjim uglovima: α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 i α_7. Znamo izračunati zbir: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$. Obratimo pažnju na trougao AMN, obojen na sledećoj slici desno. Njegovi unutrašnji uglovi su

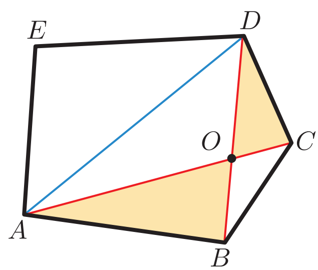




$\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle M$ i $\sphericalangle N$, a uglovi α_1 i α_7 su mu spoljašnji. Po poznatoj osobini spoljašnjih uglova u trouglu, važi: $\alpha_1 = \sphericalangle A_1 + \sphericalangle N$ i $\alpha_7 = \sphericalangle A_1 + \sphericalangle M$. Odavde je: $\alpha_1 + \alpha_7 = \sphericalangle A_1 + (\sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle A_1) = \sphericalangle A_1 + 180^\circ$ (u zagradi je zbir unutrašnjih uglova trougla A_1MN. Dakle: $\alpha_1 + \alpha_7 = \sphericalangle A_1 + 180^\circ$. Sličnim razmatranjima dobijemo: $\alpha_1 + \alpha_2 = \sphericalangle A_2 + 180^\circ$, $\alpha_2 + \alpha_3 = \sphericalangle A_3 + 180^\circ$, $\alpha_3 + \alpha_4 = \sphericalangle A_4 + 180^\circ$, $\alpha_4 + \alpha_5 = \sphericalangle A_5 + 180^\circ$, $\alpha_5 + \alpha_6 = \sphericalangle A_6 + 180^\circ$ i $\alpha_6 + \alpha_7 = \sphericalangle A_7 + 180^\circ$. Kada saberemo ovih sedam jednakosti, dobijamo: $2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) = (\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2 + \sphericalangle A_3 + \sphericalangle A_4 + \sphericalangle A_5 + \sphericalangle A_6 + \sphericalangle A_7) + 7 \cdot 180^\circ$. U prvoj zagradi je zbir unutrašnjih uglova običnog sedmougla: $S_7 = 900^\circ$, a u drugoj traženi zbir S. Onda iz $2 \cdot 900^\circ = S + 1260^\circ$, dobijamo $S = 540^\circ$.

368. Označimo sa R središte duži AD, pa uočimo četvorougao $PSQR$, slika dole levo. Duž PS je srednja linija trougla ABC, pa je paralelna sa AC i jednaka polovini duži AC. Duž QR takođe je paralelna sa AC i jednaka polovini duži AC, jer je srednja linija trougla ACD. Dakle, $PSQR$ je paralelogram i njegove dijagonale se polove. Dakle, tačka M je središte i duži RD. Dalje, uočavamo da je duž RT srednja linija trougla ADE, pa je $RT = \dfrac{1}{2}AE = 2$ cm. Međutim, MN je srednja linija trougla RST, pa je $MN = \dfrac{1}{2}RT = 1$ cm.

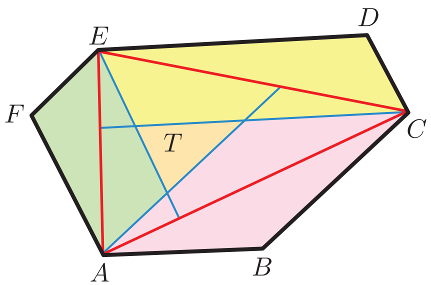


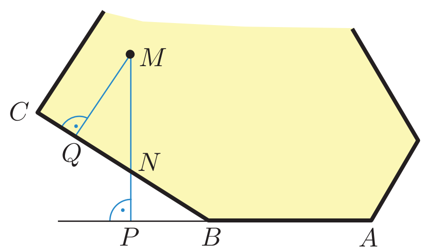


369. Uočimo četvorougao $ABCD$. Njegove dijagonale AC i BD seku se u tački O, slika desno. Primenimo nejednakosti trougla na trouglove ABO i CDO. Dobijemo: $AO + OB > AB$ i $DO + OC > CD$. Saberemo ove dve nejednakosti i uzimajući u obzir da je $AO+OC=AC$ i $DO+OB=BD$, dobijamo $AC+BD>AB+CD$. Pritom, AC i BD su dijagonale, a AB i CD stranice petougla. Postupajući slično i sa četvorouglovima $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$ i $EABC$, dobićemo još sledeće nejednakosti: $BD+CE>BC+DE$, $AD+CE>AE+CD$, $AD+BE>AB+DE$ i $AC+BE>BC+AE$. Saberemo ovih pet nejednakosti i podelimo sa 2, pa dobijemo: $AC+BD+CE+DA+EB>AB+BC+CD+DE+EA$.

370. Označimo površinu datog šestougla sa P_1. Kroz tačke A, C, E konstruišemo prave koje su, redom, paralelne stranicama BC, DE, FA, slika dole levo. Ove paralele određuju trougao T površine P_2 i tri paralelograma. Dužine stranica ovog trougla jednake su razlikama dužina paralelnih stranica šestougla. U slučaju da neki par paralelnih stranica ima jednake dužine, trougao T se transformiše u tačku ili duž i $P_2=0$. Dijagonale AC, CE i EA polove dobijene paralelograme, pa je površina P trougla ACE: $P=P_2+\dfrac{P_1-P_2}{2}=\dfrac{P_1+P_2}{2}$, gde je P_1-P_2 zbir površina triju paralelograma.

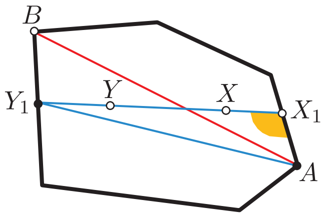
Slično se dokazuje da prave kroz B, D, F, paralelne sa AF, BC, DE, određuju tri paralelograma i trougao podudaran sa T. Takođe je i površina trougla BDF jednaka $\dfrac{P_1+P_2}{2}$.

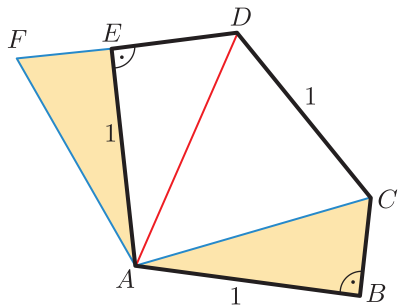




371. Neka je M unutrašnja tačka mnogougla i AB stranica koja je najbliža tački M (normala iz M na AB najkraća od svih normala iz M na stranice). Dokazaćemo da je podnožje P normale iz M na AB unutrašnja tačka duži AB. Pretpostavimo da P nije na duži AB, već je na produžetku AB, kao što je prikazano na slici gore desno. Tada duž MP sa susednom stranicom BC ima zajedničku tačku, recimo N. Onda je $MN<MP$. Neka je Q podnožje normale iz P na stranicu BC. Trougao MNQ je pravougli sa hipotenuzom MN, pa je $MQ<MN$, a otuda sledi da je $MQ<MP$. Ovo nije moguće jer je MP najkraće rastojanje od tačke M do stranica. Dakle, tačka P ne može biti van duži AB.

372. Tačke X i Y ne mogu biti unutrašnje tačke mnogougla, jer ako su X_1 i Y_1 presečne tačke prave XY sa stranicama mnogougla, onda je jasno da je $X_1Y_1>XY$, slika dole levo. Pretpostavimo da tačka X_1 nije teme mnogougla. Tada bar jedan od uglova koje prava XY gradi sa stranicom kojoj pripada X_1, nije oštar. Neka je to $\sphericalangle AX_1Y_1$. Ovaj ugao je najveći u trouglu AX_1Y_1, pa je AY_1 najduža stranica tog trougla. Dakle, $Y_1A\geqslant X_1Y_1$. Prema tome, tačka X_1 ne može biti unutrašnja tačka stranice, već je teme mnogougla. Sličnim postupkom dokažemo da i tačka Y_1 mora biti teme mnogougla.

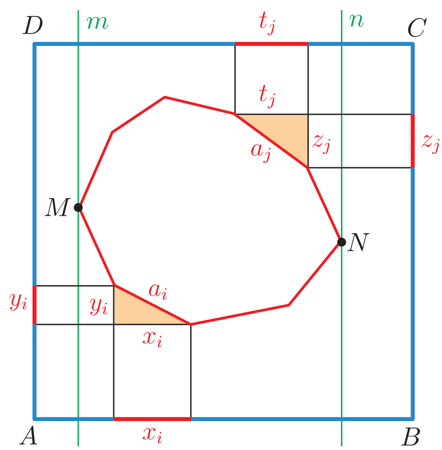




373. Sedmougao ima $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ dijagonala. Ako među njima postoje dve koje su paralelne, onda je tvrđenje dokazano, jer je ugao između njih 0°. Ako nema paralelnih, izabraćemo neku tačku O van mnogougla. Kroz O postavimo 14 pravih, od kojih je svaka paralelna jednoj od 14 dijagonala. Ovih 14 pravih određuje 28 uglova sa zajedničkim temenom O i disjunktnim unutrašnjostima. Njihov zbir je pun ugao, 360°. Ako od ovih 28 uglova ni jedan ne bi bio manji od 13°, onda bi njihov zbir bio veći ili jednak $28 \cdot 13 = 364^\circ$, što nije moguće. Dakle, mora bar jedan biti manji od 13°.

374. Produžimo DE preko E do tačke F, tako da je $EF = BC$. Tada su pravougli trouglovi ABC i AEF podudarni, pa je $AF = AC$ i $DF = 1$. Sledi da su podudarni i trouglovi ACD i AFD (po stavu SSS). Onda je površina petougla $ABCDE$ jednaka dvostrukoj površini trougla ADF, slika gore desno: $P = 2 \cdot \frac{1}{2} DF \cdot AE = 1$.

375. Neka su M i N temena mnogougla, takva da traka određena pravim m i n, koje prolaze kroz M i N paralelne su stranicama AD i BC pokriva ceo mnogougao (slika desno). Neka je a_i jedna stranica "donje" izlomljene linije datog mnogougla, između M i N, a x_i i y_i normalne projekcije duži a_i na stranice AB i AD. Neka je, zatim, a_j jedna stranica gornje izlomljene linije MN, a z_j i t_j normalne projekcije duži a_j na stranice BC i CD. Iz obojenih pravouglih trouglova računamo: $a_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ i $a_j^2 = z_j^2 + t_j^2$. Uzimajući u obzir sve stranice mnogougla dobija se jednakost $\Sigma a_i^2 = \Sigma x_i^2 + \Sigma y_i^2 + \Sigma z_i^2 + \Sigma t_i^2$. Kako su sve duži x_i,



y_i, z_i, t_i manje od 1, to je $x_i^2 < x_i$, $y_i^2 < y_i$, $z_i^2 < z_i$ i $t_i^2 < t_i$, pa je $\Sigma a_i^2 < \Sigma x_i + \Sigma y_i + \Sigma z_i + \Sigma t_i = 1+1+1+1 = 4$. (Mnogougao je ceo u kvadratu, pa je $\Sigma a_i < AB = 1$, $\Sigma y_i < AD = 1$ itd.)

376. Spoljašni ugao je $\beta_n = 13°20' = 13\frac{1}{3}° = \frac{40°}{3}$. Kako je $\beta_n = \frac{360°}{n}$, biće $\frac{40}{3} = \frac{360}{n}$. Odavde je $n = 27$, pa mnogougao ima $\frac{27 \cdot 24}{2} = 324$ dijagonale.

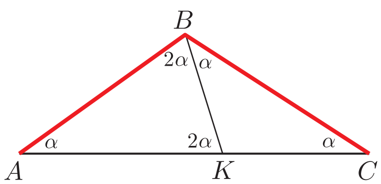
377. Iz $\frac{n(n-3)}{2} + n = 153$, dobijamo $n(n-1) = 2 \cdot 153 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17 = 18 \cdot 17 = 18 \cdot (18-1)$, pa je $n = 18$. Unutrašnji ugao je $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \frac{16 \cdot 180°}{18} = 160°$.

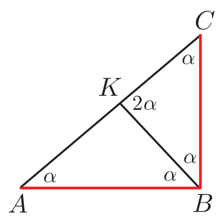
378. Iz datog broja dijagonala računamo: $\frac{n(n-3)}{2} = 252$, odakle je $n(n-3) = 2 \cdot 252 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 24 \cdot 21 = 24 \cdot (24-3)$. Mnogougao ima 24 stranice, pa mu je obim $O = 24 \cdot 10 = 240$ cm.

379. Ako su $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ i $\alpha_1 = \frac{(m-2) \cdot 180°}{n}$, onda je po uslovu: $\alpha = 1,5\alpha_1$, odnosno $\frac{(n-2) \cdot 180}{n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-2) \cdot 180}{m}$. Sređivanjem dobijemo $2mn - 4m = 3mn - 6n$, odnosno: $mn - 6n + 4m = 0$. Odavde je $mn - 6n + 4m - 24 = -24$ ili $(n+4)(6-m) = 24$. Očigledno da je $m \in \{2, 3, 4, 5\}$, pa su odgovarajuće vrednosti za n, redom 2, 4, 8, 20. Međutim, mnogougao može imati najmanje 3 stranice, pa su rešenja zadatka: $n = 4$, $m = 3$ ili $n = 8$. $m = 4$ ili $n = 20$, $m = 5$.

380. Razlikujemo dva slučaja.

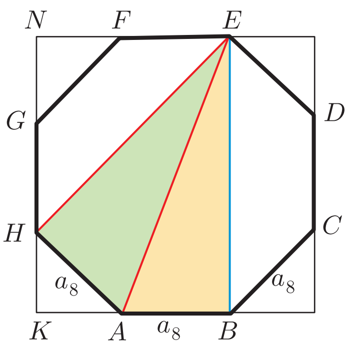
a) Neka je $AB = AK$, leva slika. Onda je i $BK = CK$. Označimo sa α ugao BAC. Onda su ostali uglovi jednakokrakih trouglova označenih kao na slici. U trouglu ABC je: $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$, pa je $\alpha = 36°$. Tada je ugao mnogougla: $\sphericalangle ABC = 3 \cdot 36° = 108°$, a to je unutrašnji ugao pravilnog petougla. Dakle, $n = 5$.

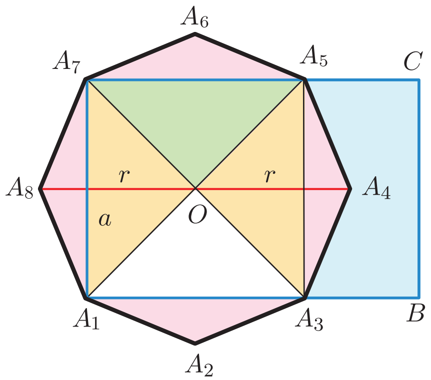




b) Postupajući slično kao u slučaju a), ako je K određeno tako da je $AK = BK$ i $CK = BK$, slika desno, dobijemo da je $\alpha + \alpha + 2\alpha = 180°$. Dakle, $\alpha = 45°$, pa je ugao mnogougla $\beta = 90°$. Traženi mnogougao je kvadrat (sa četiri stranice).

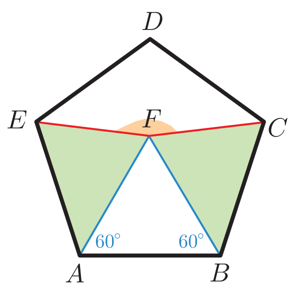
381. Prema sledećoj slici levo dati trougao AEH podudaran je trouglu AEB po stavu SSS. ($HA = AB = a_8$, $AE = AE$ i $BE = a_8(\sqrt{2}+1) = HE = a$, gde je a stranica kvadrata $KLMN$, iz koga je isečen osmougao.) Znamo da je površina osmougla $P = 2a_8^2(\sqrt{2}+1)$. Površina trougla AEH jednaka je površini trougla EAB, a to je: $P_1 = \frac{1}{2}AB \cdot BE = \frac{1}{2}a_8 \cdot a_8(\sqrt{2}+1) = \frac{1}{4}2a_8^2(\sqrt{2}+1)$. Dakle, $P_1 = \frac{1}{4}P_8$, pa trougao AEH pokriva četvrtinu osmougla. (Na primer: $BE = LM = LC + CD + DM = \frac{a_8\sqrt{2}}{2} + a_8 + a_8\frac{\sqrt{2}}{2} = a_8(\sqrt{2}+1)$.)

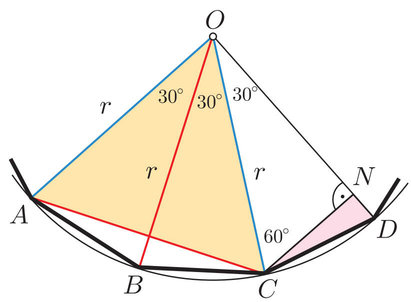




382. Prema slici gore desno, tražena površina plavo obojenog dela pravougaonika A_1BCA_7 jednaka je zbiru površina crveno obojenih jednakokrakih trouglova (tri trougla). Površina jednog od ovih trouglova je razlika površine deltoida (recimo: $OA_1A_8A_7$) i pravouglog jednakokrakog trougla (OA_1A_7), čije su katete poluprečnici opisanog kruga. Dakle, $P_\triangle = \frac{1}{2}OA_8 \cdot A_1A_7 - \frac{1}{2}OA_1 \cdot OA_7 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18(\sqrt{2}-1)\ \mathrm{cm}^2$. Tražena površina je tri puta veća: $P = 54(\sqrt{2}-1)\ \mathrm{cm}^2$.

383. Duži BF i AF jednake su stranici pravilnog petougla, pa su trouglovi AEF i BCF jednakokraki. Unutrašnji ugao pravilnog petougla je 108°, pa je $\sphericalangle EAF = 180^\circ - 60^\circ = 48^\circ = \sphericalangle CBF$ Sledi da je $\sphericalangle AFE = 66^\circ = \sphericalangle BFC$, slika dole levo. Onda je traženi ugao: $\sphericalangle EFC = 360^\circ - 66^\circ - 60^\circ - 66^\circ = 168^\circ$.





384. Pravilni dvanaestougao možemo podeliti na šest deltoida koje formiraju dva susedna karakteristična trougla, kao što je deltoid $OABC$ na slici gore desno. Uglovi trougla OAC su po 60°, pa je OAC jednakostranični trougao i $AC = r$.

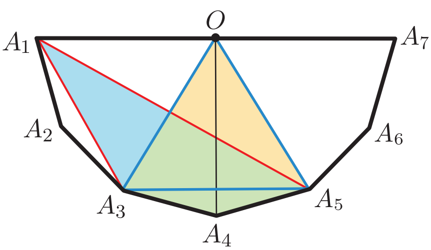
I druga dijagonala je $OB = r$, pa je površina pravilnog dvanaestougla:
$P = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r = 3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$ cm^2.

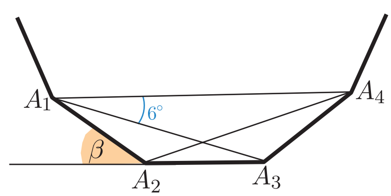
385. Koristićemo poslednju sliku, datu uz prethodni zadatak. Uočimo karakteristični trougao OCD i njegovu visinu CN. Trougao OCN je poznati pravougli trougao sa unutrašnjim uglom od $30°$. Imamo: $OC = r$, $CN = \frac{r}{2}$ i $ON = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Onda je $DN = r - \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Sada iz pravouglog trougla CDN izračunamo dužinu stranice $a = CD$ mnogougla. Dakle: $CD^2 = a^2 = CN^2 + DN^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = r^2(2-\sqrt{3})^2$. Dakle: $a = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. Obim je $O = 12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. Ako je $r = \sqrt{2}$, onda je $a = \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = (\sqrt{3}-1)$ cm.

386. Koristićemo poslednju sliku i rezultate iz prethodnog zadatka. Na poslednjoj slici, iz trougla OAC vidimo da je duž $AC = r$ najkraća dijagonala pravilnog mnogougla. Dakle, $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, pa je $P = 6 \cdot \frac{1}{2} r \cdot r = 3r^2 = 3(2+\sqrt{3})$ cm^2.

Prema prethodnom zadatku, stranica je $a = r\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 1$ cm. Dakle, obim dvanaestougla je $O = 12a = 12$ cm.

387. Na sledećoj slici vidimo da je dijagonala A_3A_5 paralelna prečniku A_1A_7 opisanog kruga, pa trouglovi $A_1A_3A_5$ i OA_3A_5 imaju zajedničku osnovicu A_3A_5 i jednake visine. Zbog toga su im jednake površine. Površina četvorougla $A_1A_3A_4A_5$ predstavlja zbir površina trouglova $A_1A_3A_5$ i $A_3A_4A_5$, pa je zbog toga jednak i zbiru površina trouglova OA_3A_5 i $A_3A_4A_5$. Ovo je, ustvari, površina deltoida $OA_3A_4A_5$, pa je tražena površina: $P = \frac{1}{2} A_3A_5 \cdot OA_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ dm^2 $= 50$ cm^2 (jer je trougao OA_3A_5 jednakostranični i $A_3A_5 = OA_3 = r$).

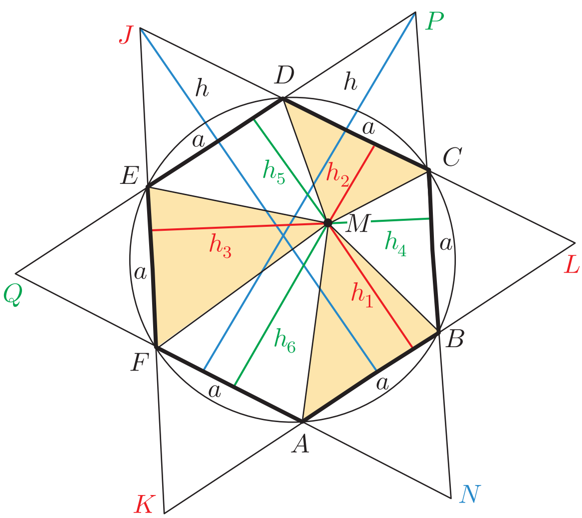


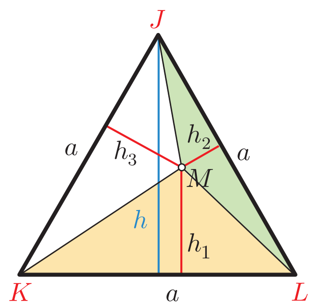


388. Radi se o pravilnom mnogouglu, pa je $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ i $\sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_3$. Zbog toga su trouglovi $A_1A_2A_3$ i $A_2A_3A_4$ podudarni, pa je $A_1A_3 = A_2A_4$, slika gore desno. Onda su po stavu SSS podudarni trouglovi $A_1A_2A_4$ i $A_4A_3A_1$. Iz njihove podudarnosti sledi da je $\sphericalangle A_4A_1A_2 = \sphericalangle A_1A_4A_3$. Zbog jednakosti $\sphericalangle A_2 =$

$\sphericalangle A_3$ zaključujemo da je četvorougao $A_1A_2A_3A_4$ trapez i A_1A_4 je paralelno sa A_2A_3. Onda je $\sphericalangle A_1A_3A_2 = \sphericalangle A_3A_1A_4 = 6^\circ$. Trougao $A_1A_2A_3$ je jednakokraki, pa je i $\sphericalangle A_2A_1A_3 = 6^\circ$. Ugao koji je na slici označena sa β predstavlja spoljašnji ugao za trougao $A_1A_2A_3$, pa je $\beta = 12^\circ$. Kako je β spoljašnji ugao mnogougla, važi jednakost $\dfrac{360}{n} = 12$, pa je $n = 30$. Naš mnogougao ima $\dfrac{30(30-3)}{2}$, odnosno 405 dijagonala.

389. Treba dokazati da je $P_{MAB} + P_{MCD} + P_{MEF} = P_{MBC} + P_{MDE} + P_{MFA}$. Svaki od ovih trouglova ima za osnovicu jednu stranicu pravilnog šestougla i odgovarajuću visinu, normalu iz M na tu stranicu. Označimo ove visine onim redom kojim su navedeni trouglovi: $MAB, MCD, \ldots$ sa h_1, h_2 h_3, h_4 h_5 h_6. Onda imamo jednakost: $\dfrac{1}{2}ah_1 + \dfrac{1}{2}ah_2 + \dfrac{1}{2}ah_3 = \dfrac{1}{2}ah_4 + \dfrac{1}{2}ah_5 + \dfrac{1}{2}ah_6$, koja posle skraćivanja sa $\dfrac{1}{2}a$ glasi: $h_1 + h_2 + h_3 = h_4 + h_5 + h_6$, vidi sledeću sliku. Ovu jednakost dokazaćemo koristeći se osobinom jednakostraničnog trougla, koju ćemo ovde dokazati, radi podsećanja. Stoga obratimo pažnju na sliku desno.



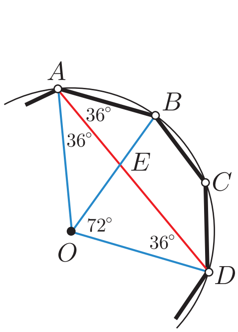


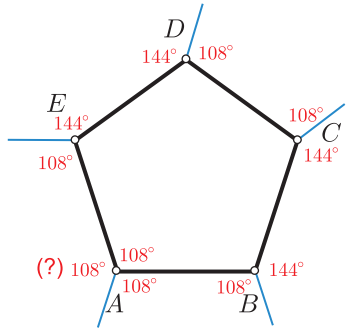
Uočimo tačku M u jednakostraničnom trouglu KLM. Spojimo tačku M sa temenima trougla. Dobijemo tri trougla. Zbir njihovih površina jednak je površini trougla KLM: $\dfrac{1}{2}ah_1 + \dfrac{1}{2}ah_2 + \dfrac{1}{2}ah_3 = \dfrac{1}{2}ah$, odakle posle skraćivanja sa $\dfrac{1}{2}a$ dobijemo traženu vezu: $h_1 + h_2 + h_3 = ah$.

Obratimo ponovo pažnju na levu sliku. Produžavanjem stranica šestougla dobili smo dva podudarna jednakostranična trougla JKL i NPQ. Na osnovu dokaza izloženog uz sliku desno, vidimo da je u ovom velikom trouglu: $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Budući da trougao NPQ ima isto toliku visinu h, u tom trouglu važi jednakost: $h_4 + h_5 + h_6 = h$. Dakle, biće $h_1 + h_2 + h_3 = h_4 + h_5 + h_6$, što potvrđuje da su ispunjeni zahtevi istaknuti u formulaciji zadatka.

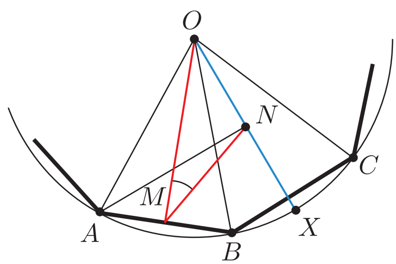
390. Vidi rešenje **zadatka 381**: $P = \dfrac{1}{2}a^2(\sqrt{2}+1) = 32(\sqrt{2}+1)\ \mathrm{cm}^2$.

391. Neka su A, B, C, D četiri uzastopna temena pravilnog desetougla. Označimo sa E presek duži OB i AD, slika levo. Izračunavanjem uglova utvrdimo da su trouglovi ABE i ODE sa unutrašnjim uglovima 72°, 72°, 36°, dakle, oba su jednakokraki. Otuda zaključujemo: $AD = AE + ED = AB + OD = a + r$.



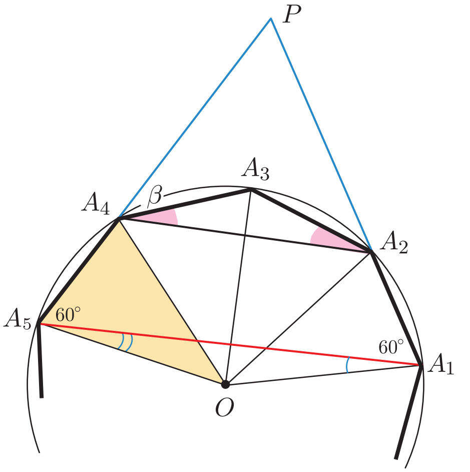


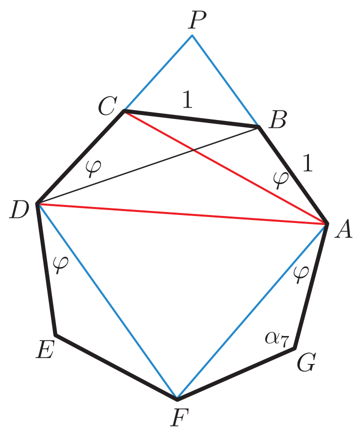
392. Da bi parketiranje bilo moguće, u svakom temenu pravilnog petougla $ABCDE$ na slici desno, zbir unutrašnjih uglova "pločica" (mnogouglova) mora biti tačno 360°. To je moguće ako je jedno teme zajedničko za dva pravilna petougla i jednog pravilnog desetougla: $108^\circ + 108^\circ + 144^\circ = 360^\circ$. Posmatrajmo redom uglove na stranicama pravilnog petougla $ABCDE$ na slici gore. Na stranici AB su uglovi 108° i 108°. Onda, na stranici BC moraju biti 144° i 144° (uglovi pravilnog desetougla). Idući dalje vidimo da se naizmenično smenjuju uglovi 108° i 144°. Tako na stranici CD imamo uglove 108° i 108°, na stranici DE uglove 144° i 144°, pa na stranici EA uglove 108° i 108°. Onda oko temena A imamo tri ugla od 108°, što ne može biti, jer je $108^\circ + 108^\circ + 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$. Dakle, predloženo parketiranje nije izvodljivo.



393. Poluprečnik OX polovi centralni ugao BOC. Kako je centralni ugao pravilnog devetougla 40°, to je $\sphericalangle AOX = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOX = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$. Kako je $OA = OX = r$, trougao AOX je jednakostranični, pa je $\sphericalangle ANO = 90^\circ$, slika desno. Takođe je i $\sphericalangle AMO = 90^\circ$, pa pravougli trouglovi AMO i ANO imaju zajedničku hipotenuzu, pa im je zajednički opisani krug. Pritom su $\sphericalangle OAN$ i $\sphericalangle OMN$ nad istom tetivom, pa su jednaki. (Vidi u sledećem poglavlju odeljak o periferijskim uglovima.) Kako je $\sphericalangle OAN = \dfrac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$, to je i $\sphericalangle OMN = 30^\circ$.

394. Najkraća dijagonala je duž A_2A_4, a najduža je A_1A_5. Produžimo stranice A_1A_2 i A_4A_5 do preseka P, sledeća slika levo. Računaćemo uglove. Trougao $A_2A_3A_4$ je jednakokraki, pa kako je $\sphericalangle A_2A_3A_4 = 140^\circ$ (ugao pravilnog devetougla), biće $\sphericalangle A_4A_2A_3 = \sphericalangle A_2A_4A_3 = 20°$. Spoljašnji ugao mnogougla je $\beta = 40°$, pa su uglovi kod temena A_2 i A_4 u trouglu A_2PA_4 oba po $60°$. Trougao A_2PA_4 je jednakostranični. Dalje, trougao A_1A_5O je jednakokraki sa uglom od $\sphericalangle O = 160°$, pa je $\sphericalangle A_5A_1O = \sphericalangle A_1A_5O = 10°$. Zbog jednakosti $\sphericalangle OA_1A_2 = 70° = \sphericalangle OA_5A_4$, sledi da je $\sphericalangle A_5A_1P = 60° = \sphericalangle A_1A_5P$. Trougao A_1PA_5 je jednakostranični, kome je stranica najveća dijagonala. Stranica trougla A_2PA_4 je najmanja dijagonala, pa je $A_1P - A_2P = A_1A_2$, što se i tvrdilo.





395. Produžimo stranice AB i CD do preseka P. Dokazaćemo da je četvorougao $APDF$ romb. Jednakokraki trouglovi ABC, BCD, DEF i AGF podudarni su, pa imaju jednake osnovice: $AC = AF = DF$ i oštre uglove na osnovicama, označimo ih sa φ. Vidimo da je $\sphericalangle FAP = \alpha_7 - \varphi = \sphericalangle FDP$ (α_7 ugao pravilnog sedmougla). Zatim, $\sphericalangle AFD = \alpha_7 - 2\varphi = \sphericalangle APD$. (U trouglu BCP α_7 je spoljašnji ugao, pa je $\sphericalangle APD = \alpha_7 - \beta_7$. Spoljašnji ugao sedmougla je $\beta_7 = 2\varphi$, jer je on spoljašnji ugao i trougla BCD). U četvorouglu $APDF$ jednaki su parovi naspramnih uglova, pa je on paralelogram. Budući da je $AF = DF$ ovaj paralelogram je romb. Zbog toga je $AP = DF$, pa kako je $DF = AC$, sledi da je $AP = AC$.

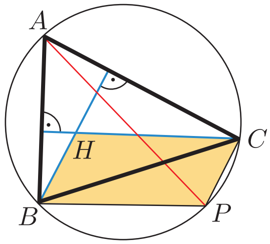
Očigledno je da su podudarni trouglovi ABD i DCA (po stavu SSS). Otuda sledi da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA$. Sada možemo tvrditi da su prave AD i BC paralelne, jer je $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 180°$. Zbog toga, na osnovu Talesove teoreme je $\frac{BC}{AD} = \frac{BP}{AP} = \frac{AP - AB}{AP}$. Kako je $AP = AC$, a $BC = AB = 1$ cm, po uslovu, sledi $\frac{1}{AD} = \frac{AC - 1}{AC}$, odnosno: $\frac{1}{AD} = 1 - \frac{1}{AC}$ i konačno: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$.

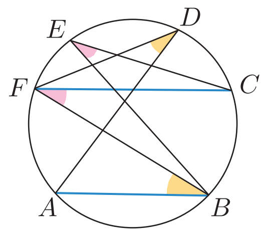
9.5. Krug

396. Neka je $ABCD$ trapez upisan u krug i neka je $AB \| CD$. Uočimo dijagonalu AC. Uglovi BAC i ACD jednaki su, kao uglovi sa paralelnim kracima.

Međutim, kako jednakim periferijskim uglovima odgovaraju jednake tetive, biće $BC = AD$, tj. kraci su jednaki.

397. Uglovi ACP i ABP su pravi, kao uglovi nad prečnikom AP. Zbog toga je $BH \| CP$ i $CH \| BP$, slika levo.

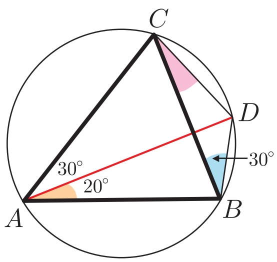


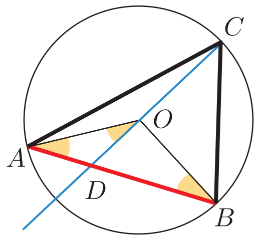


398. Ugao CMN je prav, kao ugao nad prečnikom, pa je visina CM normalna na AB i na MN. Zbog toga je $AB \| MN$, pa su AB i MN osnovice trapeza, koji prema **zadatku 396**, mora biti jednakokraki.

399. $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ADF$ i $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BEC$, kao uglovi nad istim lukom, slika gore. Kako je $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BEC$, sledi da je $\sphericalangle ABF = \sphericalangle BFC$. Uglovi ABF i BFC imaju zajednički krak, pa kako su jednaki, sledi da je $AB \| CF$.

400. Neka je k krug opisan oko trougla ACD. Kako je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB - \sphericalangle BAD = 30^\circ = \sphericalangle CBD$, zaključujemo da i tačka B pripada krugu k. Zbog toga je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 20^\circ$, slika levo.

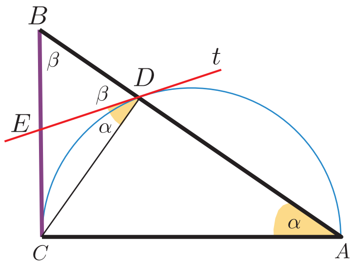


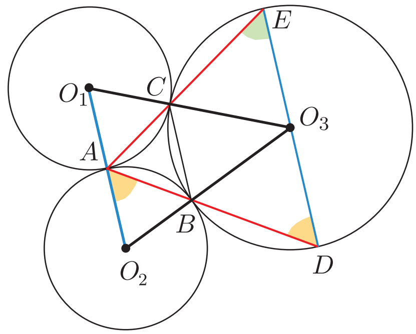


401. Iz date proporcije, koristeći se zbirom unutrašnjin uglova, izračunavamo uglove datog trougia: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. Trouglovi AOB, BOC i AOC su jednakokraki, jer je O centar opisanog kruga, slika desno. Centralni ugao dva puta je veći od odgovarajućeg periferijskog, pa je $\sphericalangle BOC = 90^\circ$, $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ i $\sphericalangle AOC = 150^\circ$. Zbog toga je $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 30^\circ$. Zatim: $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = 15^\circ$. Spoljašnji ugao AOD trougla AOC je, dakle, od 30°, pa je $AD = OD$. Kako je $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BOC = 90^\circ$ i $\sphericalangle OBD = 30^\circ$, to je $OD = \frac{1}{2}DB$. Zbog $AD = OD$ je $AD = \frac{1}{2}DB$, tj. $AD : DB = 1 : 2$.

402. Ugao ADC je prav, kao ugao nad prečnikom. Po konstrukciji ($BC \perp AC$) BC je tangenta, pa je $EC = ED$ (tangentne duži), sledeća slika. Tangentni ugao

CDE jednak je periferijskom uglu α, pa je $\sphericalangle BDE = 90° - \alpha = \beta = \sphericalangle DBE$. Dakle: $BE = ED$, pa iz $EC = ED$, sledi: $BE = CE$.



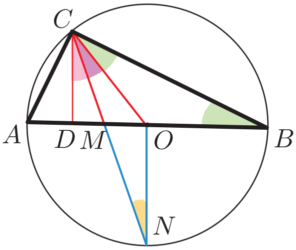


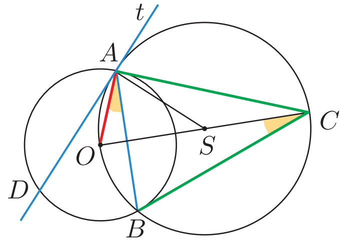
403. Neka su A, B, C dodirne tačke krugova, slika gore desno. Treba dokazati, prema ovoj slici, da su, npr. tačke D, O_3, E na jednoj pravoj. Jednakokraki trouglovi ABO_2 i BDO_3 imaju unakrsne, a otuda i jednake, uglove na osnovicama (uglovi kod temena B). Zbog toga je $\sphericalangle O_2AB = \sphericalangle O_3DB$, a ovi uglovi imaju zajednički krak AD. Sledi da je $DO_3 \| AO_2$. Slično se dokaže da je i $EO_3 \| AO_1$, što znači da se prave DO_3 i EO_3 poklapaju.

404. Neka su K, L, M, N središta lukova $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$, a α, β, γ, δ centralni uglovi nad njima. Označimo sa O presečnu tačku pravih KM i LN. U trouglu OKL je $\sphericalangle KON = \varphi$ spoljašnji, pa je $\varphi = \sphericalangle OLK + \sphericalangle OKL$. Međutim, $\sphericalangle OLK = \sphericalangle NLA + \sphericalangle ALK = \dfrac{\delta}{4} + \dfrac{\alpha}{4}$ i slično: $\sphericalangle OKL = \dfrac{\beta}{4} + \dfrac{\gamma}{4}$. Dakle: $\sphericalangle KON = \varphi = \dfrac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 90°$. (Nacrtaj odgovarajuću sliku.)

405. Neka su CD, CM i CO redom visina, simetrala ugla i težišna linija. Koristeći se osobinama trouglova možemo dokazati da je tačka M između D i O, sledeća slika. Tačka N, u kojoj simetrala ugla seče opisani krug, polovi luk ANB i pripada simetrali stranice AB. Dakle, $ON \perp AB$, pa je $ON \| CD$, zbog čega je $\sphericalangle DCM = \sphericalangle MNO$. Kako je i $\sphericalangle OCM = \sphericalangle DCM$ (po uslovu zadatka), to je i $\sphericalangle OCM = \sphericalangle ONM$, pa je trougao OCN jednakokraki. Dakle, simetrala tetive CN sadrži tačku O. Tačka O pripada i simetrali tetive AB, pa je O centar opisanog kruga trougla ABC. Stranica AB je prečnik kruga, pa je ugao ACB prav. Sada jednostavno izračunavamo: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCO = \dfrac{90°}{4} = 22°30'$, pa je $\sphericalangle CAB = 67°30'$.

406. Označimo sa φ traženi ugao. Tada je $\varphi = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ (nad istim lukom). Tada su unutrašnji uglovi trougla BCS redom: $\sphericalangle BSC = \sphericalangle ASD = 100°$ (unakrsni), $\sphericalangle SBC = 76° - \varphi$ i $\sphericalangle SCB = 82° - \varphi$. Zbir ovih uglova je $180°$, pa iz uslova: $100° + 76° - \varphi + 82° - \varphi = 180°$, dobijamo: $\varphi = \sphericalangle ABD = 39°$.



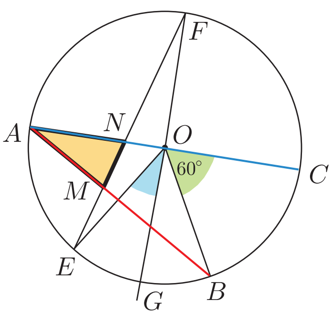


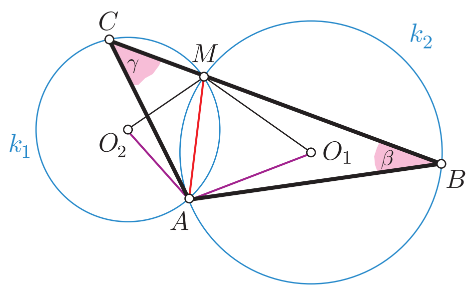
407. Ugao BAD jednak je uglu ACB (tangentni i tetivni uglovi). Tačka O je središte luka AOB, slika gore desno, pa je $\sphericalangle BCO = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. Međutim, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCB$ (nad istim lukom), pa je $\sphericalangle OAB = \frac{1}{2}\sphericalangle DAB$, što se i tvrdilo.

408. Unakrsni uglovi P_1AQ_1 i P_2AQ_2 su jednaki. Međutim, $\sphericalangle P_1BQ_1 = \sphericalangle P_1AQ_1$ i $\sphericalangle P_2BQ_2 = \sphericalangle P_2AQ_2$ (nad istim lukom) i $\sphericalangle P_1BQ_1 = \sphericalangle P_2BQ_2$, pa je $\sphericalangle P_1BP_2 = \sphericalangle P_1BQ_2 + \sphericalangle Q_2BP_2 = \sphericalangle P_1BQ_2 + \sphericalangle Q_1BP_1 = \sphericalangle Q_1BQ_2$. Dokaz je završen.

409. Tačka M je na simetrali ugla γ. Ona polovi luk AMB, pa su tetive AM i BM jednake. Dokažimo još i da je $AM = SM$. Uglovi BAM i BCM su nad istim lukom, pa je $\sphericalangle BAM = \frac{\gamma}{2}$. Tačka S je centar upisanog kruga, pa je zbog toga $\sphericalangle BAS = \frac{\alpha}{2}$. Prema tome, $\sphericalangle SAM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. U trouglu ACS ugao ASM je spoljašnji: $\sphericalangle ASM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, dakle: $\sphericalangle ASM = \sphericalangle SAM$. Zbog toga je $AM = SM$.

410. $\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\sphericalangle COB = 30^\circ$, slika levo. Dalje je $\sphericalangle AOB = 120^\circ$, pa je $\sphericalangle BOE = 60^\circ$. Duž AC je prečnik, pa je OF simetrala tetive AC i tačka G polovi luk BE. Dakle, $\sphericalangle EOG = 30^\circ$, pa je u jednakokrakom trouglu OEF ugao OEF jednak 15°. Trougao OFN jo pravougli, pa je $\sphericalangle FNO = 75^\circ$, a to znači da je i $\sphericalangle ANM = 75^\circ$ (unakrsni uglovi). Sada imamo u trouglu AMN uglove: $\sphericalangle MAN = 30^\circ$ i $\sphericalangle ANM = 75^\circ$. Zbog toga je $\sphericalangle AMN = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$, pa je trougao AMN jednakokraki.

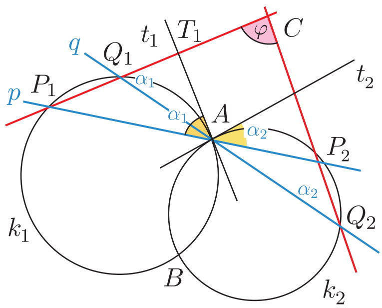


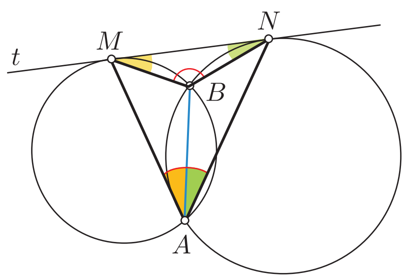


411. Neka je Q presečna tačka tetiva AM i NP. Uočimo trougao NOQ. Ugao ONP je nad lukom BP, pa je $\sphericalangle ONQ = \dfrac{\gamma}{2}$. Ugao NOA je spoljašnji ugao trougla OAB, pa je $\sphericalangle NOQ = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$. Dakle: $\sphericalangle ONQ + \sphericalangle NOQ = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\gamma}{2} = 90°$, pa je $\sphericalangle NQO = 90°$ i $AM \perp NP$. Slično dokazujemo i ostala tvrđenja.

412. U jednakokrakom trouglu O_1AM ($O_1A = O_1M = r_1$) je $\sphericalangle AO_1M = 2\beta$ (centralni i periferijski ugao), pa je $\sphericalangle MAO_1 = 90° - \beta$, poslednja slika desno. Na sličan način nalazimo da je $\sphericalangle MAO_2 = 90° - \gamma$, pa je $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle MAO_1 + \sphericalangle MAO_2 = 180° - (\beta + \gamma) = \alpha$. Nije ništa komplikovaniji dokaz ni u slučaju kada neki od uglova β ili γ nije oštar.

413. Neka je C presečna tačka pravih P_1Q_1 i P_2Q_2, sledeća slika, i neka su t_1 i t_2 tangente na krugove k_1 i k_2 u tački A. Neka su α_1 i α_2 uglovi koje obrazuju ove tangente sa pravom p. Primetimo da je $\sphericalangle AQ_2P_2 = \alpha_2$ (tangentni i tetivni ugao). Dalje, $\alpha_1 = \sphericalangle Q_1AT_1 + Q_1AP_1 = \sphericalangle Q_1P_1A + \sphericalangle Q_1AP_1$ (jer je $\sphericalangle Q_1AT_1 = \sphericalangle Q_1P_1A$, kao tangentni i tetivni uglovi). U trouglu AP_1Q_1 ugao AQ_1T_1 je spoljašnji, pa je $\sphericalangle AQ_1T_1 = \sphericalangle Q_1P_1A + \sphericalangle Q_1AP_1$. Prema tome $\sphericalangle AQ_1T_1 = \alpha_1$. Sada u trouglu CQ_2Q_1 imamo: $\varphi = 180° - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Međutim, ugao $\alpha_1 + \alpha_2$ je suplementan uglu između tangenti t_1 i t_2, pa je ugao φ, tj. ugao pod kojim se seku prave P_1Q_1 i P_2Q_2, jednak uglu pod kojim se seku tangente t_1 i t_2, a ovaj ugao je stalan, ne zavisi od položaja sečica p i q.





414. U jednakokrakom trouglu AMC je $\sphericalangle AMC = 100°$, pa zbog toga što je $\sphericalangle ABC = 50° = \dfrac{1}{2}\sphericalangle AMC$, sledi da je tačka M centar kruga opisanog oko trougla ABC, itd. Traženi uglovi su: $\sphericalangle AMB = 120°$ i $\sphericalangle BMC = 140°$.

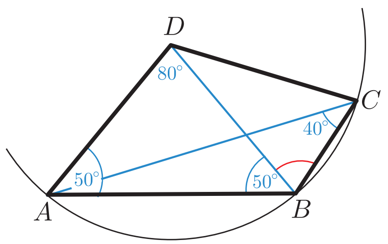
415. Uočimo trougao BMN, slika desno. Imamo jednakost $\sphericalangle BMN + \sphericalangle BNM + \sphericalangle MBN = 180°$. Međutim, $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BAM$ i $\sphericalangle BNM = \sphericalangle BAN$ (tangentni i tetivni uglovi), pa iz $\sphericalangle BAM + \sphericalangle BAN = \sphericalangle MAN$, sledi da je traženi zbir $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MBN = 180°$.

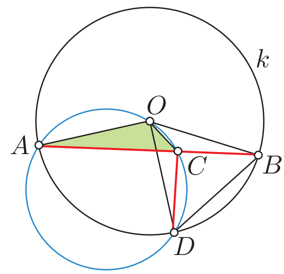
416. Kako je $S_1A = S_1B = S_1S_2 = S_2A = S_2B$, sledi da su trouglovi AS_1S_2 i BS_1S_2 jednakostranični, pa su centralni uglovi nad tetivom AB jednaki 120°. Zbog toga je $\sphericalangle ACB = 60° = \sphericalangle ADB$ (periferijski uglovi nad tetivom AB), pa je trougao BCD jednakostraničan.

417. Uglovi AMB i ANB su jednaki, kao periferijski uglovi nad jednakim tetivama podudarnih krugova. Zbog toga je trougao BMN jenakokraki.

418. Dokazaćemo da je $\sphericalangle AFG = \sphericalangle AGF$. U trouglu ADF je $\sphericalangle AFG$ spoljašnji ugao, pa je $\sphericalangle AFG = \sphericalangle BAD + \sphericalangle ADE$ i slično, u trouglu AGE je $\sphericalangle AGF = \sphericalangle AED + \sphericalangle CAE$. Iz činjenice da su D i E središta lukova ADB i AEC, sledi da je $\sphericalangle AFG = \sphericalangle AGF$, pa je $AG = AF$.

419. Na osnovu podataka o uglovima zaključujemo da je trougao ABD jednakokraki i $AD = BD$, pa krug sa centrom D i poluprečnikom DA prolazi kroz tačku B, slika dole levo. Kako je $\sphericalangle ACB = 40^\circ = \frac{1}{2}\sphericalangle ADB$, zaključujemo da ovaj krug sadrži i tačku C. Dakle, $CD = BD$, pa iz jednakokrakog trougla BCD dobijamo: $\sphericalangle BDC + 2\sphericalangle DBC = 180^\circ$, odnosno: $\sphericalangle DBC - 30^\circ + 2\sphericalangle DBC = 180^\circ$. Traženi ugao je $\sphericalangle DBC = 70^\circ$.

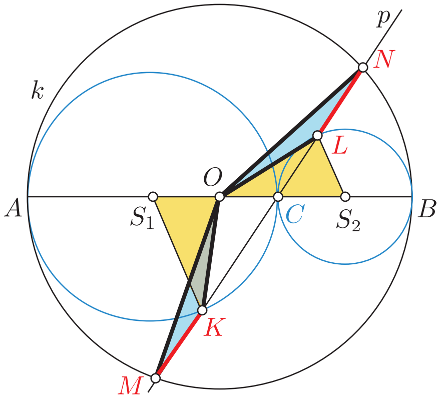


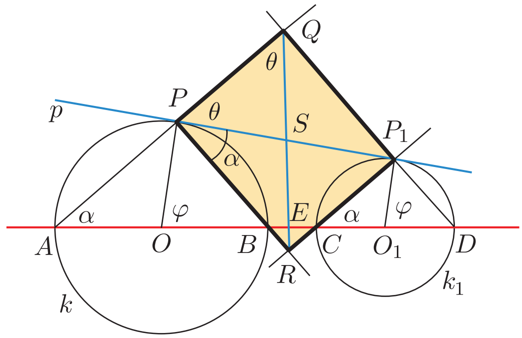


420. Trouglovi OBD i OAB su jednakokraki, pa je $\sphericalangle OBD = \sphericalangle ODB$ i $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$, slika gore desno. Sem toga je $\sphericalangle OAB = \sphericalangle ODC$ (kao uglovi nad tetivom CD opisanog kruga), pa je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB$ (razlike dva jednaka ugla). Otuda sledi da je $BC = CD$.

421. Označimo sa O, S_1, S_2 centre krugova k, k_1, k_2. sledeća slika. Trouglovi OS_1K i LS_2O su podudarni. ($OS_2 = r - r_2 = r_1 = S_1K$. Slično je $OS_1 = r_2 = S_2L$ i $\sphericalangle OS_1K = \sphericalangle CS_2L$, jer su uglovi kod temena C jednakokrakih trouglova S_1CK i S_2CL jednaki.) Iz podudarnosti trouglova sledi: $OK = OL$. Dakle, trougao OKL je jednakokraki, pa je $\sphericalangle OKL = \sphericalangle OLK$. Sledi da je i $\sphericalangle OKM = \sphericalangle OLN$. Trougao OMN takođe je jednakokraki, jer je $OM = ON = r$, pa je takođe $\sphericalangle OMK = \sphericalangle ONL$. Dakle, trougao OMK je podudaran trouglu ONL (jednaki uglovi i $OM = ON$, $OK = OL$), pa je $MK = NL$.

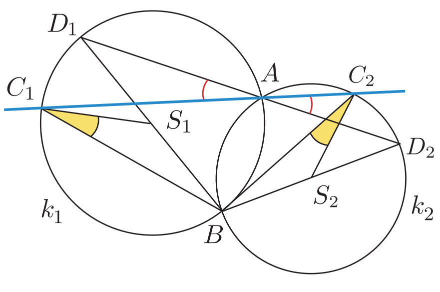
422. Poluprečnici OP i O_1P_1 normalni su na pravu p, pa su paralelni među sobom. Stoga su uglovi BOP i DO_1P_1 jednaki, sledeća slika desno. Trouglovi OAP i O_1CP_1 su jednakokraki, sa jednakim uglovima, $\sphericalangle OAP = \sphericalangle O_1CP_1 = \frac{\varphi}{2}$ (φ je spoljašnji ugao kod vrha). Dakle, prave AP i CP_1 su paralelne. Slično dokažemo i da je BP paralelno sa DP_1. Otuda sledi da je četvorougao PQP_1R paralelogram. Ali, ugao APB je prav (nad prečnikom AB), pa je PQP_1R pravougaonik. Dokažimo još da je $QR \perp AB$. Ugao RPS jednak je uglu BAP (tangentni i tetivni). Trougao PSQ je jednakokraki ($SP = SQ$, kao polovine dijagonala pravougaonika), pa je

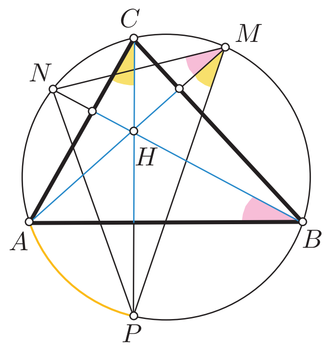




$\sphericalangle SPQ = \sphericalangle SQP = \theta$. Kako je $\sphericalangle QPR = 90^\circ = \alpha + \theta = \sphericalangle BAQ + \sphericalangle AQR$, to je u trouglu AQE treći ugao prav: $\sphericalangle AEQ = 90^\circ$ (jer je zbir druga dva ugla u trouglu AEQ jednak 90°).

423. Neka su BD_1 i BD_2 prečnici datih krugova, slika dole. Prava D_1D_2 sadrži tačku A (vidi **primer A**). Uglovi C_1AD_1 i C_2AD_2 su jednaki kao unakrsni. Dalje je $\sphericalangle C_1BD_1 = \sphericalangle C_1AD_1$ i $\sphericalangle C_2BD_2 = \sphericalangle C_2AD_2$ (uglovi nad istim lukovima). Zbog toga je $\sphericalangle C_1BD_1 = \sphericalangle C_2BD_2$. Trouglovi BC_1S_1 i BD_2S_2 su jednakokraki, pa je $\sphericalangle BC_1S_1 = \sphericalangle C_1BD_1$, a $\sphericalangle BC_2S_2 = \sphericalangle C_2BD_2$. Sledi da je $\sphericalangle BC_1S_1 = \sphericalangle BC_2S_2$.



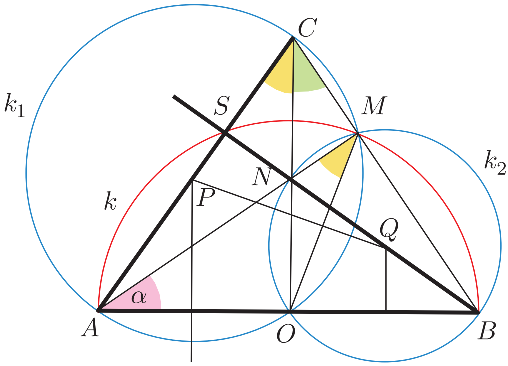


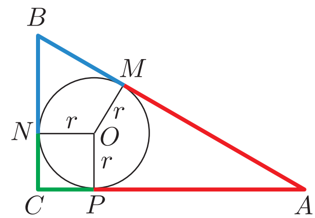
424. Dokažimo da je AM simetrala ugla NMP, slika gore. Uočimo najpre da je $\sphericalangle AMP = \sphericalangle ACP$ i $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ABN$ (nad istim lukovima). Međutim, $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ABN$ (sa normalnim kracima). Zbog toga je $\sphericalangle AMP = \sphericalangle AMN$, što znači da je AM simetrala ugla NMP. Slično se dokazuje da je BN simetrala ugla MNP i CP simetrala ugla MPN. Otuda sledi da je tačka H centar upisanog kruga trougla MNP.

425. Neka je AL prečnik kruga k_1, sledeća slika. Trougao ALM je pravougli, pa je $\sphericalangle LAM + \sphericalangle ALM = 90^\circ$. Uvedimo oznaku: $\sphericalangle MAO = \alpha$. Tada je i $\sphericalangle AMO = \sphericalangle ALO = \sphericalangle MLO = \alpha$ (uglovi u krugu k_1 nad jednakim tetivama).

Dakle, iz $\sphericalangle LAM + \sphericalangle ALO + \sphericalangle MLO = 90^\circ$, dobijamo $\sphericalangle LAM + \sphericalangle MAO + \alpha = 90^\circ$, odnosno $\sphericalangle LAO = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \sphericalangle AMO$.

Uočimo prečnik BN kruga k_2. Tada je $\sphericalangle BMN = 90^\circ$ i $\sphericalangle OBN = \sphericalangle OMN = 90^\circ - \sphericalangle OMB$. Sada u trouglu ABS imamo: $\sphericalangle SAO + \sphericalangle ABS = \sphericalangle LAO + \sphericalangle OBN = 90^\circ - \sphericalangle AMO + 90^\circ - \sphericalangle OMB = 180^\circ - (\sphericalangle AMO + \sphericalangle OMB) = 180^\circ - \sphericalangle AMB$. Kako je $\sphericalangle AMB = 90^\circ$, kao ugao nad prečnikom AB, sledi da je $\sphericalangle SAO + \sphericalangle ABS = 90^\circ$. Dakle, $\sphericalangle ASB = 90^\circ$, pa je tačka S na polukrugu k.





426. Četvorougao $CNOP$ na slici gore desno je kvadrat stranice r. Iz jednakosti tangentnih duži dobijamo: $CN = CP = r$, $AM = AP$ i $BM = BAT$. Prema tome: $2s = AB + BC + CA = AB + BN + CN + CP + AP = AB + BM + 2r + AM = AB + 2r + (AM + BM) = AB + 2r + AB$, odnosno $2s = 2c + 2r$. Odavde je $r = s - c$.

427. Prema gornjoj slici desno je $AC + BC = AP + CP + BN + NC = AM + r + BM + r = (AM + BM) + 2r = AB + 2r$. Kako je prečnik kruga opisanog oko pravouglog trougla jednak hipotenuzi, dobićemo $AC + BC = 2R + 2r$, što se i tvrdilo.

428. Neka je $r_1 > r_2$. Označimo sa k_3 treći krug. Krugovi k_1 i k_3 se dodiruju iznutra, pa je $O_1M = r_1 - r_3$. Krugovi k_1 i k_3 se dodiruju spolja, pa je $O_2M = r_2 + r_3$. Zbog toga važi: $O_1M + O_2M = r_1 - r_3 + r_2 + r_3 = r_1 + r_2$, a ovaj zbir ima konstantnu vrednost.

429. Neka je tačka S centar kruga k. Prave AS i BS su simetrale suplementnih uglova na datim paralelnim pravim, pa je ugao ASB prav i krug nad prečnikom AB sadrži tačku S. (Nacrtaj odgovarajuću sliku.)

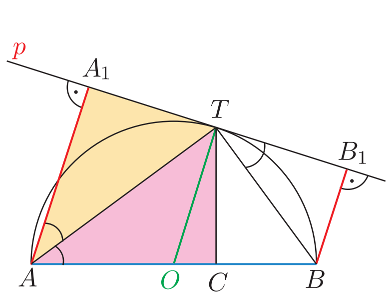
430. Duži BA i BD su jednake (tangentne duži), pa je trougao ADB jednakokraki. Simetrala BO ugla ABD normalna je na tetivu AD. Slično se dokaže da je $OC \perp AE$, pa su uglovi BOC i DAE sa normalnim kracima.

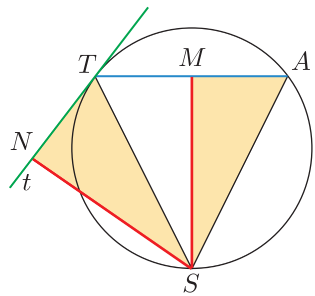
431. Neka je k krug opisan oko trougla CDE i neka je t tangenta tog kruga u tački E. Tangentni ugao φ u tački E biće jednak uglu DCE. Uočimo krug k_1, opisan oko trougla ABE. Tangenta kruga k_1 u tački E sa tetivom AE određuje ugao koji je jednak uglu ABE. Međutim, $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABE$ (sa paralelnim kracima), pa je $\sphericalangle ABE = \varphi$. Dakle, krugovi k i k_1 imaju zajedničku tangentu u tački E, pa se dodiruju.

432. Postavimo u tački A zajedničku tangentu datih krugova i označimo sa M tačku u kojoj ona seče pravu BC. Duži MA, MB i MC su jednake, kao tangentne duži, pa krug prečnika BC sadrži tačku A i $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, kao ugao nad prečnikom.

433. Neka je T dodirna tačka i C podnožje normale iz T na AB, slika levo. Uočimo trouglove AA_1T i ACT. Ugao BTB_1 je tangentni ugao sa tetivom BT, pa je $\sphericalangle TAB = \sphericalangle BTB_1$. Međutim, zbog $AA_1 \perp TB_1$ i $AT \perp TB$ (ugao nad prečnikom), jednaki su uglovi: $\sphericalangle A_1AT = \sphericalangle BTB_1$. Sledi zaključak: $\sphericalangle A_1AT = \sphericalangle TAC$, a ovo su oštri uglovi pravouglih trouglova AA_1T i ACT. Ovi trouglovi imaju još i zajedničku hipotenuzu AT, pa su podudarni i $AA_1 = AC$. Slično se dokaže i da je $BB_1 = BC$, pa sledi da je $AA_1 + BB_1 = AC + BC = AB$.

Drugo rešenje. Uočimo dodirni poluprečnik OT, koji je normalan na tangentu p, pa je paralelan sa AA_1 i BB_1. Tada je OT srednja linija trapeza ABB_1A_1, zbog čega je $AA_1 + BB_1 = 2OT = AB$.



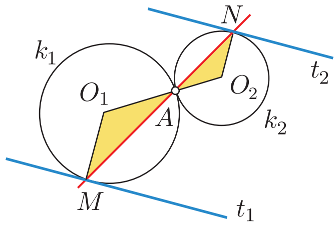


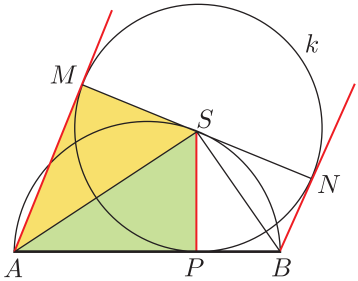
434. Neka je AT tetiva i tačka S središte luka AST, slika desno. Označimo sa M i N podnožja normala iz S na tetivu i tangentu. Prava SM je simetrala tetive, pa je $SA = ST$. Sem toga $\sphericalangle SAM = \sphericalangle STN$ (periferijski i tangentni uglovi), pa su pravougli trouglovi SAM i STN podudarni i $SM = SN$.

435. Iz $AC = BD$ sledi da je tačka O središte duži CD. Neka je S središte duži EF. Četvorougao $CDFE$ je trapez, a duž OS je njegova srednja linija, pa je $OS \| CE$ i $OS \| DF$. Međutim, OS je simetrala tetive EF, pa je $OS \perp EF$, a onda je $CE \perp EF$ i $DF \perp EF$.

436. Uočimo duži O_1O_2, O_1M i O_2N, slika dole levo. Trouglovi O_1AM i O_2AN su jednakokraki, pa iz jednakosti unakrsnih uglova $\sphericalangle O_1AM = \sphericalangle O_2AN$, sledi i da je $\sphericalangle O_1MA = \sphericalangle O_2NA$. Iz jednakosti ovih uglova zaključujemo da je $O_1M \| O_2N$. Tangente t_1 i t_2 su normalne na poluprečnike O_1M i O_2N, pa zaključujemo da su one paralelne među sobom.

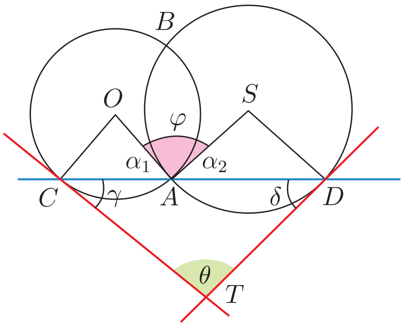
437. Označimo sa P podnožje normale iz S na AB, a sa M i N podnožja normala iz S na druge dve tangente kruga k, sledeća slika desno. Duži AM i AP su jednake kao tangentne duži iz tačke A i $SM = SP$ (poluprečnici kruga k),

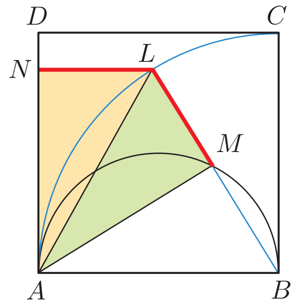




pa su trouglovi APS i AMS podudarni. Zbog toga je $\sphericalangle MAS = \sphericalangle SAP$. Slično dokazujemo da je $\sphericalangle PBS = \sphericalangle SBN$, pa je $\sphericalangle MAB + \sphericalangle ABN = 2(\sphericalangle SAB + \sphericalangle SBA) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ (trougao ASB je pravougli). Otuda sledi da je $AM \| BN$.

438. Neka su O i S centri datih kružnica. Ugao OAS, označimo ga sa φ, ne menja se bez obzira na izbor sečice CD, slika dole levo. Uglovi trouglova ACO i ADS zadovoljavaju uslov: $2\alpha_1 + \sphericalangle AOC + 2\alpha_2 + \sphericalangle ASD = 360^\circ$. Zamenjujući $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ - \varphi$, dobijamo: $\sphericalangle AOC + \sphericalangle ASD = 2\varphi$. Koristeći se odnosima između tangentnih, periferijskih i centralnih uglova, nalazimo da je $\gamma = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC$, kao i $\delta = \frac{1}{2}\sphericalangle ASD$ (vidi sliku), gde su γ i δ tangentni uglovi. Ugao pod kojim se seku tangente je: $\theta = \sphericalangle CTD = 180^\circ - (\gamma + \delta) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle AOC + \sphericalangle ASD) = 180^\circ - \varphi$, a to je nepromenljiva veličina.

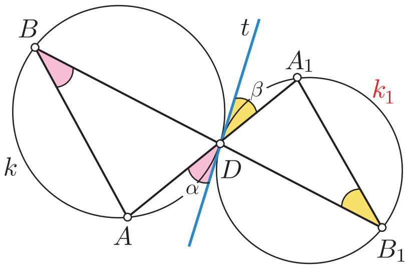


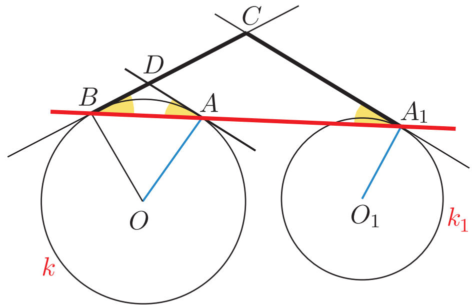


439. Trougao ABL je jednakokraki, $AB = BL$, pa je $\sphericalangle BLA = \sphericalangle BAL$, slika gore. Sem toga, $\sphericalangle NLA = \sphericalangle BAL$ (sa paralelnim kracima), pa je $\sphericalangle NLA = \sphericalangle MLA$. Ovo su oštri uglovi pravouglih trouglova ALN i ALM, koji imaju zajedničku hipotenuzu. Dakle, ovi trouglovi su podudarni, odakle sledi: $LN = LM$.

440. Trougao MAP je jednakokraki, $AM = AP$, pa je simetrala ugla MAP istovremeno simetrala tetive MP, a duž MP je stranica trougla MNP. Slično dokazujemo da su i ostale simetrale uglova trougla ABC istovremeno simetrale stranica trougla MNP.

441. Neka je t zajednička tangenta u tački D, slika levo. Tangentni uglovi α i β jednaki su među sobom kao unakrsni, pa je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1D$ (odgovarajući periferijski uglovi). Ova dva ugla imaju zajednički krak BB_1, što povlači paralelnost pravih AB i A_1B_1.

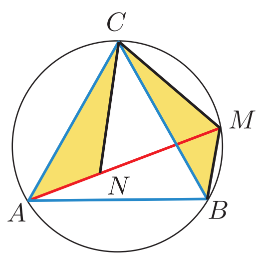


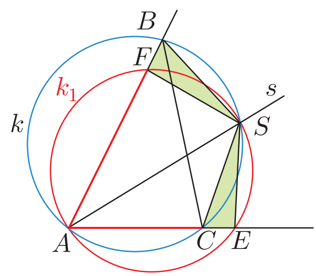


442. Konstruišimo tangentu kruga k u tački A. Ona seče BC u tački D i $AD \| A_1C$, jer je i $OA \| OA_1$, slika desno. Zbog toga je $\sphericalangle CA_1B = \sphericalangle DAB$. Međutim, tangentne duži DA i DB su jednake, pa u jednakokrakom trouglu ABD je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA$. Zaključujemo da je $\sphericalangle CA_1B = \sphericalangle CBA_1$, tj. trougao A_1BC je jednakokraki i $A_1C = BC$.

443. Označimo sa r, r_1 i r_2 poluprečnike krugova upisanih u pravougle trouglove ABC, ADC i BDC. Prema **zadatku 426** za trougao ABC važi $r = s - c = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2}$, odakle je $2r = a + b - c$. Ako ovo primenimo na trougao ADC, dobićemo: $2r_1 = AD + CD - b$ i slično iz trougla BDC dobijamo: $2r_2 = DB + CD - a$. Saberemo ove tri jednakosti i dobićemo: $2r + 2r_1 + 2r_2 = 2CD + AD + DB - c = 2CD$, jer je $AD + DB = c$. Skratimo sa 2 i dobijemo traženu jednakost.

444. Na tetivi AM odredimo tačku N, takvu da je $CN = CM$, sledeća slika. Sada, zbog $AC = BC$ i $\sphericalangle CAN = \sphericalangle CBN$ (nad istim lukom), trouglovi ACN i BCM su podudarni, pa je $AN = BM$. Trougao CMN je jednakokraki, ali kako je $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ABC = 60^\circ$, sledi da je CMN, jednakostranični trougao i da je $MN = CM$. Sada zaključujemo: $AM = AN + NM = BM + CM$.





445. Označimo sa B i C tačke u kojima proizvoljan krug k, koji sadrži tačke A i S, seče krake datog ugla, slika desno. Dokazaćemo da je zbir $AB + AC$ konstantan.

Nad prečnikom AS konstruišemo krug k_1, koji seče krake datog ugla u tačkama E i F. Uglovi kod E i F su pravi, $\sphericalangle SAE = \sphericalangle SAF$, pa su trouglovi ASE i ASF podudarni. Otuda je $SE = SF$ i $AE = AF$, a duž AF ne zavisi od izbora kruga k. Trougao BCS je jednakokraki, jer je $\sphericalangle BCS = \sphericalangle BAS$, a $\sphericalangle CBS = \sphericalangle CAS$, odnosno $\sphericalangle BCS = \sphericalangle CBS$. Sledi da je $BS = CS$. Dakle, pravougli trouglovi BSF i CSE podudarni su (imaju jednake hipotenuze i jednu katetu). Sledi da je $BF = CE$. Sada računamo: $AB + AC = AF + FB + AC = AF + CE + AC = AF + AE = 2AF$, a ovo je konstanta.

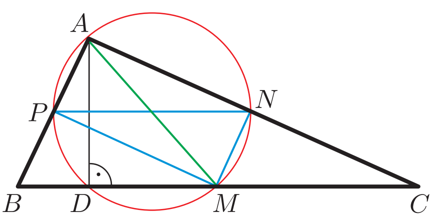
446. Centri ovih krugova su presečne tačke simetrala spoljašnjih uglova datog četvorougla, pa je: $\sphericalangle O_4O_1O_2 = 180^\circ - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\beta_1}{2}$ i $\sphericalangle O_4O_3O_2 = 180^\circ - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\delta_1}{2}$. Prema tome: $\sphericalangle O_4O_1O_2 + \sphericalangle O_4O_3O_2 = 360^\circ - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$, što potvrđuje da je $O_1O_2O_3O_4$ tetivni četvorougao.

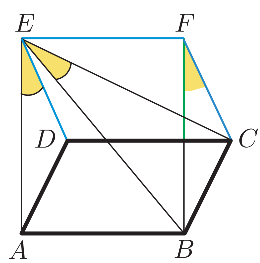
447. Neka su AP i BQ visine trougla ABC. Tada su uglovi APB i BQA pravi, što znači da krug prečnika AB prolazi kroz tačke P i Q (uglovi nad prečnikom su pravi). Duž PQ je tetiva kruga, pa njena simetrala prolazi kroz centar kruga, tj. sadrži središte stranice AB.

448. a) Po uslovu je $\sphericalangle BAP = 90^\circ$ i $\sphericalangle BHP = 90^\circ$, pa krug prečnika BP prolazi kroz tačke A i H.

b) Kako je $AM = AP = AB$ i $AP \perp MB$, zaključujemo da su trouglovi MAP i BAP pravougli jednakokraki i $\sphericalangle MPA = 45^\circ$, $\sphericalangle ABP = 45^\circ$, odakle je $\sphericalangle MPA = \sphericalangle ABP$. Duž AP je tetiva kruga opisanog oko četvorougla $ABHP$, $\sphericalangle ABP$ je odgovarajući tetivni ugao, pa je $\sphericalangle MPA$ tangentni ugao i prava MP je tangenta.

449. Neka su M, N, P redom središta stranica BC, CA, AB pravouglog trougla ABC, slika levo. Srednja linija MN paralelna je kateti AB, a srednja linija PM paralelna je kateti AC, pa je četvorougao $MNAP$ pravougaonik. Oko ovog pravougaonika može se opisati krug čiji je prečnik dijagonala (duži CM i NP). Kako je $\sphericalangle ADM$ prav, a AM prečnik, sledi da je i tačka D na tom krugu.

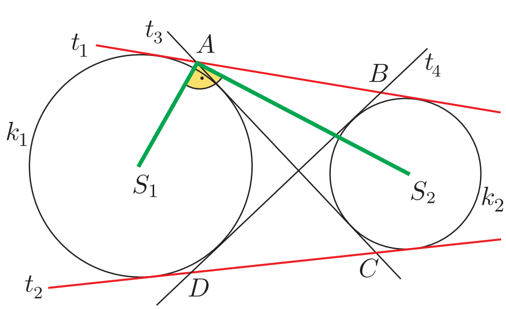


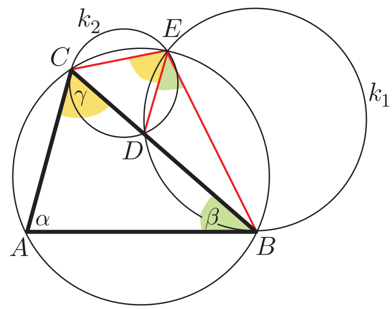


450. Uglovi BB_1C i BC_1C su pravi, pa krug prečnika BC prolazi kroz tačke B_1 i C_1. Duži MB_1 i MC_1 su poluprečnici ovog kruga, pa je trougao MB_1C_1 jednakokraki. Trougao ACC_1 je pravougli, pa je $\sphericalangle ACC_1 = 30^\circ = \sphericalangle B_1CC_1$. Ovaj ugao je periferijski nad tetivom B_1C_1, pa je odgovarajući centralni ugao $\sphericalangle B_1MC_1 = 60^\circ$. Dakle, MB_1C_1 je jednakostranični trougao.

451. Neka je F tačka, takva da je četvorougao $ABFE$ pravougaonik. Tada je $EF = AB = CD$ i $EF \| AB$, pa je četvorougao $CDEF$ paralelogram i $CF = DE$, poslednja slika desno. Sledi da su trouglovi ADE i BCF podudarni (jednake stranice), pa je $\sphericalangle AED = \sphericalangle BFC$. Primetimo da su uglovi BCE i BFE pravi, što znači da krug prečnika BE prolazi kroz tačke C i F. U tom krugu su uglovi BFC i BEC nad istom tetivom BC. Zavisno od toga da li su E i F sa iste ili sa raznih strana prave BC, biće $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BEC$ ili $\sphericalangle BFC + \sphericalangle BEC = 180°$. Iz uslova $\sphericalangle AED = \sphericalangle BFC$, sledi traženi zaključak.

452. Treba dokazati da je $\sphericalangle S_1AS_2 = 90°$, slika dole. Prava S_1A je simetrala ugla između tangenti t_1 i t_3, a prava S_2A je simetrala njemu uporednog ugla. Kako su ova dva ugla suplementna, ugao između simetrala je prav, tj. $\sphericalangle S_1AS_2 = 90°$. Ovo potvrđuje da je tačka A na krugu prečnika S_1S_2 (teme pravog ugla nad prečnikom). Slično dokazujemo i tvrđenje za tačke B, C i D.





453. Slično **primeru D**.

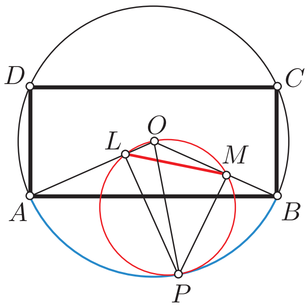
454. Neka su M i N podnožja visina AM i BN. Četvorougao $ABMN$ je tetivni, upisan u krug prečnika AB. Opišemo krug oko ovog četvorougla, i problem se svodi na prethodni zadatak. (Ako je tangenta u tački C paralelna sa MN, onda je poluprečnik u C normalan na MN, itd.)

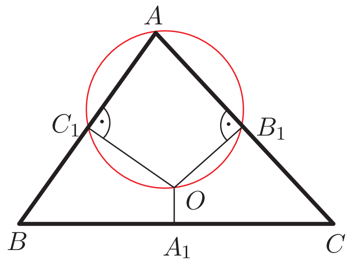
455. Ugao $\beta = \sphericalangle ABC$ jednak je uglu BED, a ugao $\gamma = \sphericalangle ACB$ jednak je uglu CED (tangentni i tetivni uglovi), pa je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BED + \sphericalangle CED = \alpha + \beta$, slika gore desno. Dakle: $\sphericalangle BEC + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 180°$, pa je četvorougao $ABEC$ tetivni, što znači da tačka E pripada opisanom krugu trougla ABC.

456. Biće dovoljno dokazati da je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle CDB$, jer tada na osnovu jednakosti $\sphericalangle CDB + \sphericalangle EDF = 180°$, sledi $\sphericalangle CGF + \sphericalangle EDF = 180°$.

U trouglu ACD ugao CDB je spoljašnji, pa je $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACF = \sphericalangle CBA + \sphericalangle AGF = \sphericalangle CGA + \sphericalangle AGF = \sphericalangle CGF$, što je i trebalo dokazati. (Koristili smo periferijske uglove nad istim ili nad jednakim lukovima.)

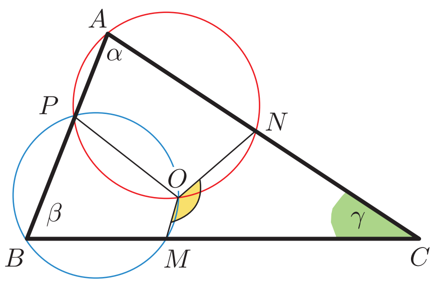
457. Centar kruga opisanog oko pravougaonika je presečna tačka O dijagonala, sledeća slika. Četvorougao $LOMP$ je tetivni, jer su uglovi OLP i OMP pravi. Dakle, $\sphericalangle LPM = 180° - \sphericalangle AOB$, pa je ugao LPM nepromenljiv, bez obzira na izbor tačke P. Prečnik kruga opisanog oko četvorougla $LOMP$ jednak je poluprečniku kruga opisanog oko pravougaonika, pa je pri konstantnoj veličini periferijskog ugla LPM i odgovarajuća tetiva LM konstantna.

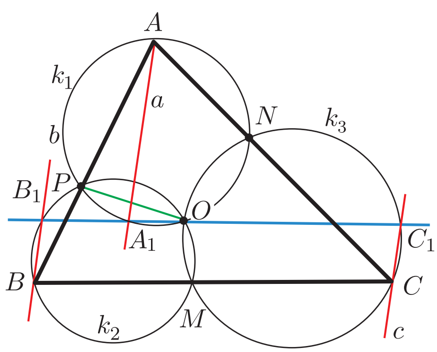




458. Posmatrajmo četvorougao AB_1OC_1. Prave OB_1 i OC_1 su simetrale stranica, pa su uglovi AB_1O i AC_1O pravi i krug prečnika AO prolazi kroz tačke B_1 i C_1. Slično se dokaže i da ostala dva kruga imaju prečnike BO i CO, slika gore.

459. Označimo sa O presečnu tačku kruga opisanog oko trougla ANP i kruga opisanog oko trougla BMP. Četvorouglovi $ANOP$ i $BMOP$ su tetivni, pa je $\sphericalangle NOP = 180^\circ - \alpha$ i $\sphericalangle MOP = 180^\circ - \beta$, slika dole levo. Obratimo sad pažnju na četvorougao $CMON$. Vidimo da je $\sphericalangle MON = 360^\circ - \sphericalangle NOP - \sphericalangle MOP = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta$. Zbog toga je $\sphericalangle MON + \sphericalangle MCN = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, što znači da je četvorougao $CMON$ tetivni, a to znači da krug opisan oko trougla CMN prolazi kroz zajedničku tačku O krugova opisanih oko trouglova ANP i BMP.

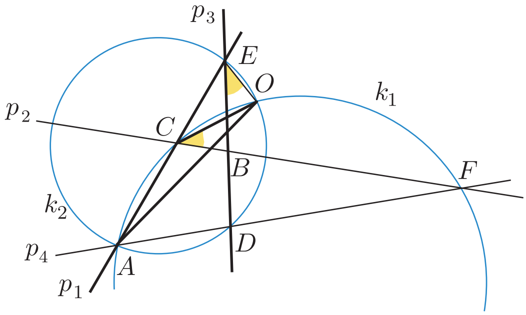


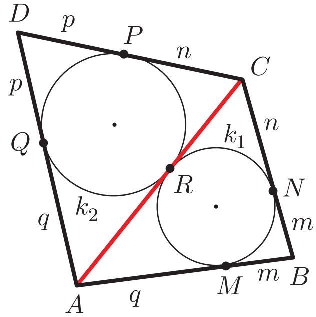


460. Dokažimo, na primer, da tačke O, A_1 i B_1 pripadaju jednoj pravoj, slika gore. (Iz dokaza prethodnog zadatka poznato nam je da postoji zajednička tačka O triju datih krugova.) U krugu k_1 jednaki su uglovi A_1AP i POA_1 (nad istim lukom). Slično, u krugu k_2 jednaki su uglovi POB_1 i PBB_1. Ali, $\sphericalangle A_1AP = \sphericalangle B_1BP$, jer je $AA_1 \| BB_1$. Otuda zaključujemo da je $\sphericalangle POA_1 = \sphericalangle POB_1$, što znači da su O, A_1 i B_1 tačke na istom kraku. Slično utvrdimo da C_1 pripada pravoj OA_1.

461. Neka su presečne tačke A, B, C, D, E, F, ovih pravih raspoređene kao na slici dole levo. Neka su k_1 i k_2 krugovi opisani oko trouglova ACF i ADE i neka je O njihova druga zajednička tačka. Dokažimo da krug opisan oko trougla BCE prolazi kroz tačku O. Dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle BCO = \sphericalangle BEO$. Zaista, uzimajući u obzir jednakost periferijskih uglova nad istom tetivom, dobijamo niz jednakosti: $\sphericalangle BCO = \sphericalangle FCO = \sphericalangle FAO = \sphericalangle DAO = \sphericalangle DEO = \sphericalangle BEO$.

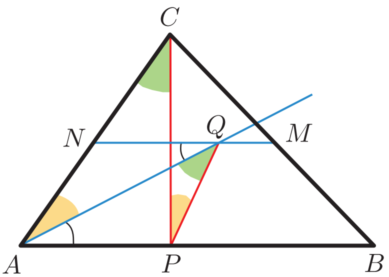
Slično dokazujemo i da krug opisan oko trougla BDF prolazi kroz tačku O.

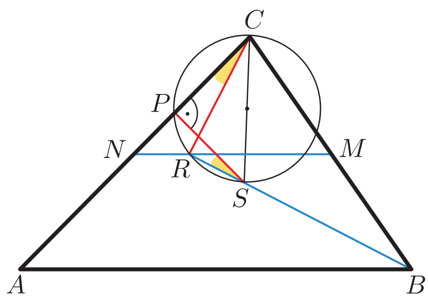




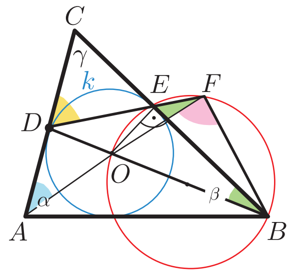
462. Treba dokazati da su zbirovi naspramnih stranica jednaki: $AB + CD = BC + AD$, Koristimo jednakost tangentnih duži. Prema slici gore desno krugovi k_1 i k_2 dodiruju stranice i dijagonalu AC u tačkama: M, N, P, Q i R. Otuda imamo jednakosti: $AM = AR = AQ = q$, $BM = BN = m$, $CN = CR = CP = n$ i $DP = DQ = p$. Otuda je: $AB + CD = AM + MB + CP + PQ = q + m + n + p$ i $BC + DA = BN + NC + DQ + QA = m + n + p + q$. To pokazuje da je $AB + CD = BC + DA$, što znači da je $ABCD$ tangentni četvorougao.

463. Uglovi BAQ i AQN jednaki su, jer je srednja linija MN paralelna sa AB. Simetrala AQ polovi ugao $\sphericalangle BAC = 50^\circ$, pa je $\sphericalangle NAQ = 25^\circ = \sphericalangle BAQ$. Dakle, $\sphericalangle NAQ = \sphericalangle AQN$, pa je trougao ANQ jednakokraki i $NQ = AN$. Sem toga je i $AN = NC$, pa krug prečnika AC prolazi kroz tačku Q. Ugao APC je prav, pa je i P na tom krugu. Zbog toga je $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle CAQ = 25^\circ$ (nad istim lukom), slika levo. Slično je i $\sphericalangle AQP = \sphericalangle ACP = 40^\circ$.





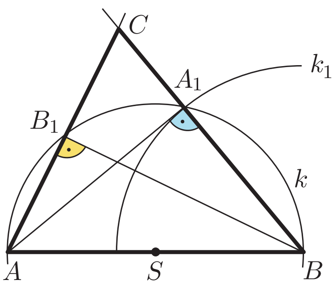
464. Slično prethodnom zadatku zaključimo da je $MB = MC = MR$, pa je $\sphericalangle CRS = 90^\circ$, slika gore desno. Kako je i $\sphericalangle CPS = 90^\circ$, zaključujemo da krug prečnika CS prolazi kroz tačku P i R. Zbog toga je $\sphericalangle PCR = \sphericalangle PSR$ (uglovi nad lukom RS).

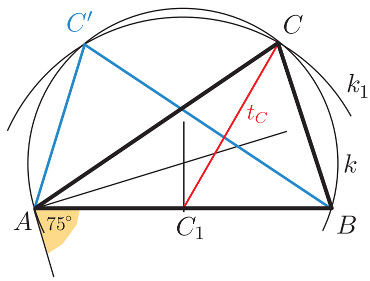


465. Za unutrašnje uglove trougla ABC važi: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$. Trougao CDE je jednakokraki, jer su jednake tangentne duži upisanog kruga, $CD = CE$. Onda je $\sphericalangle CDE - \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta)) = \frac{1}{2}(180^\circ - 180^\circ + \alpha + \beta) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Ovaj ugao je spoljašnji za trougao ADF, pa je $\sphericalangle CDE = \sphericalangle DAF + \sphericalangle DFA$, odnosno: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle DFA$. Sledi da je $\sphericalangle DFA = \frac{\beta}{2}$. Međutim, i $\sphericalangle OBE = \frac{\beta}{2}$, pa je četvorougao $BFEO$) tetivni i oko njega se može opisati krug. U ovom krugu uglovi BOE i BOF su nad prečnikom OB, pa je $\sphericalangle AFB = 90^\circ$.

466. Analiza. Uglovi AA_1B_1 i AB_1B su pravi, pa kružnica prečnika AB prolazi kroz tačke A_1 i B_1.

Konstrukcija. Konstruišemo duž AB, pa kružnicu k prečnika AB, slika dole levo. Zatim, konstruišemo kružnicu $k_1(B,\, 3\text{ cm})$, koja u preseku sa k određuje tačku A_1, itd. Poluprave BA_1 i AB_1 seku se u C.



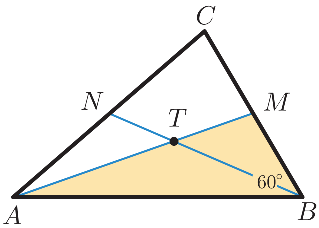


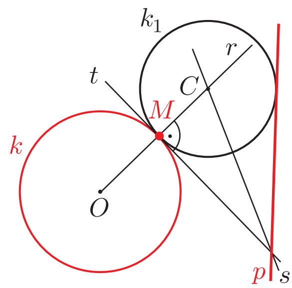
467. Prema rešenju prethodnog zadatka, duž A_1B_1 je tetiva kruga k, kome je stranica AB prečnik.

Konstrukcija. Simetrala tetive A_1B_1 seče pravu p u centru S kruga k, kome je poluprečnik duž SA_1. Konstruišemo kružnicu k, koja pravu p seče u tačkama A i B, itd.

468. Budući da je data stranica c i ugao $\gamma = 75^\circ$ naspram ove stranice, konstruisaćemo najpre luk k, koji odgovara tangentom uglu pd 75° (postupamo slično **primerima A)** i **B)**), slika gore desno. Zatim, konstruišemo kružnicu $k_1(C_1,\, 25\text{ mm})$, gde je C_1 središte stranice AB. U preseku sa k dobijamo tačke C i C', pa imamo dva rešenja, trouglove ABC i ABC'.

469. Analiza. Neka je ABC trougao sa uglom $\beta = 60^\circ$ i težišnim linijama $AM = 4,5$ cm i $BN = 36$ mm. Uočavamo da se može konstruisati trougao ABM, slika dole levo (data stranica AM i naspramni ugao $\sphericalangle ABM = 60^\circ$). Za dalju konstrukciju koristimo težište T, presek duži AM i BN. Pritom je $BT = \frac{2}{3}BN = 24$ mm. Dalje, kad imamo trougao ABM, lako se konstruiše teme C.

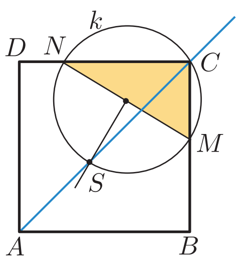


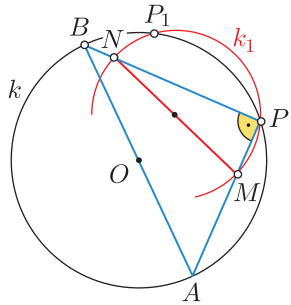


470. Analiza. Neka je t tangenta date kružnice u tački M. Traženi krug dodiruje i pravu t (zajednička tangenta). Centar C traženog kruga je presečna tačka simetrale s ugla određenog datom pravom p i tangentom t i prave $r = OM$, slika gore.

471. Slično prethodnom zadatku: prava a je kao tangenta u prethodnom zadatku.

472. Analiza. Trougao MCN je pravougli, slika dole levo, pa krug k nad prečnikom MN prolazi kroz teme C. Dijagonala polovi ugao kvadrata, pa dijagonala AC prolazi kroz središte S luka MSN. Dakle, možemo konstruisati krug k, tačku S, itd.





473. Analiza. Ako je P tražena tačka, takva da je duž AB prečnik datog kruga k, onda je $\sphericalangle APB = 90^\circ$ (nad prečnikom). Onda i kružnica nad prečnikom MN sadrži tačku P, slika gore desno.

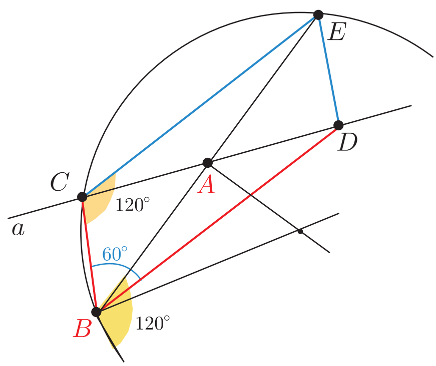
Konstrukcija. Kružnica k_1 nad prečnikom MN, seče kružnicu k u traženoj tački P. Moguća su dva rešenja, kao na slici (tačke P i P_1). Ako k_1 dodiruje k imamo jedno rešenje, a može se desiti i da nema rešenja.

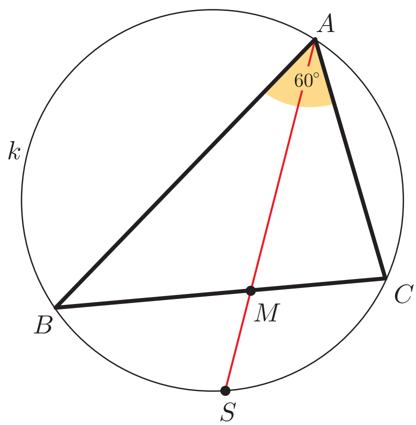
474. Tangentne duži iz C i D na traženi krug biće jednake ako su C i D jednako udaljene od centra kruga. Centar S traženog kruga je presečna tačka simetrala duži AB i CD. Rešenja nema ako se simetrale ne seku ili ako su C i D u krugu poluprečnika SA.

475. Ako iz centra kruga upisanog u dati trougao spustimo normale na stranice, dobićemo tačke kroz koje prolaze traženi krugovi. Koristimo poznatu činjenicu da su tangentne duži iz jedne tačke na dati krug jednake među sobom.

476. Analiza. Neka su tačke A, B, C i D kao što se traži, slika dole levo. Uočimo još i tačku E, takvu da je A središte duži BE. Onda se BE i CD polove i tačka A je presek dijagonala paralelograma $BCDE$. Kako je $\sphericalangle CBD = 60°$, biće $\sphericalangle BCE = 120°$.

Konstrukcija. Odredimo tačku E, tako da je $AE = AB$. Zatim, kao u **primeru A)**, koristeći jednakost tangentnog i odgovarajućeg tetivnog ugla, konstruišemo luk k kome odgovara tetivni ugao od $120°$. Ovaj luk seče pravu a u tački C, itd.



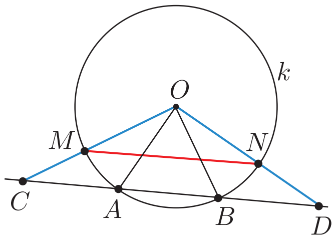


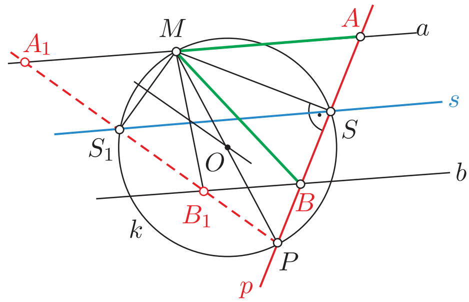
477. Analiza. U odeljku o sličnim figurama (odeljak 3.2), u **primeru C)**, videli smo da simetrala unutrašnjeg ugla trougla deli naspramnu stranicu u razmeri drugih dveju stranica. U našem zadatku je $AB : AC = 2 : 1$, pa na slici gore desno je $BM : CM = 2 : 1$. gde je AM simetrala ugla $\sphericalangle BAC = 60°$. Ova simetrala polovi manji luk BC opisane kružnice. Opisanu kružnicu možemo konstruisati kao u **primeru A)**, jer imamo $BC = 4,5$ cm i $\sphericalangle BAC = 60°$.

Konstrukcija. Konstruišemo duž $BC = 4,5$ cm i opisani krug. Na duži BC odredimo tačku M, tako da je $BM : MC = 2 : 1$ (znači $BM = 3$ cm, $MC = 1,5$ cm). Zatim, iz središta S manjeg luka konstruišemo simetralu SM ugla α. Ona seče kružnicu k u tački A.

478. Koristićemo Talesovu teoremu. Na pravoj AB odredimo tačke C i D, različite od A i B, tako da je $AC = AB$ i $AB = BD$, sledeća slika levo. Neka OC seče k u M i OD seče k u N. Lako se dokazuje da je MN tražena tetiva.

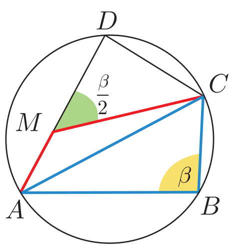
479. Trougao ABM treba da bude jednakokraki, pa njegova visina iz M polovi osnovicu AB. Onda središte S duži AB leži na pravoj koja polovi rastojanje između datih pravih a i b (paralelna je sa njima). Neka je to prava s, koja je obojena

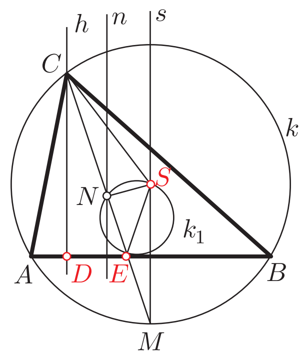




plavo na slici gore desno. Tada je $\sphericalangle MSP = 90^\circ$, pa krug prečnika MP seče pravu s u tački S. Tražena prava je $p = PS$. Mogu biti dva rešenje. Na slici, drugo rešenje je prava PS_1.

480. Analiza. Ako se u četvorougao $ABCD$ može upisati krug, onda je $AB + CD = BC + AD$ i za $AB > CD$ važi jednakost $AB - BC = AD - CD$. Neka je M tačka stranice AD, takva da je $MD = CD$, slika dole levo. Tada je $AM = AD - CD$, a trougao CDM je jednakokraki. Kako je $ABCD$ tetivni četvorougao, biće $\sphericalangle CDM = 180^\circ - \beta$, pa je $\sphericalangle CMD = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CDM) = \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - \beta)) = \frac{\beta}{2}$. Sada možemo konstruisati tačku M, jer znamo da je $AM = AB - BC$ (jer važi: $AD - CD = AB - BC$) i $\sphericalangle AMC = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$. (Postupamo slično **primeru A)**.)

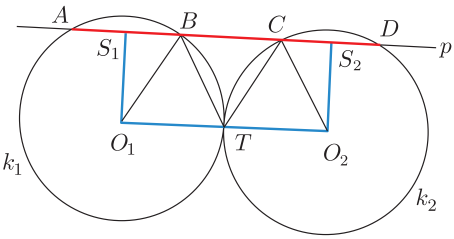


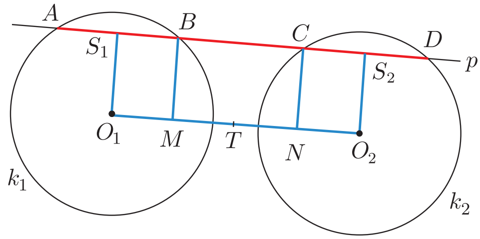


481. Analiza. Neka je ABC traženi trougao, slika gore. Date su tačke D, E i S. Znamo da se simetrale ugla ABC i simetrala s stranice AB seku u tački M opisane kružnice. (Tačka M je središte manjeg luka AB.) Duži SC i SM su poluprečnici kružnice k i trougao SCM je jednakokraki. Dakle, podnožje N normale iz S na CM je središte duži CM. Ugao SNE je prav, pa kružnica prečnika SE prolazi kroz N. Prava n kroz N, paralelna visini CD, jednako je udaljena od pravih CD i SM.

Konstrukcija. Konstruišemo pravu DE i normale na ovu pravu kroz tačke D i S. To su prave koje su na slici označene sa h i s. Zatim, konstruišemo pravu n jednako udaljenu od h i s i krug k_1 nad prečnikom SE, itd.

482. Analiza. Neka su A, B, C i D tačke preseka prave p sa kružnicama k_1 i k_2, takve da je $AB = BC = CD$, slika dole levo. Podnožja normale iz centara O_1 i O_2 datih kružnica na pravu p predstavljaju središta tetiva AB i CD. Tada je četvorougao $O_1O_2S_1S_1$ pravougaonik. Pritom je $O_1O_2 = S_1S_2 = 2r = 2AB$. Dakle, trouglovi O_1TB, BTC i TO_2C su jednakostranični. (Tačka T je dodirna tačka kružnica k_1 i k_2.) Sada je konstrukcija jednostavna.

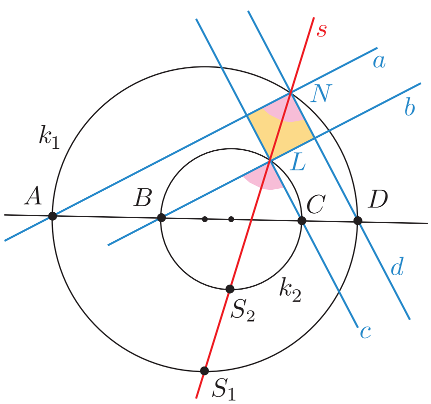


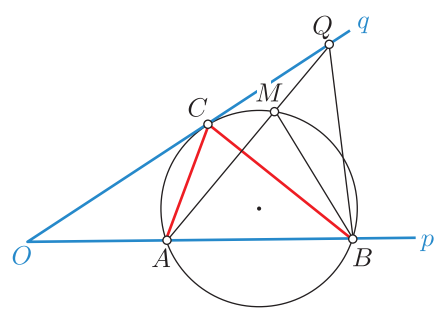


483. Slično prethodnom zadatku. Rešava se na isti način ako se kružnice k_1 i k_2 seku i ako nemaju zajedničkih tačaka. Pravougaonik $O_1O_2S_2S_1$ iz prethodnog zadatka omogućava lako rešavanje konstrukcije. I ovde je $O_1O_2 = 2AB$, a sa T označavamo središte duži O_1O_2. Konstruišemo tačke M i N, središta duži O_1T i O_2T. Normale povučene kroz M i N na pravu O_1O_2 seku k_1 i k_2 u tačkama B i C. Tražena prava je $p = BC$.

484. Analiza. Uočimo na slici dole levo tačku N kao presek pravih a i d i tačku L kao presek pravih b i c. Uglovi AND i BLC su pravi, pa kružnica k_1 nad prečnikom AD sadrži tačku N, a kružnica k_2 nad prečnikom BC sadrži tačku L. Dijagonala LN polovi unutrašnje uglove $\sphericalangle L$ i $\sphericalangle N$ kvadrata, pa prolazi kroz tačke S_1 i S_2, središta polukrugova ispod prave AB.

Konstrukcija. Konstruišemo kružnice k_1 i k_2, pa tačke S_1 i S_2. Prava S_1S_2 seče k_1 i k_2 u tačkama N i L. Time su određene prave a, b, c i d.

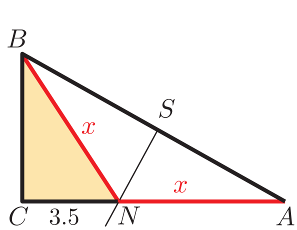


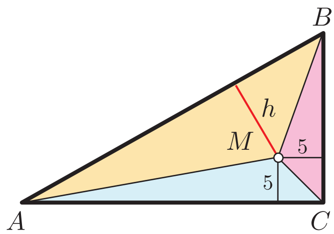


485. Neka je k kružnica koja sadrži tačke A i B i dodiruje krak Oq, slika desno. (Za konstrukciju kružnice koristimo potenciju tačke O, jer je $OC^2 = OA \cdot OB$, pa prvo odredimo tačku C.) Tačka C je tražena tačka. Zaista, neka je Q, $Q \neq C$, ma koja tačka kraka Oq i neka AQ seče k u tački M. U trouglu BMQ je $\sphericalangle AMB$ spoljašnji, pa je $\sphericalangle AMB > \sphericalangle AQB$, za svako $Q, \in Oq$ i $Q \neq C$. Kako je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AMB$ (nad istim lukom) to je $\sphericalangle ACB > \sphericalangle AQB$, za $Q \neq C$.

9.6. Merenje ravnih figura

486. Iz pravouglih trouglova ABC i BCN dobijamo: $AB^2 - AC^2 = BC^2 = BN^2 - CN^2$. Prava SN je simetrala duži AB, pa je $AN = BN$. Neka je $AN = x$, slika dole levo. Tada prethodna jednačina, sređena, daje: $20^2-(x+3,5)^2 = x^2-3,5^2$, a odavde je $2x^2 + 7x = 400$. Pomnožimo sa 8 i dodamo 49 na levu i desnu stranu, pa imamo: $(4x + 7)^2 = 57^2$. Konačno je $x = 12,5$ cm, itd. Rezultat: $P = 96$ cm^2.

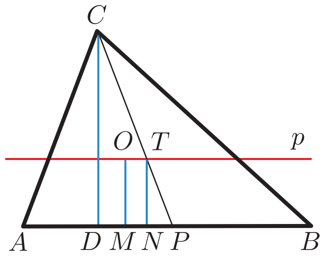


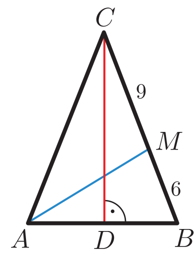


487. Koristeći se Pitagorinom teoremom dobijamo hipotenuzu datog pravouglog trougla: $AB = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$. Duži MA, MB i MC dele dati trougao na tri trougla, čije površine možemo izračunati, slika gore desno. Zbir ove tri površine jednak je površini datog trougla. Trouglovi ACM i BCM imaju, prema datim podacima, visine 5 cm, a visina h trougla ABM je traženo odstojanje. Dakle, iz: $\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 5 + \frac{1}{2}30 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot h = \frac{1}{2}30 \cdot 40$, dobijamo: $175 + 25b = 600$, pa je $h = 17$.

488. Neka je CD visina, O centar upisanog kruga, T težište trougla ABC i M i N podnožja normala iz O i T na stranicu AB, sledeća slika. Iz formule za poluprečnik upisanog kruga, površina trougla je: $P = OM \cdot s = \frac{1}{2}OM(AB + BC + AC) = \frac{3}{2}OM \cdot AB$, jer je po uslovu $BC + AC = 2AB$. Takođe je $P = \frac{1}{2}AB \cdot CD$, pa iz $\frac{3}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}AB \cdot CD$ sledi: $OM = \frac{1}{3}CD$. Kako je T težište, pa je $PT : PC = 1 : 3$, a prema Talesovoj teoremi je $TN : CD = PT : PC = \frac{1}{3}$, to je i $TN = \frac{1}{3}CD$. Dakle $OM = NT$, pa je četvorougao $MNTO$ paralelogram i $OT \| AB$.

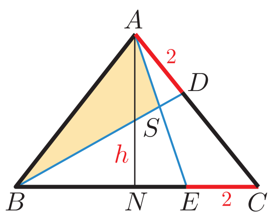
489. Kako je $a : b = h_b : h_a = 24 : 20 = 6 : 5$, to je dati trougao sličan trouglu čija je osnovica $a_1 = 6$ cm i krak $b_1 = 5$ cm. Jednostavno se nalazi visina koja odgovara osnovici sličnog trougla: $h_1 = 4$ cm, pa ovaj trougao ima površinu $P_1 = 12$ cm^2. Iz $P : P_1 = h_a^2 : h_b^2$, odnosno iz $P : 12 = 20^2 : 4^2$, dobijamo površinu $P = 300$ cm^2.

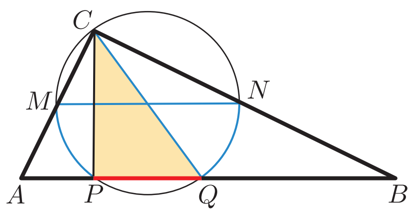




490. Na osnovu osobine simetrale ugla je $AB : AC = 6 : 9$, pa kako je $AC = BC = 15$ cm, sledi da je $AB = 10$ cm, slika gore desno. Dalje je visina $CD = 10\sqrt{2}$ cm, pa je površina $P = 50\sqrt{2}$ cm^2. U slučaju $BM : CM = 9 : 6$, biće $AB = 22,5$ cm, $h = \dfrac{15}{4}\sqrt{7}$, pa je $P = \dfrac{675}{16}\sqrt{7}$ cm^2.

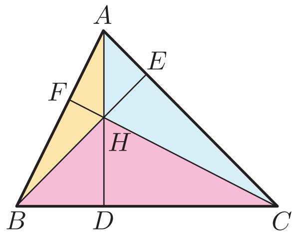
491. Visinu trougla ABC lako izračunamo: $h = 4$ cm. Površina trougla ABE je 8 cm^2, slika dole levo. Kako je $AD : DC = 2 : 3$ i $BE : EC = 2 : 1$, kao u **primeru B** iz **odeljka 3.1**, dokažemo da je tačka S središte duži AE. Dakle, duž BS polovi površinu trougla ABE, pa je tražena površina $P = 4$ cm^2.

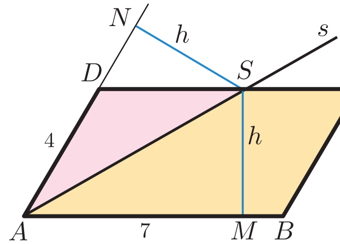




492. Dati pravougli trougao ima hipotenuzu AB dužine 100 cm, pa duž MN, kao srednja linija trougla, ima dužinu 50 cm, slika gore. Dati krug sadrži teme C pravog ugla, jer je ugao nad prečnikom prav. Tačka koja je simetrična sa C u odnosu na pravu MN pripada hipotenuzi, i kako je krug simetričan u odnosu na svoj prečnik, a duž MN je prečnik datog kruga, to ova tačka pripada krugu. Zapravo, to je jedna od presečnih tačaka kruga i hipotenuze, recimo da je to tačka P. Zbog simetrije je duž CP normalna na MN, a samim tim i na AB, pa je ugao CPQ prav. Otuda sledi da je duž CQ prečnik kruga i da ima dužinu 50 cm. Dužinu duži CP izračunaćemo pomoću površine trougla ABC, jer je to visina koja odgovara hipotenuzi. Dakle: $P = \dfrac{60 \cdot 80}{2} = 2400$ i $\dfrac{AB \cdot CP}{2} = 2400$, odnosno $CP = \dfrac{4800}{100} = 48$ cm. Sada u pravouglom trouglu CPQ imamo: $PQ = \sqrt{CQ^2 - CP^2} = \sqrt{196} = 14$. Dakle, $PQ = 14$ cm.

493. Iz uslova $AH : HD = 1 : 1$, sledi da je površina trougla BCH jednaka $\dfrac{P}{2}$, gde je P površina trougla ABC, sledeća slika levo. Slično izračunamo da je površina trougla ACH jednaka $\dfrac{P}{3}$. Ostaje da je površina trougla ABH jednaka $P - \dfrac{P}{2} - \dfrac{P}{3} = \dfrac{P}{6}$, pa je $CH : HF = 5 : 1$.

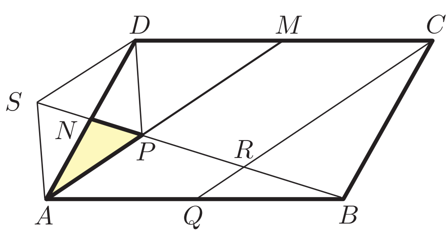


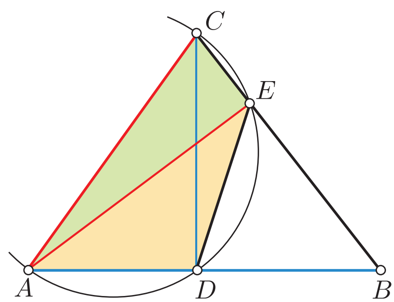


494. Neka je S tačka u kojoj simetrala s ugla BAD seče stranicu CD, slika gore. Kako su tačke simetrale ugla jednako udaljene od krakova, to je $SM = SN = h$, pa je površina paralelograma $P = 7h$ cm^2, a površina trougla ADS je $P_1 = 2h$ cm^2. Površine delova paralelograma odnose se kao $P_1 : P_2 = 2 : 5$.

495. Neka su M, N, P, Q redom središta stranica AB, BC, CD, DA. Lako se dokaže da je četvorougao $MNPQ$ paralelogram i da su njegove stranice paralelne dijagonalama četvorougla $ABCD$. Duži MP i NQ su dijagonale paralelograma $MNPQ$, pa kako su one po pretpostavci jednake, sledi da je $MNPQ$ zapravo pravougaonik. Kako je $MN \| AC$ i $NP \| BD$, sledi da je $AC \perp BD$, pa površina četvorougla $ABCD$ iznosi $P = \dfrac{1}{2} d_1 d_2 = 1$ m^2.

496. Neka je S tačka prave BN, takva da je N središte duži PS, slika dole levo. Duži AD i PS se polove, pa je četvorougao $APDS$ paralelogram. Neka je Q središte stranice AB. Zbog $AQ = MC$ i $AQ \| MC$ sledi da je četvorougao $AQCM$ paralelogram. Dakle, $CQ \| AM \| DS$.





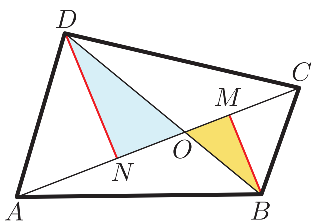
Kako je $AQ = QB$, po Talesovoj teoremi je $BR = RP$. Takođe, iz $CM = MD$ sledi da je $RP = PS$, tj. $BR = RP = PS$. Duž PN je, prema tome, jednaka $\dfrac{1}{5} BN$, pa je i visina trougla APN iz temena P jednaka $\dfrac{1}{5}$ visine h_b paralelograma. Po

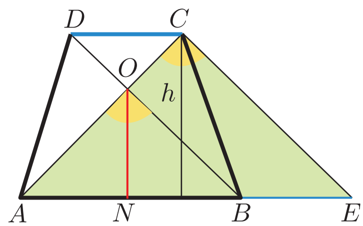
konstrukciji je $AN = \frac{1}{2}AD$, pa je površina trougla ANP jednaka:
$P_{ANP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{5}h_b = \frac{1}{20}P_{ABCD}$.

497. Ugao nad prečnikom je prav, pa su presečne tačke polukruga sa stranicama poslednja AB i BC podnožja visina CD i AE, slika. Koristeći se Pitagorinom teoremom iz trougla ACD izračunamo: $AC = 10$ cm. Iz površine trougla ABC dobijamo: $\frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}BC \cdot AE$, odnosno: $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot AE$. Odavde je $AE = 9,6$ cm. Onda iz trougla ACD nalazimo $CE = 2,8$ cm. Zatim je $BE = BC - CE = 7,2$ cm. Površina trougla ADE je polovina površine trougla ABE, jer je $AD = BD$. Tražena površina predstavlja zbir površina trouglova ACE i ADE: $P = \frac{1}{2}CE \cdot AE + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BE \cdot AE\right) = 30,72 \text{ cm}^2$.

498. Koristeći se podudarnim trouglovima EBF, FCG, GDH i HAE lako se dokaže da su stranice četvorougla $EFGH$ jednake među sobom i da je npr. $\sphericalangle EFC = 90°$. Dijagonala ovog kvadrata je $d = a + a\sqrt{3}$, pa je $P = \frac{1}{2}d^2 = a^2(2+\sqrt{3})$.

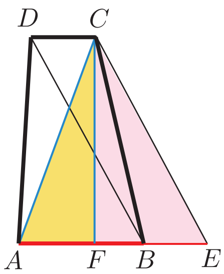
499. Neka je $ABCD$ dati četvorougao, kome dijagonala AC polovi površinu: $\frac{1}{2}AC \cdot BM = \frac{1}{2}AC \cdot DN$, slika dole. Odavde sledi daje $BM = DN$, a onda su pravougli trouglovi BOM i DON podudarni i $BO = DO$. Slično se dokaže i da je $AO = OC$, pa se dijagonale AC i BD polove. Sledi da je $ABCD$ paralelogram.

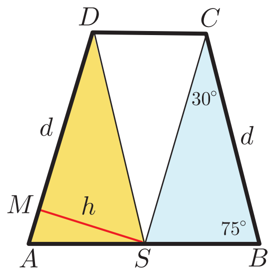




500. Neka je E tačka na produžetku osnovice AB, takva da je $BE = CD$, slika gore. Četvorougao $BECD$ je paralelogram, pa je $CE = BD = 6$ cm i $\sphericalangle ACE = 90°$. Kako je $AE = AB + BE$, to je površina trougla ACE jednaka površini trapeza: $P = \frac{1}{2}AE \cdot h = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$. Trougao ACE je polovina kvadrata čija je stranica data dijagonala $AC = 6$ cm, pa je $P = 18 \text{ cm}^2$.

501. Na sledećoj slici odredili smo tačku E tako da je $BE = CD$. Neka je CF zajednička visina trougla AEC i datog trapeza. Iz pravouglih trouglova AFC i CEF izračunamo dužine AF i FE. Imamo: $AF^2 = AC^2 - CF^2 = 625 - 576 = 49$, pa je $AF = 7$ cm. Dalje je: $EF^2 = CE^2 - CF^2 = 676 - 576 = 100$, pa je $EF = 10$ cm. Otuda dobijamo: $AF + FE = AE = 17$ cm, tj. $AB + CD = 17$ cm. Površina trapeza je $P = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{17}{2} \cdot 24 = 204 \text{ cm}^2$.

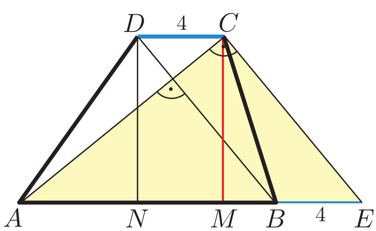


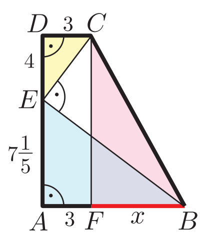


502. Neka je S središte veće osnovice AB, slika gore desno. Četvorouglovi $ASCD$ i $BCDS$ su paralelogrami, jer je u oba slučaja stranica CD paralelna i jednaka svojoj naspramnoj stranici. Zbog toga je $CS = d$ i $DS = d$, pa su ASD, BCS i CDS tri podudarna jednakokraka trougla. Računaćemo površinu trougla ASD: $P_1 = \frac{1}{2}d \cdot h$, gde je $h = SM$ visina. Ugao pri vrhu trougla ASD je $30°$, jer je $180° - 2 \cdot 75° = 30°$. U pravouglom trouglu SDM, koji predstavlja polovinu jednakostraničnog trougla, hipotenuza je $SD = d$, a manja kateta je $SM = \frac{d}{2}$. Prema tome, $P_1 = \frac{1}{2}d \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^2}{4}$. Površina datog trapeza je $P = 3P_1 = \frac{3}{4}d^2$.

503. Koristićemo sliku datu uz rešenje **zadatka 500**. Neka je m srednja linija trapeza. Iz $P = m \cdot h = m^2$ sledi da je $h = m$. Kako je $AE = 2m$, sledi da je trougao ACE jednakokraki pravougli. Zaključujemo da je onda i trougao ABO pravougli jednakokraki, pa je traženo rastojanje $ON = \frac{a}{2}$.

504. Odredimo tačku E, kao u **zadatku 500**. Neka su M i N podnožja normala iz C i D na AE, sledeća slika. Kako je $\sphericalangle ACE = 90°$, površina pravouglog trougla ACE je $P = \frac{1}{2}20 \cdot 15 = 150\ \text{cm}^2$, a to je i površina trapeza. Dalje je $AE^2 = AC^2 + CE^2 = 625$, pa je $AE = 25$, što znači da je $AB = AE - BE = 21$. Iz površine trougla AEC nalazimo visinu: $\frac{1}{2}AE \cdot CM = 150$, pa je $CM = 12$ cm. Iz podudarnih pravouglih trouglova BDN i ECM izračunamo: $BN = 9\text{ cm} = EM$ (Pitagorina teorema), pa je $AN = 12$ cm i $BM = 5$ cm. Dalje, slično izračunamo krake $BC = 13$ cm i $AD = 12\sqrt{2}$ cm. Obim je $O = (38 + 12\sqrt{2})$ cm.





505. U pravouglom trouglu CDE katete su 3 cm i 4 cm, pa je hipotenuza $CE = \sqrt{9+16} = 5$ cm. Neka je CF visina trapeza, poslednja slika desno. Označimo dužinu duži BF sa x. Tada je osnovica AB dužine $3+x$, jer je $AF = CD = 3$ cm. Primenjujući Pitagorinu teoremu redom na pravougle trouglove BCF, ABE i BCE, dobijamo: $BC^2 = x^2 + \left(\frac{56}{5}\right)^2$, $BE^2 = (3+x) + \left(\frac{36}{5}\right)^2$ i $BE^2 = BC^2 - 25$. Poslednje dve jednakosti daju: $BC^2 - 25 = (3+x)^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2$, pa zamenjujući BC^2 iz prve jednakosti, dobijamo: $x^2 + \left(\frac{56}{5}\right)^2 - 25 = (3+x)^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2$. Rešenje ove jednačine je $x = \frac{33}{5}$. Sada lako izračunavamo: $AB = 3 + \frac{33}{5} = \frac{48}{5}$ i $BC = 13$ cm. Obim trapeza je $O = \frac{48}{5} + 13 + 3 + \frac{56}{5} = 36\frac{4}{5}$ cm i površina $P = \frac{1}{2}\left(\frac{48}{5} + 3\right) \cdot \frac{56}{5} = 70\frac{14}{25}$ cm^2.

506. Neka je r poluprečnik Zemlje, a h cm visina na koju se izdigne naš obruč. Iz jednakosti: $2r\pi + 100 = 2\pi(r+h)$, dobijamo $h = \frac{50}{\pi}$, a to je približno 16 cm. Dakle, mačka se može provući ispod obruča.

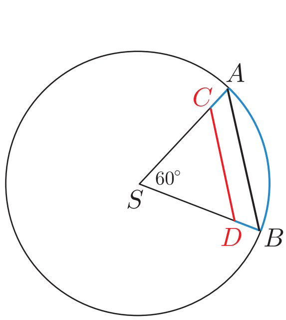
507. Krak datog trougla je $b = 4\sqrt{5}$ cm, pa je poluprečnik opisanog kruga $R = \frac{a \cdot b \cdot b}{4P} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{4 \cdot 32} = 5$ cm. Površina kruga je 25π cm^2.

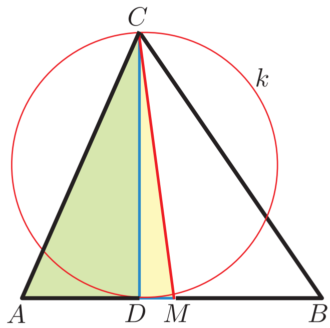
508. Ako je k opisani krug datog trougla, tada je dati ugao $\sphericalangle ACB = 150^\circ$, periferijski nad stranicom AB. S druge strane tetive AB je periferijski ugao od 30°, pa je odgovarajući centralni ugao $\sphericalangle AOB = 60^\circ$. Sledi da je poluprečnik kruga $r = 10$ cm, jer je AOB jednakostranični trougao. Površina kruga je 100π cm^2.

509. Površina trougla je 126 cm^2 (Heronov obrazac). Poluprečnik opisanog kruga je po formuli: $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4P} = \frac{13 \cdot 20 \cdot 21}{4 \cdot 126} = \frac{65}{6}$ cm, pa je tražena površina $\left(\frac{65}{6}\right)^2 \pi - 126$, što je približno 242,7 cm^2.

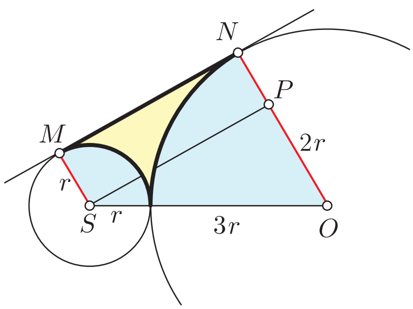
510. Dužina luka AB iznosi $l = \frac{r \cdot \pi \cdot 60}{180} = 4\pi$. Trougao SCD je jednakostranični, jer je $\sphericalangle ASB = 60^\circ$, sledeća slika levo. Ako uvedemo oznaku $CD = x$, onda je $SC = SD = CD = x$. Traženi odsečak dobijamo iz jednačine $2x = 24 + 4\pi - 2x$. Dakle $x = (6+\pi)$ cm ili približno 9.14 cm.

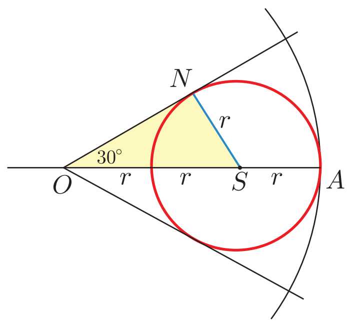
511. Površina trougla ABC je 84 cm^2 (vidi **primer A**), pa je visina $CD = 12$ cm, sledeća slika desno. Dalje, iz pravouglog trougla ACD nalazimo da je $AD = 5$ cm, pa je $DM = AM - AD = 2$ cm. Ugao CDM je prav, pa je CM prečnik traženog kruga: $CM^2 = CD^2 + DM^2 = 148$. Površina kruga k je $P = \frac{CM^2}{4}\pi = 37\pi$ cm^2.





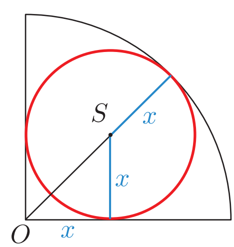
512. Neka su S i O centri datih kružnica, a M i N dodirne tačke zajedničke tangente, slika dole. Na poluprečniku ON izaberimo tačku P, tako da je četvorougao $MNPS$ pravougaonik. Sada u pravouglom trouglu OSP važi: $OS = 2OP$, pa je $\sphericalangle SOP = 60^\circ$ i $\sphericalangle OSP = 30^\circ$ i zbog toga $\sphericalangle MSO = 120^\circ$. Tražena površina je razlika površine trapeza $MNOS$ i zbira dvaju kružnih isečaka: $P = \dfrac{r+3r}{2} \cdot SP - \dfrac{1}{3}r^2\pi - \dfrac{1}{6}(3r)^2\pi$. Kako je $SP = 2r\sqrt{3}$, to je $P = \left(4r^2\sqrt{3} - \dfrac{11}{6}r^2\pi\right)$ cm^2.





513. Neka je S centar upisanog kruga i O centar kruga datog isečka, slika desno. Uočimo dodirni poluprečnik SN upisanog kruga. Tada je oštar ugao SON pravouglog trougla OSN od 30°, pa je $OS = 2SN = 2r$. Dakle, poluprečnik upisanog kruga je $r = \dfrac{1}{3}OA$. Tražena razmera je $r^2\pi : \dfrac{1}{6}(3r)^2\pi = 1 : \dfrac{9}{6} = 2 : 3$.

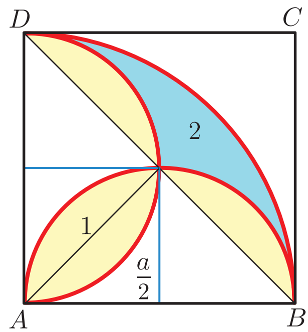
514. Neka su O i S centri velikog i upisanog kruga. Ako je x poluprečnik upisanog kruga, prema slici dobijamo uslov: $x\sqrt{2} + x = r$, odnosno $x(\sqrt{2}+1) = r$. Pomnožimo ovu jednakost sa $(\sqrt{2}-1)$ i biće $x = r(\sqrt{2}-1)$. Površina upisanog kruga je $P = r^2(3-2\sqrt{3})$ cm^2.



515. Označimo sa P_1 i P_2 površine figura 1 i 2 na sledećoj slici. Očigledno je površina P_1 prve figure zbir dva odsečka koji odgovaraju centralnom uglu od 90°. Dakle,

$P_1 = 2\left(\frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{8}\right) = \frac{a^2}{8}(\pi - 2)$ cm^2. Površina P_2 se dobija kada se od odsečka duplo većih dimenzija, sa pravim centralnim uglom, oduzme deo koji je jednak sa P_1. Dakle: $P_2 = \frac{1}{4}a^2\pi - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8}(\pi - 2) = \frac{a^2}{8}(\pi - 2) = P_1$.

516. Neka su AM i CN normale povučene iz A i C na dijagonalu BD. Označimo sa P_1, P_2, P_3 i P_4 redom površine trouglova ABO, BCO, CDO i DAO. Tada je $P_1 = \frac{1}{2}BO \cdot AM$, $P_2 = \frac{1}{2}OB \cdot CN$, $P_3 = \frac{1}{2}DO \cdot CN$ i $P_4 = \frac{1}{2}BO \cdot AM$. Neposrednom zamenom uverimo se da je $P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4$, što se i tvrdilo.



517. Neka su stranice c, a, b, a dužine odgovarajućih visina redom: h_c, h_a, h_b. Iz formula za površine trougla imamo: $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$, pa iz uslova $h_c = h_a + h_b$ dobijamo $\frac{2P}{c} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b}$, odnosno $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Odavde je $c = \frac{ab}{a+b}$. Ako je $a = 6$, onda je: $c = \frac{6b}{6+b} = \frac{6b+36-36}{6+b} = \frac{6(b+6)}{6+b} - \frac{36}{6+b} = 6 - \frac{36}{6+b}$. Dakle, treba da bude c prirodni broj i $c = 6 - \frac{36}{6+b}$. Ovo je moguće za $b = 6$, $c = 3$, ili $b = 3$, $c = 2$ ili $b = 12$, $c = 4$, ili $b = 30$, $c = 5$. Međutim, prvi slučaj otpada, jer je neophodno da trougao bude raznostran (dakle, ne može biti $b = 6$ i $a = 6$). Ostali slučajevi takođe otpadaju, jer ne zadovoljavaju nejednakosti trougla.

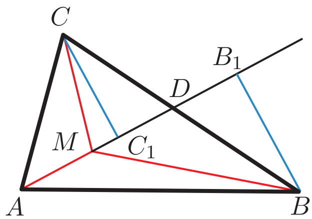
518. Neka je M središte hipotenuze i D podnožje visine h. Trougao CMD je pravougli, sa hipotenuzom CM, pa je $CD \leqslant CM$, odnosno $h \leqslant \frac{c}{2}$. Pomnožimo ovu nejednakost sa h i dobijemo: $h^2 \leqslant \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$, odakle sledi tražena nejednakost.

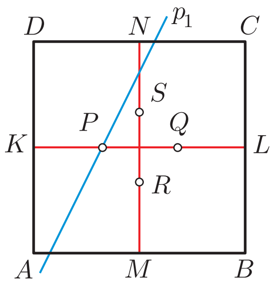
519. Slično **primeru B**, samo smeniti $x = y = z = r$.

520. Kako je $3^2 + 4^2 = 5^2$, na osnovu obrnute Pitagorine teoreme, trougao je pravougli, pa mu je površina $P = 6$ cm^2. Uz dalji tekst koristićemo sliku iz **primera B**. Pretpostavimo da postoji tačka M u trouglu ABC, takva da su njena rastojanja od stranica $x < 1$, $y < 1$ i $z < 1$. Tada je površina trougla ABC jednaka zbiru površina trouglova BCM, ACM i ABM. Dakle: $\frac{1}{2} \cdot 3x + \frac{1}{2} \cdot 4y + \frac{1}{2} \cdot 5z = 6$. Međutim, zbog $x < 1$, $y < 1$, $z < 1$ je $\frac{1}{2} \cdot 3x + \frac{1}{2} \cdot 4y + \frac{1}{2} \cdot 5z < \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 6$. Dolazimo do protivrečnosti, tj. da je $P < 6$, što potvrđuje da tražena tačka ne postoji.

521. Neka su B_1 i C_1 podnožja normala iz B i C na pravu AM (sledeća slika). Tada je $P_{ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot BB_1$ i $P_{ACM} = \frac{1}{2}AM \cdot CC_1$, odakle je $P_{ABM} + P_{ACM} =$

$\frac{1}{2}AM(BB_1+CC1_)\leqslant\frac{1}{2}AM(BD+DC)=\frac{1}{2}AM\cdot BC$. S druge strane, analogno se dobija: $P_{ACM}+P_{BCM}\leqslant\frac{1}{2}CM\cdot AB$ i $P_{ABM}+P_{BCM}\leqslant\frac{1}{2}BM\cdot AC$. Sabirajući te tri relacije dobijamo tvrđenje koje se dokazuje.





522. Pravim koje su paralelne stranicama dati pravougaonik podelimo na 15 puta 15, t.j. na 225 pravougaonika dimenzija 3 cm puta 4 cm. Dijagonale malih pravougaonika su dužine 5 cm ($3^2+4^2=5^2$), a to su prečnici krugova opisanih oko ovih pravougaonika Po Dirihleovom principu, ako 901 tačku rasporedimo na 225 pravougaonika, bar u jednom pravougaoniku mora biti najmanje pet tačaka. Krug opisan oko tog pravougaonika je traženi krug.

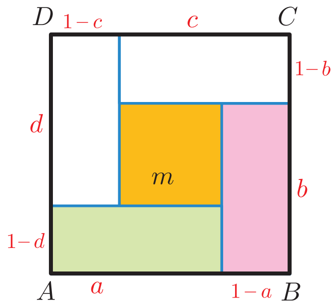
523. Slično prethodnom zadatku. Dati trougao, pravim koje su paralelne stranicama, podelimo na jednakostranične trouglove stranice 1 cm. Takvih trouglova ima $1+3+5+\cdots+37+39=400$. Po Dirihleovom principu, postoji trougao u kojem je smešteno najmanje 6 datih tačaka. Opisani krug tog trougla sadrži najmanje 6 datih tačaka, a $2R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<12$ mm.

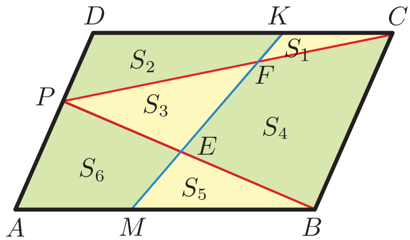
524. Neka je $ABCD$ dati kvadrat i p_1 jedna od datih pravih, slika gore desno. Kako je površina trapeza $m\cdot h$, gde je m srednja linija, a $h=a$, to će površine P_1 i P_2 trapeza određenih pravom p_1 dati jednakost $P_1:P_2=2:3$, odnosno $m_1a:m_2a=2:3$, odakle je $m_1:m_2=2:3$. Zaključujemo da tražene prave moraju proći kroz tačku P duži KL za koju je $KP:PL=2:3$ (K i L su središta stranica kvadrata) ili kroz tačku Q za koju važi $LQ:QK=2:3$, ili kroz tačku R za koju je $MR:RN=2:3$, ili kroz tačku S za koju je $NS:SM=2:3$. Međutim, ako 9 pravih prolazi kroz 4 tačke, tada najmanje 3 moraju proći kroz jednu od ovih tačaka (Dirihleov princip).

525. Ne može! Za svaku visinu važi da je manja ili jednaka jednoj stranici. Prema tome, sve stranice trougla su takođe veće od 2 cm, pa je $P>\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$.

526. Neka je stranica datog kvadrata $AB=1$ i neka su duže stranice prva četiri pravougaonika redom: a, b, c i d, sledeća slika levo. Neka je $a\geqslant b$, $a\geqslant c$ i $a\geqslant d$. Onda je $1-d\geqslant1-a$. Kako su površine pravougaonika jednake, biće $a(1-d)=b(1-a)$, pa (zbog prethodnih uslova) zaključujemo da je $a=b$ i $1-d=1-a$, odnosno $d=a$. Dakle, $a=b=d$. Slično se dokaže da je i $b=c$, pa je

$a = b = c = d$. Zbog toga je unutrašnji pravougaonik sa jednakim stranicama, pa je m kvadrat.





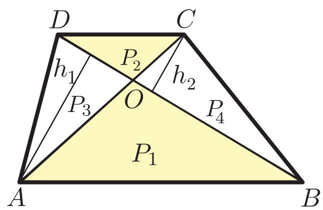
527. Koristimo sliku datu uz tekst zadatka. Označimo sa P zbir "belih" površina, a sa S zbir obojenih površina. U indeksu sa L i D označićemo površi levo i desno od dijagonale AC. Dijagonala polovi pravougaonik pa je $S_L + P_L = S_D + P_D$. Sa slike vidimo da je $P_L + S_D = am + cm = (a + c)m = (b + d)m = bm + dm = S_L + P_D$; t.j. $P_L + S_D = S_L + P_D$. Saberemo dve dobijene jednakosti: $S_L + P_L + P_L + S_D = S_D + P_D + S_L + P_D$. Odavde sledi da je $2P_L = 2P_D$, t.j. $P_L = P_D$ (pa je i $S_L = S_D$).

528. Neka je P površina paralelograma $ABCD$, a površine delova, trouglova i četvorouglova označene su na slici gore desno. Četvorouglovi $AMKD$ i $CKMB$ podudarni su, pa je $S_2 + S_3 + S_6 = S_1 + S_4 + S_5 = \frac{1}{2}P$. Iz površine trougla BCP dobijamo i $\frac{1}{2}P = S_3 + S_4$.

a) $S_1 + S_4 + S_5 = S_3 + S_4$, pa je $S_1 + S_5 = S_3$, odnosno $P_{EPF} = P_{FKC} + P_{MBE}$.

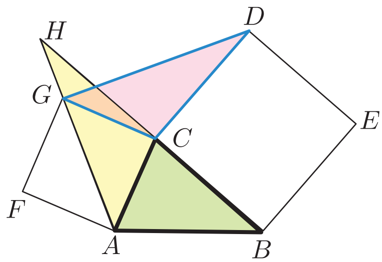
b) $S_2 + S_3 + S_6 = S_3 + S_4$ daje jednakost: $S_4 = S_2 + S_6$, odnosno: $P_{BCFE} = P_{AMEP} + P_{PFKD}$.

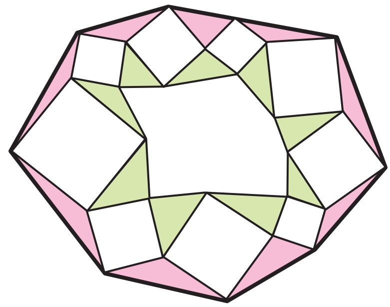
529. Neka je O presečna tačka dijagonala. Dokazaćemo najpre da su površine trouglova ADO i BCO jednake medu sobom, tj, prema slici da je $P_3 = P_4$. Zaista, trouglovi ABD i ABC imaju zajedničku osnovicu AB i jednake visine (visina trapeza). Dakle, $P_1 + P_4 = P_1 + P_3$, pa je $P_3 = P_4$.



Trouglovi ABO i ADO imaju osnovice BO i OD i zajedničku visinu h_1 iz temena A, pa je $P_1 = \frac{1}{2}BOh_1$ i $P_3 = \frac{1}{2}DOh_1$, odnosno $P_1 : P_3 = BO : DO$. Slično dobijamo odnos površina trouglova BCO i DCO: $P_4 : P_2 = BO : DO$, a kako je $P_4 = P_3$, biće $P_3 : P_2 = BO : DO$. Izlazi da je $P_1 : P_3 = P_3 : P_2$, odakle je $P_3^2 = P_1 \cdot P_2$, ili $P_3 = \sqrt{P_1P_2}$. Kako je površina trapeza $P = P_1 + P_2 + 2P_3$, biće konačno: $P = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1P_2}$, ili $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$.

530. Uočimo tačku H, takvu da je C središte duži BH, sledeća slika levo. Sada se lako dokaže da su obojeni trouglovi CDG i CHA podudarni, pa imaju jednake površine. Međutim, trouglovi ABC i ACH imaju jednake osnovice i zajedničku visinu pa su im jednake površine. Otuda sledi traženi zaključak: $P_{ABC} = P_{CDG}$.





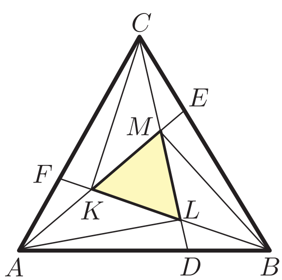
531. Svakom trouglu unutrašnjeg lanca, slika gore desno, odgovara trougao spoljašnjeg lanca sa zajedničkim temenom. Ova dva trougla imaju jednake površine, kao što je dokazano u prethodnom zadatku.

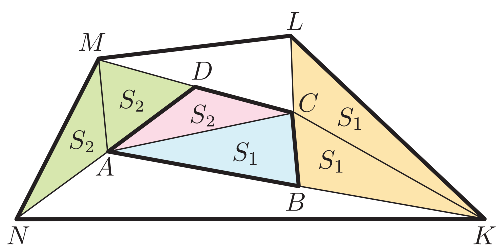
532. Najpre dokažemo da su podudarni trouglovi ADC, BEA i CFB, a onda DBC, ECA i FAB. Posle toga možemo dokazati podudarnost trouglova DBL. ECM i FAK, pa na kraju ADL, BEM i CFK, sledeća slika. Dalje je: $P_{ADC} = 2P_{DBC}$, $P_{ADL} = 2P_{DBL}$, $P_{ADM} = 2P_{DBM}$, pošto su u pitanju po 2 trougla istih visina, od kojih svaki prvi ima 2 puta veću osnovicu nego drugi.

Obeležimo sada površinu trougla KLM sa S, a površine trouglova DBL, ECM i FAK sa S_1, a površine trouglova ALK, BML i CKM sa S_2. Tada je: $P_{ADC} = 5S_1 + 2S_2 + S$ i $P_{DBC} = 4S_1 + S_2$. Iz jednakosti $P_{ADC} = 2 \cdot P_{BDC}$ dobijamo: $5S_1 + 2S_2 + S = 2(4S_1 + S_2)$, odakle: $S = 3S_1$.

Analogno: $P_{ADM} = 2S_1 + S_2 + S$, $P_{DBM} = S_1 + S_2$ i $2S_1 + S_2 + S = 2(S_1 + S_2)$, pa je: $S = S_2$.

Konačno imamo: $P = S + 9S_1 + 3S_2 = S + 3S + 3S = 7S$, pa je $S = \dfrac{P}{7}$.



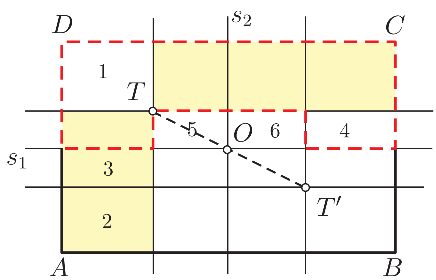


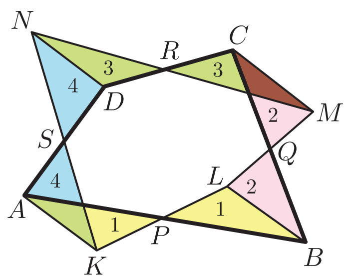
533. Nije teško dokazati da trouglovi ABC, BCK i CLK imaju jednake površine (svaka dva imaju jednaku osnovicu i odgovarajuću visinu zajedničku), slika desno. Njihove površine smo označili sa S_1. Slično, površine trouglova ACD, ADM

i AMN označimo sa S_2. Sabiranjem dobijemo da je $P_{MND}+P_{BKL}=2S_1+2S_2=2(S_1+S_2)=2S$.

Slično, ako površine trouglova ABD i BCD označimo sa S_3 i S_4, dokazaćemo da je $P_{ANK}+P_{CLM}=2S$. Tako dobijemo da je površina četvorougla $KLMN$ jednaka $5S$, t.j. $P_{KLMN}=5S$.

534. Neka su s_1 i s_2 ose simetrije pravougaonika $ABCD$, sledeća slika. One dele pravougaonik na četiri jednaka dela, svaki površine jednake $\dfrac{P}{4}$. Ako tačku T izaberemo na simetrali s_1 ili s_2 ili u jednom od delova koji sadrže tačku A ili tačku C, dokaz tvrđenja je veoma jednostavan. Ali ako se tačka bira van ova dva dela pravougaonika, dokaz je nešto teži. Neka je izabrana tačka T, kao na slici. Konstruišemo tačku T', simetričnu sa T u odnosu na O i podelimo pravougaonik $ABCD$ pravim kroz T i T' paralelnim sa stranicama. Dokazaćemo da je zbir površina traženih pravougaonika (obojenih na slici) manji od $\dfrac{P}{2}$. Uočimo da su zbog simetrije jednaki pravougaonici označeni na slici sa 1 i 2, a takođe i pravougaonici 3 i 4. Uzimajući ovo u obzir, uveravamo se da je zbir površina obojenih pravougaonika jednak površini osmougla, nacrtanog tačkastom crvenom linijom. Kako je ova površina manja od $\dfrac{P}{2}$ za zbir površina delova označenih sa 5 i 6, sigurno bar jedan od žuto obojenih pravougaonika ima površinu manju od $\dfrac{P}{4}$, a to je i trebalo dokazati.





535. Neka su $ABCD$ i $KLMN$ dati četvorouglovi sa zajedničkim središtima stranica, tačkama P, Q, R, S, slika desno. Duži AB i KL se polove, pa su trouglovi AKP i BLP podudarni (uglovi sa zajedničkim temenom su jednaki kao unakrsni). Na slici ovi trouglovi su označeni brojem 1. Slično se dokazuje da su podudarni trouglovi BLQ i CMQ (na slici označeni brojem 2), zatim CMR i DNR (označeni sa 3), kao i DNS i AKS (označeni sa 4).

Ako četvorougao $ABCD$ dopunimo trouglovima AKP, CMQ, DNR i DNS, tj. trouglovima 1, 2, 3 i 4, dobijamo desetougao $AKPBQMCRNS$. Isti desetougao dobijamo ako četvorougao $KLMN$ dopunimo trouglovima BLP, BLQ, CMR i AKS, a to su takođe trouglovi označeni brojevima 1, 2, 3 i 4. Dakle, površine četvorouglova $ABCD$ i $KLMN$ manje su od površine desetougla za zbir površina trouglova 1, 2, 3 i 4, što znači da ova dva četvorougla imaju međusobno jednake površine.

9.7. Geometrija u prostoru

536. Datih n tačaka određuje $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ravni, pa je prema uslovu $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 22n$. Odavde je $(n-1)(n-2) = 6 \cdot 22$, odnosno $(n-1)(n-2) = 6 \cdot 2 \cdot 11 = 12 \cdot 11$. Sledi da je $n = 13$. Određeno je $\dfrac{13 \cdot 12}{2} = 78$ pravih.

537. Prava p sa svakom od tačaka D, E, F određuje po jednu ravan (3 ravni) i prava q sa svakom od tačaka A, B, C, F određuje po jednu ravan (4 ravni). Uzimajući tačku F, jednu tačku prave p i jednu tačke prave q, dobijamo nove ravni, ukupno 6 takvih ravni. To je ukupno 13 ravni.

538. Tri paralelne prave određuju najviše 3 ravni: (a, b), (a, c) i (b, c). Svaka od tri prave sa svakom od pet tačaka određuje ukupno $3 \cdot 5$ ravni. Zatim, 5 tačaka od kojih su 3 kolinearne određuju najviše još 5 ravni. To je ukupno 23 ravni.

539. Mogu dva temena trougla biti na jednoj stranici kvadrata, a treće na nekoj od preostale 3 stranice. Od 3 tačke na prvoj stranici dva temena možemo izabrati na 3 načina. Imamo $3 \cdot 9$ trouglova i puta 4 za sve 4 stranice kvadrata. To je $(3 \cdot 9) \cdot 4 = 108$ trouglova.

Ako biramo 3 temena trougla na 3 različite stranice kvadrata, onda imamo $3 \cdot 3 \cdot 3$ za 3 određene stranice kvadrata. Od 4 stranice možemo izabrati 3 na 4 načina. Prema tome, imamo ovakvih $(3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 4 = 108$ trouglova. Ukupno ima $108 + 108 = 216$ trouglova.

540. a) Bilo koja 3 temena kocke su nekolinearne tačke, pa imamo ukupno $\dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ pravih.

b) Ako nikoje 4 tačke od 8 temena kocke nisu komplanarne, onda imamo $\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ ravni. Međutim, 8 temena kocke određuju 12 četvorki komplanarnih tačaka. Onda svaka ova četvorka određuje jednu, umesto 4 moguće ravni. Za 12 ovakvih četvorki to je manje za $12 \cdot 3 = 36$ ravni. Dakle, određeno je $56 - 36 - 20$ ravni.

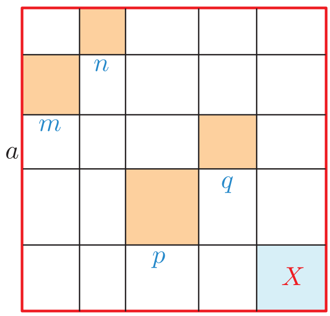
541. a) Ovde nema nijedna trojka kolinearnih tačaka, pa imamo $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ pravu.

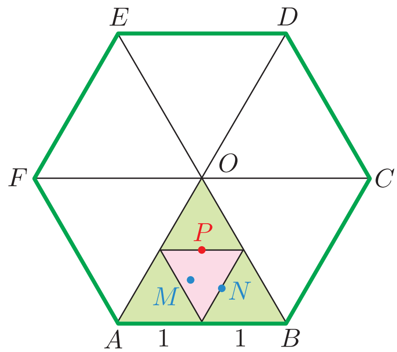
b) Šestougao određuje jednu ravan. Tačka S sa svakom pravom koju određuju po dva temena šestogula, takođe određuje ravan. Takvih ravni je $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Ukupno je određeno 16 ravni.

542. Tri muve su u svakom trenutku u istoj ravni, jer svake 3 tačke leže u nekoj ravni.

543. Štapić dužine 13 cm možemo raseći na delove na jedan od načina: $3 + 3 + 3 + 4$ ili $4 + 4 + 5$ ili $5 + 5 + 3$. Da bismo dobili po 13 komada od svake dužine načinićemo podele: $3\cdot(3+3+3+4)+5\cdot(4+4+5)+4\cdot(5+5+3) = 13\cdot(3+4+5)$. Od dobijenih delova napravićemo 13 trouglova dimenzija 3, 4, 5.

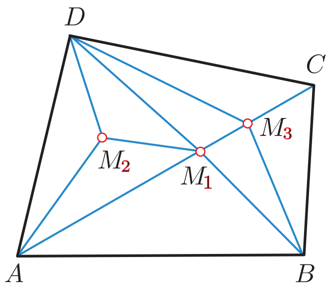
544. Ako su dva kvadrata u istoj vrsti ili u istoj koloni, oni su podudarni, jer imaju jednaku stranicu. Pretpostavimo da tvrđenje o postojanju dva podudarna kvadrata nije tačno. Onda su kvadrati u različitim vrstama i različitim kolonama, kao na slici levo. Ako je stranica datog kvadrata a, a stranice četiri manja kvadrata m, n, p i q, onda su stranice petog pravougaonika X (na sledećoj slici je u donjem desnom uglu), obe jednake: $a-m-n-p-q$. Dakle, on je kvadrat. Ali, to bi bio peti kvadrat, što je protivrečno uslovu da ima tačno četiri kvadrata. Prema tome, pretpostavka da ne postoje dva jednaka kvadrata pogrešna je.

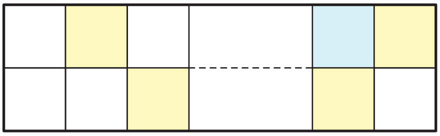




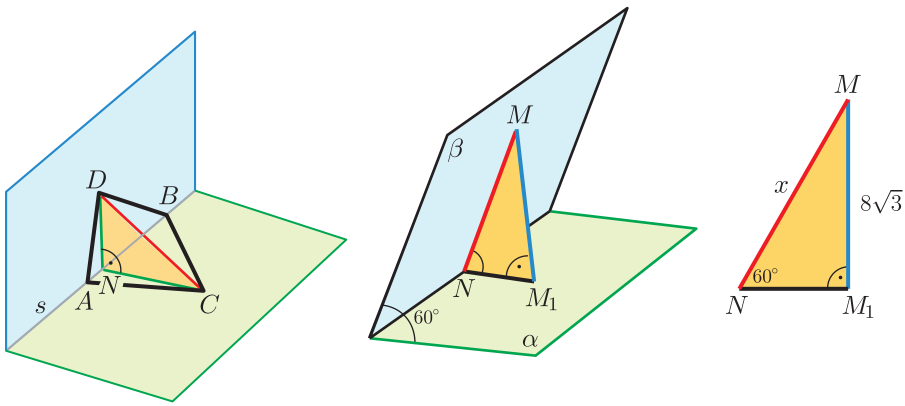
545. Podelimo dati šestougao $ABCDEF$ na 6 jednakostraničnih trouglova stranice 2 cm. Zatim, svaki od njih podelimo na 4 jednakostranična trougla stranice 1 cm, kao što je na slici desno učinjeno sa trouglom OAB. Ovih manjih trouglova biće 24, pa kako je $50 = 2\cdot 24+2$, na osnovu Dirihleovog principa, postoji trougao stranice 1 cm (od 24) u kome su najmanje 3 od 50 razbacanih tačaka. Onda su njihova međusobna rastojanja manja od 1 cm. Budući da su ove 3 tačke “plave” ili “crvene”, sigurno će dve biti iste boje, što se i tvrdilo.

546. Neka je $ABCD$ dati četvorougao (sledeća slika levo). Tačke u četvorouglu označimo sa $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{996}$. Počinjemo povlačenje duži tako što tačku M_1 spojimo sa A, B, C i D. Dobijemo 4 duži i četiri trougla (ABM_1, BCM_1, CDM_1 i DAM_1). Sledeća tačka može biti unutar nekog od nacrtanih trouglova, ili na stranici nekog od ovih trouglova. Neka je to M_2 u trouglu ADM_1. Spojimo M_2 sa A, D i M_1 i dobijemo nove 3 duži (ukupno $4+3$). Sledeća tačka takođe može biti u nekom trouglu ili na nekoj stranici nekog trougla. Neka je tačka M_3 i neka je na duži CM_1. Spojimo je sa B i D. Tako su sve ranije povučene duži ostale na broju, sem duži CM_1. Umesto nje dobili smo nove nepresecajuće duži: CM_3, M_1M_3, BM_3 i DM_3. Dakle, umesto jedne duži CM_1, dobili smo 4, t.j. 3 duži više (ukupno ih je $4+2\cdot 3$). Novu tačku možemo birati samo na dva opisana načina: u nekom trouglu ili na nekoj duži. Ali, u svakom slučaju broj nepresecajućih duži povećava se za 3, sa svakom novom tačkom. Onda, posle 996 poteza broj nepresecajućih duži biće: $4+995\cdot 3 = 2989$.





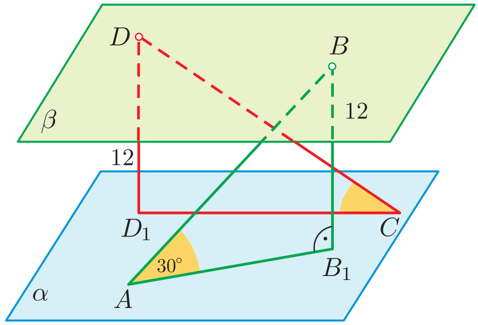
547. Izabrani kvadrati ne mogu biti u istoj koloni, jer bi tada imali zajedničku stranicu. Kako se bira 999 kvadrata, a kolona ima 1000, to znači da se jedna kolona preskače. Ako preskočimo prvu kolonu, kao na slici gore, onda je izborom prvog potpuno određen izbor svih ostalih kvadrata. Za taj izbor imamo 2 mogućnosti. Isti je slučaj i kad izostavimo poslednju kolonu. Ako izostavimo neku od preostalih 999 kolona, onda izbor levo od te kolone i izbor desno od te kolone vrši se nezavisno jedan od drugog. Zbog toga, za svaku od ovih kolona imamo po 4 izbora. Ukupno imamo $2 + 2 + 4 \cdot 998 = 3996$ različitih mogućnosti izbora.



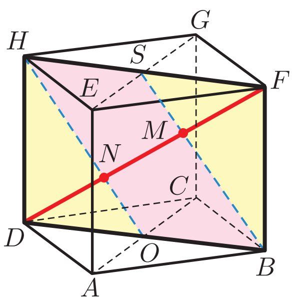
548. Neka je N zajedničko podnožje normala iz C i D na ivicu s diedra, slika levo. Tada je trougao CDN pravougli sa katetama $CN = 12\sqrt{3}$ cm (visina jednakostraničnog trougla ABC) i $DN = 12$ cm. Traži se hipotenuza CD ovog trougla: $CD^2 = CN^2 + DN^2 = (12\sqrt{3})^2 + 12^2 = 576$. Tražena duž je $CD = 24$ cm.

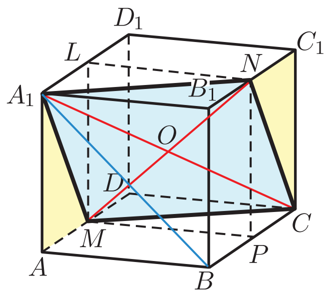
549. Označimo sa M_1 podnožje normale iz M na ravan α, slika gore u sredini (M_1 je normalna projekcija tačke M na ravan α). Neka je N zajedničko podnožje normala iz M i M_1 na ivicu diedra. Trougao MM_1N je pravougli sa oštrim uglom $\sphericalangle MNM_1 = 60^\circ$, koji je jednak uglu diedra. Na srednjoj slici ovaj trougao vidimo iskrivljenog. Njegov pravi izgled je na prethodnoj slici desno. Odatle nalazimo traženu duž $x = MN$. Budući da trougao MM_1N predstavlja polovinu jednakostraničnog trougla, važi jednakost: $MM_1 = MN\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $8\sqrt{3} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Odavde je traženo rastojanje $x = 16$ cm.

550. Neka su B_1 i D_1 normalne projekcije tačaka B i D na ravan α. Prema uslovu je $BB_1 = 12$ cm $= DD_1$. Pravougli trougao ABB_1 prema datom uslovu ima oštri ugao $\sphericalangle BAB_1 = 30^\circ$, pa je $AB = 2BB_1 = 24$ cm. Znamo da je $AB + CD = 24$ cm, pa je i $CD = 24$ cm. Zbog toga su pravougli trouglovi CDD_1 i ABB_1 podudarni (jednake hipotenuze i jedna kateta). Iz podudarnosti sledi da je $\sphericalangle DCD_1 = \sphericalangle BAB_1 = 30^\circ$. Dakle, prava CD prodire ravan α pod uglom od 30°.



551. Dijagonala kocke pripada dijagonalnom preseku $DBFH$, slika dole levo. Prava BM prolazi kroz presek duži EG i HF, a to je središte S duži HF. Slično, prava HN polovi duž BD. Pri tome je $BOHS$ paralelogram, pa je $BS \| OH$. Otuda, na osnovu Talesove teoreme, zaključujemo da je $MF = MN$ i $DN = MN$.

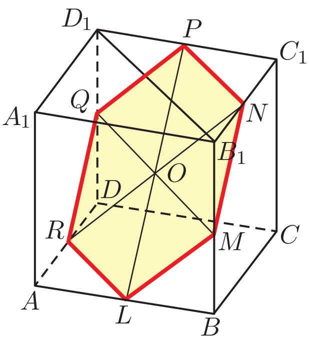


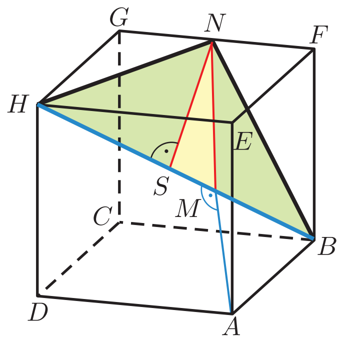


552. Presek date ravni sa paralelnim stranama AA_1D_1D i BB_1C_1C su paralelne i jednake duži, a prema slici gore desno, to su duži A_1M i CN. Dakle, presek je paralelogram A_1MCN. Lako se dokazuje da su pravougli trouglovi AA_1M, CDM, CC_1N i A_1B_1N podudarni, odakle sledi da je $A_1M = MC = CN = A_1N$, pa je presek romb. Treba izračunati njegove dijagonale. Iz pravouglog trougla A_1BC vidimo da je jedna dijagonala $A_1C = a\sqrt{3}$. Uočimo središte P ivice BC. Drngu dijagonalu romba izračunamo iz pravouglog trougla MNP, to je $a\sqrt{2}$. Površina preseka je $P = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}a^2\sqrt{6}$.

553. Presek može biti samo jednakostranični trougao čija je stranica $a\sqrt{2}$. Iz date površine nalazimo ivicu kocke: $\frac{1}{4}(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Odavde je $a^2 = 2$ pa je površina kocke: $P = 6a^2 = 12$ m^2.

554. Označimo pomenuta središta ivica redom sa: M, N i R. Dokazaćemo da ova ravan sadrži središta P, Q i L ivica redom C_1D_1, DD_1 i AB. Dijagonale strana, duži BD i B_1D_1 paralelne su i jednake među sobom, sledeća slika. Duž MQ takođe je jednaka i paralelna sa B_1D_1. Međutim, u trouglu $B_1C_1D_1$ duž NP je srednja linija, pa je NP paralelno sa B_1D_1. Sledi da tačke M, N, P i Q pripadaju jednoj ravni (određuju trapez). Slično se dokaže da su R i L u ovoj ravni. Sada treba dokazati da je šestougao $LMNPQR$ pravilan. Neka je O središte duži MQ. Lako se dokazuje da su trouglovi LMO, MNO, NPO, PQO, QRO i RLO jednakostranični, što je dovoljno.





555. Postupamo slično **primeru A**. Ako su, na primer, M i N podnožja normala iz temena B i D_1 na dijagonalu AC_1, onda iz pravouglih trouglova ABC_1 i AC_1D_1 izračunamo odsečke koje hipotenuzine visine BM i D_1N određuju na hipotenuzi. Tako najpre nađemo BM iz jednakosti: $BM \cdot AC_1 = AB \cdot BC_1$, odnosno $BM \cdot a\sqrt{3} = a \cdot a\sqrt{2}$. Odavde je $BM = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Sada iz $AM^2 = AB^2 - BM^2 = \frac{a^2}{3}$, dobijamo $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}AC_1$. Slično se izračuna $C_1N = \frac{1}{3}AC_1$. Lako se dokaže da su M i N takođe podnožja normala iz temena D i B_1.

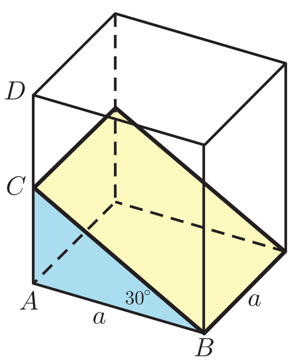
556. Vidi prethodni zadatak. Duž SM izračunamo kao $SM = BS - BM = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{3}a\sqrt{3} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$. Lako se dokazuje da je trougao BHN jednakokraki i da je duž NS visina na osnovicu BH, što se jasno vidi na slici gore desno. Dakle, $SN \perp BH$. Iz trougla BNS dobijamo: $NS^2 = BN^2 - BS^2$, odakle je $NS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tražena površina je $P = \frac{1}{2}SM \cdot SN = \frac{a^2\sqrt{6}}{24}$.

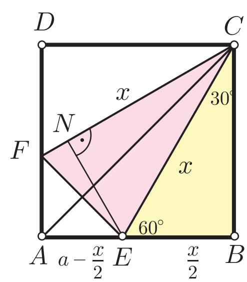
557. Dato je $2(ab+bc+ac)=200$ i $V=abc=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, gde su a, b i c ivice kvadra. Ako prvu jednakost podelimo sa $2abc$, dobićemo: $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{100}{abc}$. Sada iz $abc=\frac{100}{abc}$ dobijemo $(abc)^2=100$ pa je $abc=10=V$.

558. Dat je uslov $2(ab+be+ac)=abc$. Podelimo ovu jednakost sa $2abc$ i dobićemo $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$. Svaka od ivica pojavljuje se po četiri puta, pa je traženi zbir: $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2$.

559. Neka je $a:b=7:24$, odakle je $a=7k$ i $b=24k$, $k>0$. Ako je c visina kvadra, tada je površina dijagonalnog preseka: $cd=50\text{ cm}^2$, gde je d dijagonala osnove. Kako je $d^2=a^2+b^2=625k^2$, to je $d=25k$, pa je $25\cdot c\cdot k=50$, odnosno $c\cdot k=2$. Omotač kvadra je $M=2(a+b)\cdot c=2\cdot 31k\cdot c=124\text{ cm}^2$.

560. Manje telo predstavlja trostranu prizmu čija je osnova trougao ABC, obojen plavo na sledećoj slici, a visina je data osnovna ivica a. Zapremina ove trostrane prizme predstavlja $\frac{2}{5}$ zapremine četvorostrane prizme. U trouglu ABC je $AB=AC\sqrt{3}$, pa je $AC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Neka je H visina date prizme. Iz $\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot a=\frac{2}{5}a^2H$, dobijamo traženu visinu $H=\frac{5a\sqrt{3}}{12}$.





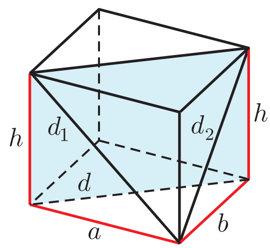
561. Visina prizme je ivica kocke. Površinu osnove odredićemo prema slici gore desno. U pravouglom trouglu BCE je $BC=a=\frac{CE\sqrt{3}}{2}$, odakle je $CE=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Sada iz pravouglog trougla ECN izračunamo visinu EN trougla CEF. Dobijamo: $EN=\frac{1}{2}CE=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, pa je, površina osnove trostrane prizme $\frac{1}{2}CE\cdot EN=\frac{a^2}{3}$, a njena zapremina je: $V=\frac{a^2}{3}\cdot a=\frac{a^3}{3}$, tj. V je trećina zapremine kocke ili 33,3%.

562. Iz manjeg dijagonalnog preseka zaključujemo da manja dijagonala romba i visina prizme imaju dužinu k. Iz površine romba dobijamo nepoznatu dijagonalu. Iz: $\dfrac{d\cdot k}{2}=\dfrac{2}{3}k^2$ je $d=\dfrac{4}{3}k$. Stranicu romba izračunamo koristeći se Pitagorinom teoremom: $a^2=\left(\dfrac{k}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2k}{3}\right)^2$ i $a=\dfrac{5}{6}k$. Dakle:

a) $V=\dfrac{2}{3}k^2\cdot k=\dfrac{2}{3}k^3$ i $P=2\cdot\dfrac{2}{3}k^2+4\cdot\dfrac{5}{6}k\cdot k=\dfrac{14}{3}k^2$.

b) Iz $V=\dfrac{2}{3}k^2$, dobijamo: $\dfrac{2}{3}k^3=\dfrac{14}{3}k^2$, odakle je $k=7$.

563. Neka su a i b osnovne ivice, d_1 i d_2 odgovarajuće dijagonale bočnih strana, $d|$ dijagonala osnove i h visina kvadra. Iz datih razmera dobijamo proporcije: $a:b=4:3$, $d_1:d_2=\sqrt{20}:\sqrt{13}$ i $dh:abh=2:1$. Odavde je $d_1^2:d_2^2=20:13$, odnosno $(a^2+h^2):(b^2+h^2)=20:13$ i $d:ab=2:1$. Dalje dobijamo $\sqrt{a^2+b^2}:ab=2:1$ ili $(a^2+b^2):a^2b^2=4:1$. Osnovne ivice dobijamo iz prve i poslednje proporcije, koje posle sređivanja daju jednačine: $4b=3a$ i $a^2+b^2=4a^2b^2$. Smenjujući b dobijamo: $a^2+\dfrac{9a^2}{16}=\dfrac{9a^4}{4}$. Posle skraćivanja sa a^2 dobijamo $a^2=\dfrac{25}{36}$, odnosno $a=\dfrac{5}{6}$. Samim tim je $b=\dfrac{5}{8}$. Sada iz proporcije $(a^2+h^2):(b^2+h^2)=20:13$ dobijamo: $\left(\dfrac{25}{36}+h^2\right):\left(\dfrac{25}{64}+h^2\right)=20:13$, odakle je $h^2=\dfrac{25}{144}$ odnosno $h=\dfrac{5}{12}$. Dakle: $P=2ab+2ah+2bh=\dfrac{325}{144}$ i $V=abh=\dfrac{125}{576}$.

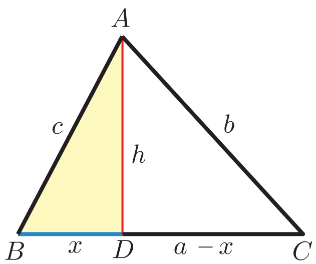


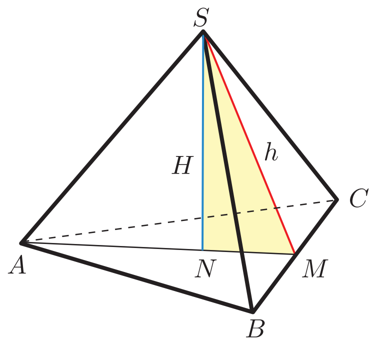
564. Iz površine prizme: $2B+26+28+30=126$, izračunamo površinu osnovne: $B=21\text{ cm}^2$. Iz datih površina bočnih strana je: $aH=26$, $bH=28$ i $cH=30$, pa je $a:b:c=13:14:15$. Dakle, baza je slična trouglu sa stranicama 13. 14 i 15. Površina ovog sličnog trougla je 84, pa je $a^2:13^2=21:84$, odnosno $a^2:169=1:4$. Dakle $a=\dfrac{13}{2}$, pa iz $\dfrac{13}{2}\cdot H=26$, nalazimo da je $H=4$ cm. Tražena zapremina je $V=B\cdot H=84\text{ cm}^3$.

565. a) Površina osnove bazena je 6 m^2, pa dubina vode na početku iznosi: $4.5:6=0,75$ m. Ukupna zapremina vode i jedne kocke je $5,5\text{ m}^3<6\text{ m}^3$, što znači da kocka viri iz vode. Stoga, posle spuštanja kocke, voda obrazuje telo sa bazom površine 5 m^2 (ne računamo 1 m^2 koji pokriva baza kocke) i zapreminom 4,5 m^3, pa je visina (nivo vode) $4,5:5=0,9$ m. Dakle, nivo vode se podigao za 15 cm.

b) Sada je ukupna zapremina 7,5 m^3, što znači da voda pokriva kocke, pa je nivo vode na $7,5:6=1,25$ m od dna. Znači, nivo se u odnosu na 0,9 m podigao za $125-90=35$ cm.

566. Iz $a^2 : b^2 : c^2 = 25 : 13 : 8$ sledi da je $a^2 = 25k^2$, $b^2 = 13k^2$ i $c^2 = 8k^2$. Visinu ćemo izračunati koristeći odnos dijagonala. Iz $d_1 : d_2 = 5 : 4$ dobijamo $(a^2 + H^2) : (b^2 + H^2) = 25 : 16$, odnosno $(25k^2 + H^2) : (13k^2 + H^2) = 25 : 16$. Odavde je $H = \dfrac{5k\sqrt{3}}{3}$. Za površinu baze treba nam njena visina. Prema sledećoj slici računamo $c^2 - x^2 = h^2 = b^2 - (a - x)^2$, odnosno $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$. Odavde je $8k^2 - x^2 = 13k^2 - 25k^2 + 10kx - x^2$, pa je $x = 2k$. Visina baze, iz $h^2 = 8k^2 - 4k^2 = 4k^2$, je $h = 2k$. Površina baze je $B = \dfrac{1}{2}a \cdot h = 5k^2$. Zapremina prizme je $V = B \cdot H = \dfrac{25k^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{125k^3\sqrt{3}}{15} = \dfrac{(5k)^3\sqrt{3}}{15} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{15}$.





567. Preostalo telo je ograničeno sa osam jednakostraničnih trouglova i šest kvadrata. Sve ivice su jednake polovini dijagonale strane prvobitne kocke, $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, pa je površina tela $P = 6 \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8 \cdot \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3})$.

Svaki od odsečaka kocke je trostrana piramida sa bazom $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2}$ i visinom $\dfrac{a}{2}$, pa je zapremina svakog od osam odsečaka jednaka $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{8} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{48}$. Zapremina preostalog dela kocke je $V = a^3 - 8 \cdot \dfrac{a^3}{48} = \dfrac{5}{6}a^3$.

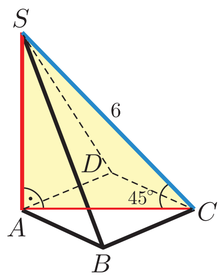
568. Iz uslova sledi da su bočna ivica i dijagonala osnove jednake, pa iz $\dfrac{s^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, sledi da je $s = 6$ cm $= d$ i $a = 3\sqrt{2}$ cm, $H = 3\sqrt{3}$ cm. Lako se izračuna i bočna visina $h = \dfrac{3}{2}\sqrt{14}$ cm. Dakle $V = 18\sqrt{3}$ cm^3 i $P = 18(1 + \sqrt{7})$ cm^2.

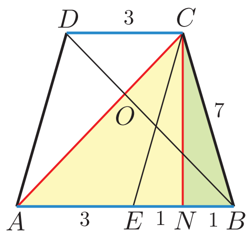
569. Neka je $H = 2a$. Iz pravouglog trougla SMN, slika gore, izrazimo bočnu visinu preko osnovne ivice: $h^2 = SN^2 + MN^2 = 4a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \dfrac{147a^2}{36}$, pa je

$h = \dfrac{7a\sqrt{3}}{6}$. Iz date površine imamo: $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{7a\sqrt{3}}{6} = 2a^2\sqrt{3} = 648\sqrt{3}$. Sledi da je $a = 18$ cm, pa je $H = 36$ cm i zapremina je $V = \dfrac{1}{3} \cdot 18^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 972\sqrt{3}$ cm^3.

570. Treba od date prizme oduzeti četvorostranu piramidu, čija je baza trapez $ACC'A'$ i visina duž $AB = 1$. Osnovice trapeza su odsečci bočnih ivica, 2 cm i 4 cm, a visina je ivica AC. Dakle, zapremina ove piramide je $V_1 = 1$ cm^3, a zapremina date prizme je 3 cm^3. Preostali deo ima zapreminu $V = 2$ cm^3.

571. Najduža bočna ivica sa visinom piramide i dijagonalom osnove određuje jednakokraki pravougli trougao SAC, sledeća slika levo. Odatle izračunamo visinu $SA = 3\sqrt{2}$ cm i dijagonalu osnove $AC = 3\sqrt{2}$ cm. Zapremina piramide je: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ cm^3.





572. Iz omotača, $M = 2ah$, izračunamo bočnu visinu: $h = 5$ cm. Projekcija bočne visine, to je polovina visine osnove, sa visinom piramide i bočnom visinom određuje jednakokraki pravougli trougao. Zbog toga je visina piramide $H = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, a visina osnove je $5\sqrt{2}$ cm. Prema tome, zapremina piramide je: $V = \dfrac{1}{3} \cdot 12 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = 100$ cm^3.

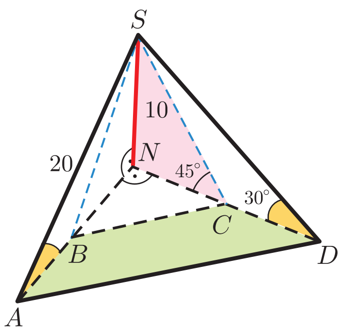
573. Potrebno je izračunati visinu piramide. Ona sa dužom, datom, bočnom ivicom i većim odsečkom dijagonale baze obrazuje pravougli trougao. Potreban odsečak dijagonale trapeza izračunaćemo prema slici gore. Iz pravouglog trougla BCN izračunamo visinu trapeza $CN^2 = 7^2 - 1^2 = 48$, pa iz trougla ACN nalazimo dijagonalu: $d^2 = AC^2 = AN^2 + CN^2 = 16 + 48 = 64$. Dakle $d = 8$ cm. Presečna tačka dijagonala deli dijagonalu u razmeri: $AO : OC = AB : CD = 5 : 3$. Sledi da je $AO = 5$ cm, pa možemo odrediti visinu piramide: $H^2 = SA^2 - AO^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, tj. $H = 12$ cm. Zapremina piramide je $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5+3}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 64\sqrt{3}$ cm^3.

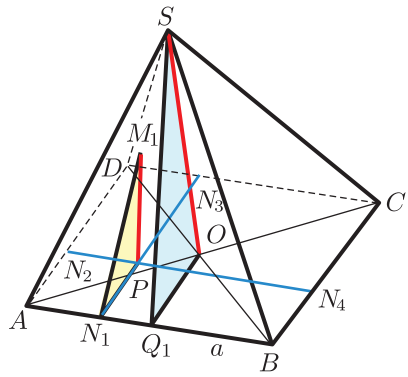
574. Ravni bočnih strana SAB i SCD očigledno se seku po visini piramide, sledeća slika. Neka je visina piramide $SN = H$. Iz pravouglog trougla SAN ($SA = 20$ cm i $\sphericalangle SAN = 30°$) nalazimo da je $H = 10$ cm i $AN = 10\sqrt{3}$ cm. Površinu baze izračunaćemo kao razliku površina trouglova ADN i BCN. Trouglovi SBN i

SCN su jednakokraki pravougli, jer je $SN = 10$ cm i $SB = SC = 10\sqrt{2}$ cm, pa je $BN = CN = 10$ cm. Ugao AND je prav, pa su trouglovi AND i BNC jednakokraki pravougli i $AD = 10\sqrt{6}$ cm, a $BC = 10\sqrt{2}$ cm.

Površina baze $ABCD$ je $B = \frac{1}{2}(10\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}10^2 = 100$ cm^2, pa je zapremina piramide $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10 = \frac{1000}{3}$ cm^3.

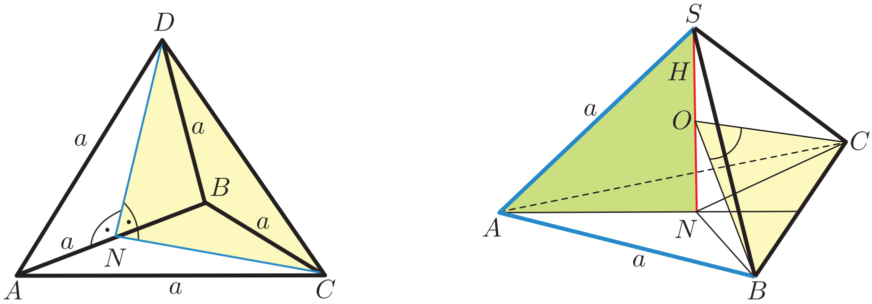
Omotač ima dva podudarna trougla SAB i SCD. Površina jednog od njih je $\left(\frac{1}{2}10\sqrt{3} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10\right) = (50\sqrt{3} - 50)$ cm^2. Strana SBC je jednakostranični trougao površine $\frac{1}{4}(10\sqrt{2})^2\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ cm^2. Strana SAD je jednakokraki trougao sa kracima dužine 20 cm i osnovicom $AD = 10\sqrt{6}$ cm. Lako je izračunati njegovu visinu, $h = 5\sqrt{10}$ cm, i površinu: $50\sqrt{15}$ cm^2. Prema tome, površina piramide je $P = 50(2\sqrt{3} + \sqrt{15})$ cm^2.





575. Neka su PN_1, PN_2, PN_3 i PN_4 normale iz P na osnovne ivice. Očigledno je $PN_1 + PN_2 + PN_3 + PN_4 = 2a$, gde je a dužina osnovne ivice. Neka je SO visina piramide i SQ_1 normala iz S na AB, slika gore desno. Označimo sa M_1 prodor prave p kroz stranu SAB. Trouglovi PM_1N_1 i OSQ_1 slični su (imaju paralelne odgovarajuće stranice), pa je $PM_1 : PN_1 = OS : OQ_1$, odnosno $PM_1 : PN_1 = H : \frac{a}{2}$. Odavde je $PM_1 = \frac{2 \cdot PN_1}{a} \cdot H$. Slično se izračunaju PM_2, PM_3 i PM_4, pa je $PM_1 + PM_2 + PM_3 + PM_4 = \frac{2PN_1}{a} \cdot H + \frac{2PN_2}{a} \cdot H + \frac{2PN_3}{a} \cdot H + \frac{2PN_4}{a} \cdot H = \frac{2H}{a}(PN_1 + PN_2 + PN_3 + PN_4) = \frac{2H}{a} \cdot 2a = 4H$, što se i tvrdilo.

576. Ako uzmemo jedan od trouglova za bazu, visina drugog trougla će biti visina piramide, pa je zapremina $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$. Neka je N zajedničko podnožje visina datih trouglova, slika levo. Trougao CND je pravougli jednakokraki, $CN = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pa je $CD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Trouglovi ACD i BCD su podudarni jednakokraki. Visinu na osnovicu ovog trougla izračunamo koristeći Pitagorinu teoremu, itd. Površina piramide je $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}(2+\sqrt{5})$.



577. Izrazićemo zapreminu preko dužine a ivice tetraedra. Iz pravouglog trougla SAN, slika desno, vidimo da je $H^2 = SA^2 - AN^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{6a^2}{9}$, pa je $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Zapremina je $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Sada iz $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}$ dobijamo $a^3 = 216$, pa je $a = 6$ cm.

Površina tetraedra je $P = 4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ cm^2.

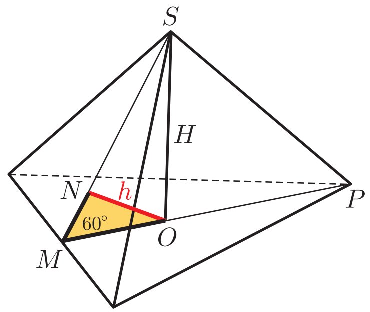
578. Podnožje visine je centar opisanog kruga baze, a kako je $12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$, sledi da je baza pravougli trougao i podnožje visine je središte hipotenuze. Poluprečnik opisanog kruga je $R = 10$ cm, pa je visina piramide: $H^2 = s^2 - R^2 = 26^2 - 10^2 = 576$ i $H = 24$ cm.

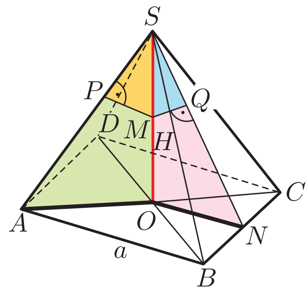
Zapremina piramide je $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 \cdot 24 = 768$ cm^3.

579. Koristićemo prethodni zadatak i poslednju sliku. Treba da dokažemo da je trougao BOC pravougli. Duži NB i NC su poluprečnici opisanog kruga baze, pa su pravougli trouglovi BON i CON podudarni i $OB = OC$. Iz trougla OBN imamo: $OB^2 = BN^2 + ON^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$. Dalje je $OB^2 + OC^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} = a^2 = BC^2$, pa je na osnovu obrnute Pitagorine teoreme trougao BOC pravougli i $\sphericalangle BOC = 90^\circ$, što se i tvrdilo.

580. Težište osnove je centar trougla i ujedno predstavlja podnožje visine. Traženo odstojanje je kateta h pravouglog trougla OMN, sledeća slika. Hipotenuza ovog trougla je $OM = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Pravougli trougao OMN ima ugao od 60°

(nagib bočne strane prema ravni osnove), pa predstavlja polovinu jednakostraničnog trougla. Stoga je $h = OM\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{4}$.





581. Presek je trougao SMP na poslednjoj slici levo. Iz podataka imamo: $\dfrac{1}{2}MP \cdot 8 = 24\sqrt{3}$, pa je $MP = 6\sqrt{3}$. Iz baze dobijamo: $MP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, pa je $a = 12$ cm. Iz trougla SOM izračunamo bočnu visinu: $SM^2 = H^2 + OM^2 = 64 + (2\sqrt{3})^2 = 76$, pa je $SM = 2\sqrt{19}$. Površina piramide je $P = 36(\sqrt{3} + \sqrt{19})$ cm^2.

582. Bočne visine sa visinom piramide obrazuju tri podudarna trougla (oštar ugao od 60° i zajednička kateta – visina piramide). Otuda zaključujemo da je podnožje visine centar upisanog kruga osnove. Kako je $r = s - c = 12 - 10 = 2$ cm, to su bočne visine $h = 4$ cm i visina piramide $H = 2\sqrt{3}$. Površina piramide je $P = 72$ cm^2, a zapremina $V = 16\sqrt{3}$ cm^3.

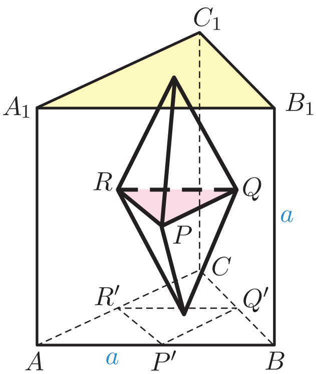
583. Koristićemo sličnost trouglova. Uočimo slične trouglove SMP i SAO, vidi poslednju sliku. Iz proporcije $SM : MP = SA : AO$, odnosno iz $\dfrac{H}{2} : \sqrt{3} = \sqrt{H^2 + \dfrac{a^2}{2}} : \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, dobijamo $\dfrac{H^2}{4} : 3 = \left(H^2 + \dfrac{a^2}{2}\right) : \dfrac{a^2}{2}$, odakle je $a^2H^2 = 24H^2 + 12a^2$. Takođe iz sličnih trouglova SMQ i SNO imamo $SM : MQ = SN : ON$, odakle dobijemo: $a^2H^2 = 32H^2 + 8a^2$. Iz ove dve jednakosti je $a^2 = 48$ i $H^2 = 24$, pa je $a = 4\sqrt{3}$ i $H = 2\sqrt{6}$. Zapremina je $V = 32\sqrt{6}$.

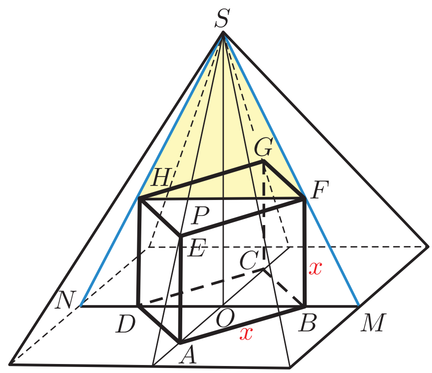
584. Vidi rešenje **zadatka 582**. Bočne visine i visina piramide obrazuju podudarne pravougle trouglove, što znači da je podnožje visine piramide centar upisanog kruga osnove. Tada je površina baze $B = r \cdot s$, gde je s poluobim baze, a omotač je $M = s \cdot h$. Iz datog uslova: $P = 1,5M$, sledi da je $B = 0,5M$ ili $M = 2B$. Znači: $sh = 2rs$, pa je $h = 2r$. Kako je h hipotenuza i r kateta pravouglog trougla, a ugao između h i r je nagib bočnih strana, sledi da je nagib bočnih strana 60°.

585. Površina baze je $B = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Polovina donje baze sa najbližim temenom gornje baze određuje pravilni tetraedar, pa je, prema rešenju **zadatka 577**, visina paralelepipeda: $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Zapremina tela je: $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

586. Površina osnove je $B = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, pa je omotač $M = 3B = 18\sqrt{3}$ cm^2. Površina piramide je $24\sqrt{3}$ cm^2. Iz $M = 3ah = 18\sqrt{3}$ proizlazi da je $h = 3\sqrt{3}$ cm. Poluprečnik kruga upisanog u bazu je $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, pa visinu piramide dobijamo iz veze: $H^2 = h^2 - r^2 = 24$. Visina je $H = 2\sqrt{6}$, a zapremina piramide: $V = 12\sqrt{2}$ cm^3.

587. Iz date površine izračunaćemo ivicu prizme: $P = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a^2 = 24(6+\sqrt{3})$. Odavde je $a = 4\sqrt{3}$ cm. Spajanjem centara strana prizme dobijamo dve jednake trostrane piramide visina $\dfrac{a}{2}$, sa zajedničkom osnovom. Osnova je jednakostranični trougao stranice $\dfrac{a}{2} = 2\sqrt{3}$, slika dole levo. Zapremina tela je $V = 2 \cdot \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{2} = 12$ cm^3.

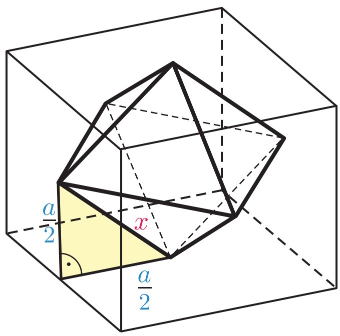


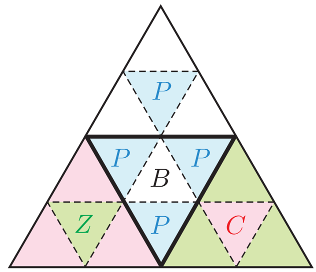


588. Uočimo bočne visine SM i SN. Neka je x cm dužina ivice upisane kocke. Iz sličnih trouglova SMN i SFH imamo proporciju $MN : FH = SO : SP$, slika gore, ili $a : x\sqrt{2} = H : (H - x)$. Zamenimo date duži: $12 : x\sqrt{2} = 6 : (6 - x)$. Odavde dobijemo $x = 6(2 - \sqrt{2})$ cm, pa je $P = 6x^2 = 432(3 - 2\sqrt{2})$ cm^2.

589. Dobijeno telo je tzv. oktaedar, koji je sastavljen od dve jednakoivične cetvorostrane piramide sa zajedničkom osnovom. Ivicu x lako izračunamo iz obojenog trougla na sledećoj slici. To je hipotenuza jednakokrakog pravouglog trougla katete $\dfrac{a}{2}$. Dakle, $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, pa je površina tela (osam jednakostraničnih trouglova) $P = 8 \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$. Zapremina je $V = \dfrac{2}{3}x^2 \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{6}$.

590. Na sledećoj slici desno prikazan je omotač, zapravo mreža ovog tetraedra. Neka je srednji trougao “baza” tela. Svaka strana je isprekidanim linijama podeljena na četiri manja trougla koje bojimo. Očigledno, na svakoj strani je centralni trougao obojen jednom bojom, a ostala tri drugom bojom. Za bazu čiji je





centralni trougao obojen belom bojom (B) postoje ukupno tri mogućnosti. Za svaku od njih, za centralne trouglove ostalih strana, tada imamo dve mogućnosti: PCZ (kao na slici) ili PZC. Za svaku od ovih šest mogućnosti postoje tri različita bojenja ostalih strana. (Za slučaj sa slike, to su: PB, CZ, ZC, ili PC, CZ, ZB, ili PZ, CB, ZC.) Stoga postoji ukupno $3 \cdot 2 \cdot 3$, tj. 18 mogućnosti.

591. Presečnoj tetivi odgovara centralni ugao od 60°, pa manjem odsečenom delu pripada šestina celog omotača valjka. Baza ovog odsečenog dela je kružni odsečak površine: $B = \frac{1}{6}r^2\pi - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = (6\pi - 9\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$. Površini odsečenog dela valjka pripada šestina omotača i presečni pravougaonik povrsine $r \cdot H = 72\ \mathrm{cm}^2$. Konačno, tražena površina je $P = (72 + 36\pi - 18\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$.

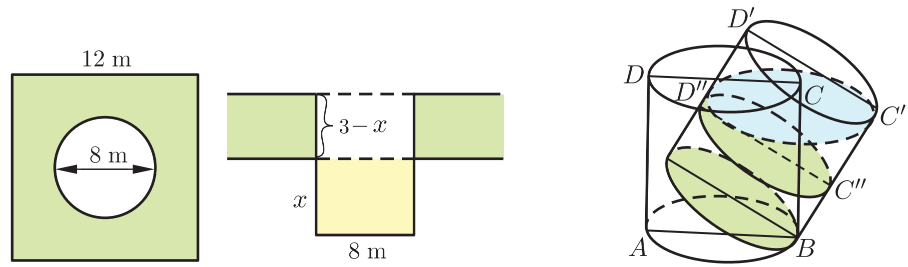
592. a) Visina valjka je zajednička za oba dela, pa je razmera njihovih zapremina jednaka razmeri površina kružnih odsečaka koji predstavljaju baze delova. Manji odsečak ima površinu $P_1 = \frac{1}{4}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2 = \frac{r^2}{4}(\pi - 2)$. Površina većeg odsečka je $P_2 = \frac{3}{4}r^2\pi + \frac{1}{2}r^2 = \frac{r^2}{4}(3\pi + 2)$. Prema tome $V_1 : V_2 = P_1 : P_2 = (\pi - 2) : (3\pi + 2)$.

b) Kako je $\frac{r^2}{4}(\pi - 2) : r^2\pi = \frac{\pi - 2}{4\pi} = 0,090\ldots$, to manji deo predstavlja približno 9%, a veći deo 91% od zapremine valjka.

593. Poluprečnik osnove je 3 cm. Zajednički deo baza sastoji se od dva jednaka odsečka sa centralnim uglom od 120°. Površina ova dva odsečka iznosi: $B = 2\left(\frac{1}{3}r^2\pi - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \left(6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$. Zapremina zejedničkog dela je $V = 6B = (36\pi - 27\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^3$, što iznosi približno 66,3 cm^3.

594. Površina zemljišta po kome se rasipa iskopana zemlja je $(144 - 16x)\ \mathrm{m}^2$, slika levo. Ako sa x m označimo dubinu kopanja, onda će debljina sloja nabijene zemlje biti $(3 - x)$ m, srednja slika. Zapremina sabijene zemlje jednaka je zapremini iskopane zemlje, pa imamo jednačinu: $16\pi x = (144 - 16\pi)(3 - x)$, odakle dobijamo: $144x = 432 - 48\pi$. Ako ovu jednakost podelimo sa 144 dobićemo: $x = 3 - \frac{\pi}{3}$. Za

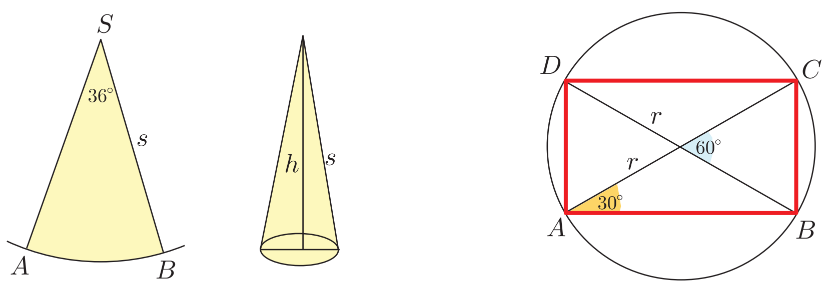
$\pi \approx 3,14$ odnosno $\dfrac{\pi}{3} \approx 1,05$, dobijamo $x \approx 1,95$ m. Toliko duboko treba kopati da bi jama bila duboka 3 m.



595. Posle naginjanja i prosipanja voda će zauzeti horizontalni položaj $C'D''$ slika desno. Količina prosute tečnosti jednaka je polovini zapremine valjka čiji je osni presek pravougaonik $C'D'D''C''$ na slici. Ovaj i dati valjak imaju jednake osnove, a visinu novog valjka izračunaćemo iz pravouglog trougla $C'D'D''$ (polovina jednakostraničnog trougla), to je duž $D'D'' = C'D' \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 20\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Zapremina ovog dela valjka je $V_1 = 100 \cdot \dfrac{20\sqrt{3}}{3}\pi$. Uzimajući približne vrednosti $\sqrt{3} = 1,73$ i $\pi = 3,14$, dobijamo $V_1 = 3627,6$ cm^3. Zapremina datog suda je: $V = 100 \cdot 25\pi = 7850$ cm^3, pa je količina preostale tečnosti $V - \dfrac{1}{2}V_1 = 6036$ cm^3.

596. Težina leda se izračunava tako što se zapremina pomnoži sa gustinom: $T = 132480$ g. Kako je sgustina vode $s = 1$ g/cm^3, sledi da težina leda predstavlja zapreminu vode posle topljenja. Znači, dubina vode u cilindričnom sudu (visina valjka) je: $H = T : r^2\pi = 132480 : 6358,4 \approx 20,84$ cm (uzeli smo $\pi \approx 3,14$).

597. Iz obrasca za površinu kružnog isečka dobijamo: $\dfrac{36s^2}{360} = 110\pi$, odakle je $s = 10\sqrt{11}$. Kako je luk AB, slika levo, jednak obimu osnove kupe, slika u sredini, imamo: $2r\pi = \dfrac{10\sqrt{11}\pi \cdot 36}{180}$, odakle je: $r = \sqrt{11}$. Sada imamo površinu kupe: $P = 11\pi + 110\pi = 121\pi$ cm^2. Visinu kupe izračunaćemo koristeći poznatu vezu: $h^2 = s^2 - r^2 = 1089$. Odavde je $h = 33$ cm, pa je zapremina: $V = 121\pi$ cm^3.



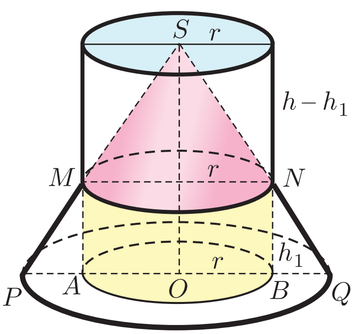
598. Vidi rešenje prethodnog zadatka. Iz $r^2\pi = 7\pi$ je: $r = \sqrt{7}$ cm. Kada se omotač razvije dobija se kružni isečak luka $2r\pi$ i poluprečnika s. Prema datom uslovu imamo: $\frac{1}{8}s^2\pi = \frac{1}{2}s \cdot l = \frac{1}{2}s \cdot 2r\pi$, odakle je $s = 8r = 8\sqrt{7}$. Izračunajmo visinu kupe: $h^2 = (8\sqrt{7})^2 - (\sqrt{7})^2 = 441$, pa je $h = 21$ cm. Sada neposredno izračunamo površinu $P = 63\pi$ cm^2 i zapreminu $V = 49\pi$ cm^3.

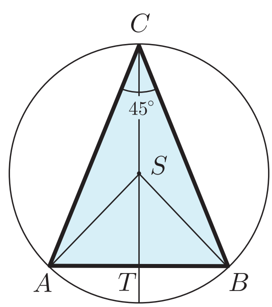
599. Izrazićemo dimenzije u cm. Zapremina vode u kupastoj posudi iznosi: $V = \frac{\pi}{3} \cdot 12^2 \cdot 18 = 864\pi$ cm^3. Ako sa h označimo visinu do koje će stići voda u valjkastoj posudi, imaćemo jednakost: $5^2\pi h = 864\pi$, odakle je $h = 34,56$ cm.

600. Visina valjka i kvadra je $H = 2r$. Na poslednjoj slici desno vidimo kako izgleda baza kvadra u bazi valjka. Osnovne ivice kvadra su $AD = r$ i $AB = r\sqrt{3}$. Zapremina kvadra je $V = AD \cdot AB \cdot H = 2r^3\sqrt{3}$, a površina je $P = 2(AB \cdot CD + AB \cdot H + CD \cdot H) = 2r^2(3\sqrt{3} + 2)$.

601. a) Neka je poluprečnik osnove kupe $R = OP$. Kako je $V_k = V_v$, dobijamo vezu: $\frac{1}{3}R^2\pi h = r^2\pi h$, odakle je: $R = r\sqrt{3}$.

b) Neka je trougao SPQ osni presek kupe sa nekom ravni upravnom na ravan osnove, slika levo. Neka su A i B tačke preseka duži PQ i kruga osnove valjka, a M i N prodori duži SP i SQ kroz omotač valjka. Označimo duž BN sa h_1. Iz sličnosti pravouglih trouglova BNQ i OSQ imamo: $BN : BQ = OS : OQ$, tj. $h_1 : (R - r) = h : R$. Odavde je $h_1 = \frac{R - r}{R} \cdot h = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}h$. Deo valjka koji je u kupi sastoji se od valjka poluprečnika r i visine h_1 i kupe poluprečnika r i visine $h - h_1 = h - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}h = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Tražena zapremina je: $V = r^2\pi h\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}r^2\pi\frac{h}{\sqrt{3}} = r^2\pi h\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = r^2\pi h\frac{9 - 2\sqrt{3}}{9}$.





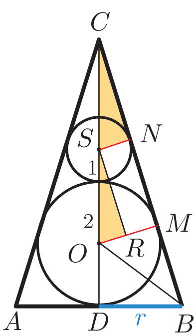
602. Prečnik lopte je dijagonala kvadra. Koristeći date dijagonale strana kvadra, dobijamo vezu između ivica a, b i c kvadra: $a^2 + b^2 = 15^2$, $b^2 + c^2 = 481$ i $a^2 + c^2 = 544$. Saberemo ove jednakosti i podelimo sa 2. Dobijemo: $a^2 + b^2 + c^2 = 625$.

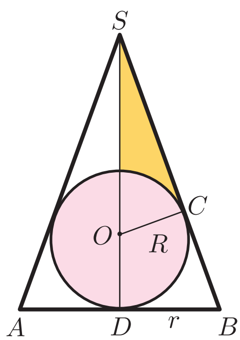
Budući da je $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, sledi da je dijagonala kvadra (prečnik lopte) $D = 25$ cm. Poluprečnik lopte je $r = \dfrac{25}{2}$, pa je površina $P = 4r^2\pi = 625\pi$ cm^2, a zapremina je $V = \dfrac{4}{3}r^2\pi = \dfrac{15625}{6}\pi$ cm^3.

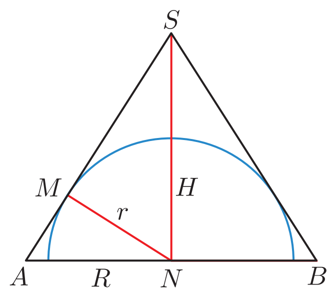
603. Na slici gore desno vidimo kako izgleda osnova ABC upisane prizme. Centralni ugao koji odgovara uglu ACB je $\sphericalangle ASB = 90^\circ$. Dakle, trougao ASB je jednakokraki pravougli, pa je $AB = r\sqrt{2}$ i $ST = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Visina trougla ABC je $CT = r + \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Zapremina prizme je $V = \dfrac{1}{2}AB \cdot CT \cdot H = r^3(\sqrt{2} + 1)$.

604. Slično **primeru E** iz **odeljka 7.2**. Dijagonalnom preseku SAC piramide iz tog primera, ovde odgovara osni presek. (Osnovica trougla je prečnik osnove, a visina kupe i trougla je zajednička.) Rezultat: $P = \dfrac{43200}{121}$ cm^3.

605. Na slici levo je osni presek ove kupe. Poluprečnici OM i SN normalni su na BC. Pravougli trougao SOR ima katetu $OR = 1$ cm i hipotenuzu $SO = 3$ cm, pa je druga kateta $SR = \sqrt{SO^2 - OR^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ cm $= MN$. Trougao CSN je podudaran trouglu SOR, pa je $CS = 3$ i $CN = 2\sqrt{2}$ cm. Dakle, visina kupe je $h = CD = 8$ cm. Iz sličnosti trouglova CSN i CBD dobijamo proporciju: $BD : CD = SN : CN$, odnosno $r : 8 = 1 : 2\sqrt{2}$. Odavde je $r = \dfrac{8}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm. Dakle: $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi H = \dfrac{1}{3}(2\sqrt{2})^2\pi \cdot 8 = \dfrac{64}{3}\pi$ cm^3.







606. Prema uslovu je $SD = 4R$, srednja slika. Pravougli trouglovi BDS i OCS slični su, pa je $BD : BS = OC : OS$, odnosno $r : \sqrt{r^2 + 16R^2} = R : 3R = 1 : 3$, gde je $r = BD$ poluprečnik kupe. Kvadriramo proporciju i dobićemo: $r^2 : (r^2 + 16R^2) = 1 : 9$. Odavde izračunamo poluprečnik kupe: $r = R\sqrt{2}$. Dalje računamo: $SB = \sqrt{18R^2} = 3R\sqrt{2}$. Površina kupe je $P_k = r^2\pi + r\pi \cdot SB = 8R^2\pi$ i zapremina $V_k = \dfrac{1}{3}r^2\pi \cdot DS = \dfrac{8}{3}R^3\pi$.

a) Razmera površina je $P_k : P_l = 8R^2\pi : 4R^2\pi = 2 : 1$.

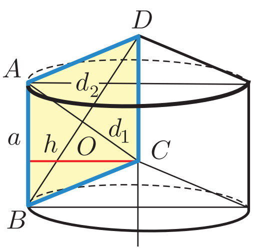
b) Razmera zapremina je $V_k : V_l = \frac{8}{3}R^3\pi : \frac{4}{3}R^3\pi = 2 : 1.$

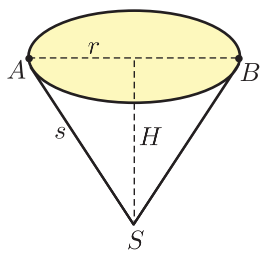
607. Treba izračunati poluprečnik R kupe. Prema poslednjoj slici desno, slični su trouglovi AMN i ANS (pravougli trouglovi sa zajedničkim oštrim ugom kod temena A). Iz sličnosti sledi proporcija $AN : MN = AS : SN$, odnosno $R : r = \sqrt{H^2 + R^2} : H$. Kvadriramo i: $R^2 = \frac{r^2H^2}{H^2 - r^2}$. Zapremina je
$V = \frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2H^3}{H^2 - r^2}$.

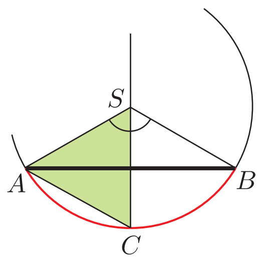
608. Pošto su dijagonale romba normalne medusobno i polove se, to se iz pravouglog trougla ABO, slika levo, izračunava stranica romba: $a = 5$ cm. Površina romba je $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = ah$, odakle je $h = 4,8$ cm.

Rotaciono telo je valjak koji je s jedne strane izdubljen kupom a s druge mu je ta ista kupa pridodata. Prema tome $V = V_v = h^2\pi a = 115,2\pi$ cm^3. Površinu obrazuju omotač valjka i dva omotača kupe: $P = M_v + 2M_k = 96\pi$ cm^2.

609. Slično prethodnom zadatku i **primeru C**. Dobija se telo u obliku valjka iz koga su na obe baze "izvadene" kupe sa izvodnicom koja je jednaka kraku trapeza. Rezultati: $P = 240\pi$ cm^2 i $V = 342\pi$ cm^3.







610. Razvijanjem omotača dobijemo kružni isečak poluprečnika $s = AS$, pa je najkraći put tetiva AB tog isečka (srednja slika). Treba odrediti centralni ugao ASB. Prema slici levo je $s^2 = r^2 + H^2 = \left(\frac{2000}{3}\right)^2 + \left(\frac{100\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1000000$, pa je $s = 1000$ m. Iz formule za dužinu luka ACB, slika desno, dobijamo: $l = \frac{s\pi\alpha}{180}$, gde je l polovina kruga prečnika AB na slici levo. Dakle: $\frac{2000\pi}{3} = \frac{1000\pi\alpha}{180}$, odakle je $\alpha = 120°$. Prema tome, tetiva AB je jednaka dvostrukoj visini jednakostraničnog trougla SAC : $AB = 2 \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2} = 1000\sqrt{3}$ m, što iznosi približno 1732 m.

9.8. Matematička takmičenja

Kengur bez granica

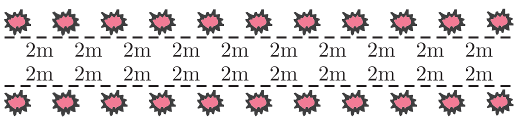
Tačni odgovori

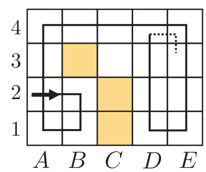
Zadaci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A)	C	A	E	D	D	C	B	E	C	D	B	D	D	A	D	B	E	A	B	B	D	D	A	B	A	C	C	D	D	D
B)	D	D	A	B	E	E	B	E	B	D	E	B	C	E	E	C	B	E	D	A	E	D	B	D	C	A	B	C	A	B
C)	C	A	C	D	B	A	C	C	B	C	E	E	C	B	D	B	D	B	D	B	D	D	E	D	E	C	A	E	C	A

A) 7. i 8. razred

A1. $\dfrac{2007}{2+0+0+7} = \dfrac{2007}{9} = 223.$ (C)

A2. Prvi grm je posađen na početku staze (na 0 metara), zatim ostali na 2 metra od prethodnog, pa je sa obe strane staze od no 20 metara posađeno no 11 grmova, ukupno 22 grma. (A)

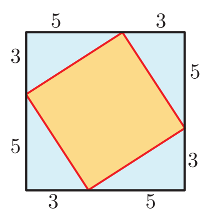




A3. Robot nikad neće stati, jer na svakom polju može da skrene desno. Njegovo kretanje je sledeće: $A2$, $B2$, $B1$, $A1$, $A2$, $A3$, $A4$, $B4$, $C4$, $D4$, $E4$, $E3$, $E2$, $E1$, $D1$, $D2$, $D3$, $D4$, pa ponovo $E4$ itd. Kretanje robota je prikazano i na slici. (E)

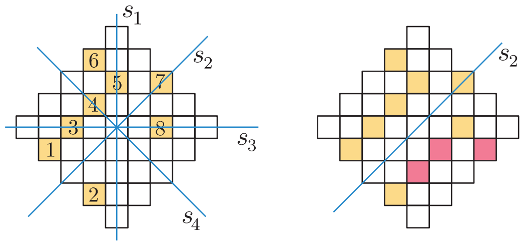
A4. Zbir brojeva sa dve suprotne strane kocke je 7, pa je zbir svih brojeva sa jedne kocke $3 \cdot 7 = 21$, a sa dve kacke je $2 \cdot 21 = 42$. Saberimo brojeve sa vidljivih strana kocki i zbir oduzmimo od 42. Zbir brojeva sa strana kocki koje se ne vide je: $42 - (1+2+2+4+6) = 42 - 15 = 27$. (D)

A5. Duž je horizontalna ako su joj ordinate (koordinate y) jednake. Taj uslov zadovoljava jedino par tačaka C i D, jer su im druge koordinate -2007, pa je horizontalna duž CD. (D)



A6. Temena manjeg kvadrata dele svaku stranicu većeg kvadrata na proporcionalne delove. Duži deo je 5, a kraći je 3. U ćoškovima većeg kvadrata se nalaze pravougli trouglovi sa katetama 3 i 5. Korišćenjem Pitagorine teoreme dobijamo da je kvadrat njegove hipotenuze, ujedmo i površina manjeg kvadrata: $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. (C)

A7. Najveći šestocifreni palindromski broj je 999999, a najmanji petocifreni palindromski broj je 10001. Njihova razlika iznosi $999999 - 10001 = 989998$. (B)



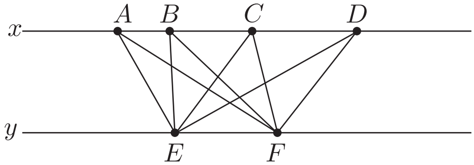
A8. Figura sa slike bez osenčenih kvadratića ima 4 ose simetrije: s_1, s_2, s_3, s_4. Vidi sliku. Od te četiri, kod tri (s_1, s_3, s_4) postoje dva kvadratića koji su međusobno simetrični, kvadrati 3 i 8 su simetrični u odnosu na osu s_1, 2 i 6 na osu s_3, a 3 i 5 na osu s_4. U odnosu na s_2 simetrični su pet kvadrata (dva para), 5 i 8, i 1 i 2 (i 7 je sam sebi simetričan). Kod ose s_2 imamo najviše već simetričnih kvadratića, pa još treba osenčiti najmanje, ukupno 3 kvadratića, da bismo dobili osno simetričnu figuru. Rešenje je prikazano i na slici. (Osenčeni kvadrati ovde su obojeni crveno.) (E)

A9. Izrazi $2x$, $6x + 2$ i $x - 1$ su negativni ako je x negativan celi broj. Izraz $x + 1$ je takođe negativan, osim ako je x jednak sa -1, onda je jednak 0. Jedino je $-2x$ uvek pozitivan za negativne vrednosti x, pa je on najveći od navedenih. (C)

A10. Obim manjeg pravougaonika sastoji se od poluprečnika kružnica. Duže stranice sadrže po 4, a kraće stranice po 2 poluprečnika. U obimu imamo ukupno $2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 12$ poluprečnika, pa je poluprečnik kružnice $60 : 12 = 5$ cm. Svaka stranica većeg pravougaonika je za dva poluprečnika duža od stranica manjeg, pa njegov obim sadrži ukupno $2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 20$ poluprečnika, što u centimetrima iznosin $20 \cdot 5 = 100$. (D)

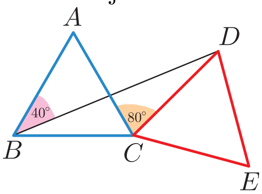
A11. Izlomljenoj liniji pripadaju po tri stranice od svakog kvadrata. Njena dužina je $3 \cdot AB = 3 \cdot 2$ cm $= 72$ cm. (B)

A12. Trouglove ca datim tačkama kao temenima možemo nacrtati, ako dve tačke uzmemo sa jedne i jednu tačku sa druge prave. Označimo tačke na pravoj x ca A, B, C i D, a tačke na pravoj y ca E i F. Broj duži na pravoj x je 6 (AB, AC, AD, BC, BD, CD). Svaka duž sa dve tačke na pravoj y obrazuje po dva, ukupno $6 \cdot 2 = 12$ trouglova. Na pravoj y postoji samo jedna duž (EF), koja sa četiri tačke na pravoj x obrazuje 4 trougla. Ukupno je $12 + 4 = 16$ trouglova na slici. (D)



A13. Nakon reklamne kampanje $\frac{1}{4}$ mušterija koji su kupovali proizvod A sada kupuju proizvod B, što je $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ od ukupnog broja mušterija. To treba dodati broju $\frac{1}{3}$, da bismo dobili koliki deo mušterija trenutno kupuje proizvod B. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ svih mušterija kupuje proizvod B, a $\frac{1}{2}$ mušterija kupuje proizvod A. (D)

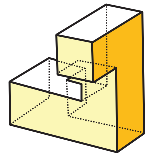
A14. Broj 10000 je kvadrat broja 100, pa se među datim brojevima nalazi 100 brojeva koji su kvadrati, a 100 je 1% od 10000. (A)



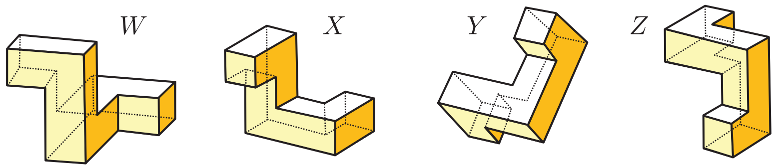
A15. Trougao BCD je jednakokraki ($BC = CD$) jer su trouglovi ABC i CDE podudarni i jednakostranični. Ugao BCD iznosi $60° + 80° = 140°$, a uglovi na osnovici BD iznose po $20°$. Ugao ABD je $60° - 20° = 40°$. (D)

A16. Brojeve možemo zapisati kao stepene sa osnovom 2 : $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$, $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$. Pošto je $3 \cdot 8 = 24$, drugi broj treba stepenovati sa 3. (B)

A17. Broj polja u jednom redu za 1 je manji nego broj uspravnih linija, a broj polja u jednoj koloni za 1 je manji od broja vodoravnih linija. Ako imamo 15 linija, najmanje 2 treba da su uspravne ili vodoravne da bismo uopšte dobili polja. Posmatrajmo taj slučaj. Sa 13 vodoravnih i 2 uspravne linije dobićemo $12 \cdot 1 = 12$ polja. Ako smanjime broj vodoravnih linija za 1, broj polja u koloni smanji se za 1 a ako ovu liniju dodamo kod uspravnih, broj polja u redu se povećava za 1, ukupni broj polja povećali smo za 10. Smanjivanjem broja vodoravnih i povećanjem broja uspravnih linija dobijamo sve više polja, dok ne stignemo do 8 vodoravnih i 7 uspravnih linija. Pošto se broj polja ne menja ako zamenimo uspravne i vodaravne linije, najveći broj polja je u slučaju da imamo 8 linija u jednom i 7 linija u drugom pravcu, pa je maksimalni broj polja $7 \cdot 6 = 42$. (E)

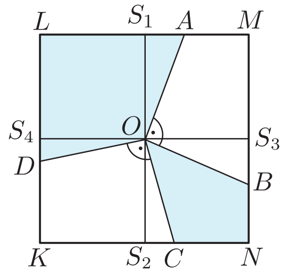


A18. Telo označena sa W možemo dobiti ako dato telo okrenemo udesno. Tela sa oznakom X ne možemo dobiti okretanjem datog tela, jer se sa slike vidi da su tela X i W ravanski simetrična, pa u tom slučaju okretanjem ne možemo da dobijemo jedno telo od drugog. Telo Y možemo dobiti ako dato telo okrenemo malo unazad, a telo na slici Z je ravanski simetrično (ravan simetrije je vadoravna) sa datim telom, pa ga ne možemo dobiti okretanjem. (A)



A19. Bilo kojim redom da izaberemo tri broja, pridržavajući se datog pravila, dobićemo zbir 15. To se lako uočava ako se odabere bilo koji broj iz tabele, pa potom zanemare njegov red i kolona, jer iz njih više ne biramo. Ostaje tablica 2×2, koja na obe dijagonale ima isti zbir vrednosti. Dakle. svejedno je šta drugo biramo. Pri tome se taj zbir tačno dopunjuje do 15 sa prvim odabranim brojem. (B)

A20. Spojimo središta suprotnih stranica kvadrata (vidi sliku). Ovim presecanjem dobićemo podudarne trouglove S_1OA i S_3OB. Naime, uglovi trouglova S_1OA i S_3OB jednaki su, jer su sa normalnim kracima. Duži OS_1 i OS_3 jednake su, jer centar kvadrata spajaju sa središtima stranica. Na sličan način možemo dokazati da su trouglovi S_2OC i S_4OD takođe podudarni. Premeštanjem tih trouglova, obojenih na mesto neobojenih, dobijamo da je površina obojenog dela jednaka polovini površine kvadrata. Površina kvadrata je $2^2 = 4$, pa je površina obojenog dela 2. (B)



A21. Jovanka je ukucala šestocifreni broj u svoj digitron, pa je dva puta ukucala 1, jer je pokvareni digitron prikazao četvorocifreni broj 2007. Mogućnosti su sledeće: 112007, 121007, 120107, 120017, 120071, 211007, 210107, 210017, 210071, 201107, 201017, 201071, 200117, 200171, 200711. Ukupno 15 načina. (D)

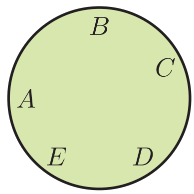
A22. Dužinu ravnog dela puta označimo ca x, a dužinu uspona sa y. Iz formule za brzinu izrazimo vreme, pošto znamo da je cela tura trajala 2 sata: $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$. Na osnovu toga možemo sastaviti sledeću jednačinu: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{x}{4} = 2$. Saberimo izraze koji sadrže x i one koji sadrže y. Dobićemo $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 2$, odnosno da je polovina puta u jednom smeru 2 km. Aka taj broj pomnožimo sa 2 dobićemo dužinu puta u jednom smeru, 4 km, a dužina cele ture je: $4 \cdot 2 = 8$ km. (D)

A23. Označimo momke redom početnim slovima njihovih imena: A, B, V, G, D, $Đ$. Na osnovu uslova možemo napisati sledeće nejednačine: $A + B < V + G$, $V + D < G + Đ$. Ako saberemo leve i desne strane tih nejednačina, dobićemo sledeće: $A + B + V + D < V + G + Đ + B$. Ako sa obe strane nejednačine poništimo ista slova, koja označavaju iste momke, dolazimo do nejednačine: $A + D < G + Đ$, koja znači da su Aleksa i Dušan zajedno lakši od Đorđa i Gorana. Iskaz koji je sigurno tačan nalazi se pod panuđenim odgovorom (A).

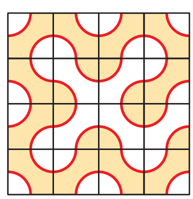
A24. Prva cifra četvorocifrenog broja mora biti različita od 0, pa se 0 sigurno nalazi u broju najmanje jednom, a uz nju i još neka cifra na prvom mestu. To već znači da se nijedna cifra ne pojavljuje tri puta pa 3 ne učestvuje u broju, i na četvrtom mestu sigurno je cifra 0. Broj može da sadrži samo cifre 0, 1 i 2. Neka je 1 na prvom mestu, što znači da se 0 pojavljuje jednom, rekli smo na četvrtom mestu. Broj za sada izgleda 1__0. Na drugom mestu nije 1, jer bi se ona već drugi put pojavila. Dakle, na drugom mestu jedino je moguća cifra 2. Ostalo je da na treće mesto, koje pokazuje broj dvojki, smestimo cifru 1 koja i treba da se pojavi još jednom. Dobijen je broj 1210. Ako broj počinje sa 2, dve su 0 među ciframa, jedna je četvrta, a druga na drugom ili trećem mestu. Na trećem mestu nije jer ono pokazuje koliko se puta pojavljuje cifra 2 koja je već na prvom mestu. Dakle, 0 je na drugom mestu. Preostaje da otkrijemo treću cifru broja 20_0. Ona mora da bude 2 jer se sama cifra 2 tako pojavljuje dva puta. Drugi traženi broj je 2020. Dakle, samo su dva takva broja moguća. (A)

A25. Ako pozitivan celi broj n ima dva pozitivna delioca, on je prost. Broj $n+1$ ima 3 pozitivna delioca, iz čega zaključujemo da je taj broj kvadrat, jer kvadrati imaju neparan broj delilaca. Kvadrati koji imaju tri delioca su kvadrati prostih brojeva. Ako je $n+1$ neparan, onda je n paran, a pošto je prost, to može biti samo 2. No, 3 nije kvadrat, nego je prosti broj, koji ima samo dva delioca, ne tri. Odatle znamo da je $n+1$ paran, pa je kvadrat parnog prostog broja. Među parnim brojevima je samo 2 prost. $n+1$ je 4, $n+2$ je 5. Pošto je i on prost broj, ima 2 delioca. (A)

A26. Pošto je zbir Ognjenovih brojeva tri puta veći od zbira Strahinjinih brojeva, zbir svih osam brojeva koje su izabrali treba da bude deljiv sa 4. Saberimo sve brojeve u tablici: $4+12+8+13+24+14+7+5+23=110$. Podelimo 110 sa 4. Količnik će biti 27, a ostatak je 2. To znači da broj koji ostaje u tablici, deljen sa 4 daje ostatak 2. Jedini takav broj je 14. (C)



A27. Označimo brejeve sa A, B, C, D i E. Pošto nikoja dva susedna broja ne daju zbir deljiv sa 3, ti brojevi ne mogu biti: a) takvi da jedan daje ostatak 1 a drugi 2, pri deljenju sa 3, b) oba deljiva sa 3. Mogu biti takvi da a) jedan je deljiv sa 3, a drugi daje ostatak 1 ili 2 pri deljenju sa 3, ili b) oba daju ostatak 1 ili c) oba daju ostatak 2. U ovom slučaju, od datih 5 brojeva, najviše dva broja mogu biti deljiva sa 3, npr. A i D, jer ne smeju biti jedan do drugog. Ako uzmemo u obzir i drugi uslov, da ni zbir tri susedna broja ne sme biti deljiv sa 3, zaključujemo da susedi brojeva A i D moraju da daju isti ostatak (1 ili 2) pri deljenju sa 3. Među datih pet, najviše je dva broja koja mogu biti deljiva sa 3. Proverimo da li postoji druga mogućnost da je manje od dva broja deljivo sa 3. Pretpostavimo da imamo jedan broj deljiv sa 3, neka to bude A. Onda zbog drugog uslova E i B moraju da daju isti ostatak pri deljenju sa 3. Ali zbog prvog uslova B i C, i E i D kao susedi takođe treba da daju isti ostatak, pa ćemo imati tri susedna broja B, C i D ili C, D i E čiji će zbir biti deljiv sa 3. Nemoguće je da među pet datih brojeva bude samo jedan koji je deljiv sa 3. Pretpostavimo da nemamo nijedan broj deljiv sa 3. Ni to nije moguće, jer zbog prvog uslova svaka dva susedna treba da daju isti ostatak kad ih delimo sa 3, ali onda svaki broj mora dati isti ostatak, što ne odgovara drugom uslovu. Jedino rešenje je da među datih pet brojeva ima dva deljiva sa 3. (C)



A28. Da bismo pokrili površinu 80 cm × 80 cm, potrebno je 10 pločica dimenzija 20 cm × 20 cm. Samo jedna četvrtina kružnice na pločicama može da se spoji sa drugom čevrtinom na susednoj pločici. Treba naći najbolje rešenje, da bi ta spojena linija bila najduža. To je svakako linija koja se prostire kroz sve kvadrate. Jedno od rešenja je prikazano na slici. Dužina te linije se sastoji od 22 četvrtine, koje su dužine $\frac{2\cdot 10}{4}\pi = 5\pi$, pa je dužina $22\cdot 5\pi = 110\pi$. (D)

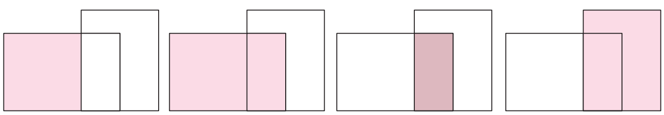
A29. Označimo trocifreni broj sa x. Poštoje x deljiv sa 9, zbir njegovih cifara je deljiv sa 9. Označimo sa y količnik deljenja trocifrenog broja sa 9. I y je deljiv sa 9, jer je jednak razlici dva broja koji su deljivi sa 9. Zbir cifara broja x, pošto je on trocifren može da buda 9, 18 ili 27. Odbacujemo 27 jer bi tada traženi broj bio 999, a to podeljeno sa 9 daje 111, koji nije deljiv sa 9. Zbir cifara broja x isto tako ne može biti ni 9, jer bi u tom slučaju y bio jednak 0, što je nemoguće. Zbir cifara broja x jedino može biti 18. Pošto je y dvocifren ili trocifren sa zbirom cifara 9, on tože da bude 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 ili 108. Znamo da je $x = 9y4$, pa x može biti 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 972. Od ovih brojeva samo 486, 567, 648, 729 i 972 imaju zbir cifara 18. (D)

A30. Pošto je $15 = 3\cdot 5$, i taj broj možemo da množimo sa 2 ili sa 3, ili da ga stepenujemo sa 2 ili sa 3, izložilac broja 5 ne može biti veći od izložioca broja 3, pa odgovore pod (A) $2^8\cdot 3^5\cdot 5^6$ i pod (E)) $2\cdot 3^2\cdot 5^6$ odmah odbacujemo. Odgovor pod (C) $2^3\cdot 3^3\cdot 5^3$, zbog 5^3 može doći u obzir na dva načina: sa jednim stepenovanjem sa 3, i pre toga množenjem sa 2, ali samo jednom (što je samo 2 koraka), ili prvo stepenovanjem, a posle 3 puta množenjem sa 2 (što je samo 4 koraka). Odgovor pod (B) možemo stepenovati sa 2 samo jedanput, pošto izložilac 5-ce je 2. Broj 15 treba pomnožiti sa 3 jedanput, a četiri puta sa 2 , pa potom stepenovati sa 2. To je ukupno 6 koraka. Odgovor (D) $2^6\cdot 3^6\cdot 5^4$ možemo dobiti ako ga prvo množimo sa 2, što daje $2\cdot 3\cdot 5$, potom se stepenuje sa 2, što daje $2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$, pa se sledeća dva koraka množi sa 2 i sa 3 i dobija se $2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$ i na kraju se još jednom stepenuje sa 2. Tačno rešenje je pod (D).

B) 7. i 8. razred

B1. Takmičenje će biti najkasnije kada 1. mart pada u petak. Tada će takmičenje biti 21. marta. (D)

B2. Ima 4 četvorougla (vidi sliku). (D)



B3. $2014\cdot 2014 : 2014 - 2014 = 2014^2 : 2014 - 2014 = 2014 - 2014 = 0$. (A)

B4. Trouglovi ABM, NMB, MND i CDN su podudarni, pa je površina četvorougla $MBND$ jednaka polovini površine pravougaonika $ABCD$, dakle, jednaka je 5. (B)

B5. Kako je $36 = 36\cdot 1 = 18\cdot 2 = 12\cdot 3 = 9\cdot 4 = 6\cdot 6$, vidimo da su u pitanju brojevi 1 i 36. Njihova razlika je 35. (E)

B6. Površina velikog pravouglog trougla je 2, površina malog pravouglog trougla je $\frac{1}{2}$ i površina kvadrata je I. Površina ptice je $2 + 2\cdot 1 + 4\cdot\frac{1}{2} = 6$. (E)

B7. Čistač je dodao u kofu 2 litra, što predstavlja $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ količine koja može da stane u kofu. Dakle, u kofu staje $2\cdot 4=8$ litara vode. (B)

B8. Treba da doda $3^3-7=27-7=20$ jediničnih kocki. (B)

B9. Kako je $44\cdot 777=4\cdot 11\cdot 7\cdot 111=28\cdot 11\cdot 111$; $55\cdot 666=30\cdot 11\cdot 111$; $77\cdot 444=28\cdot 11\cdot 111$; $88\cdot 333=24\cdot 11\cdot 111$ i $99\cdot 222=18\cdot 11\cdot 111$, najveću vrednost ima proizvod $55\cdot 666$. (B)

B10. Može da skine najviše 7 belih perli (ako skine 2 plave i 4 bele perle sa leve strane, 2 plave i 3 bele perle sa desne strane i zatim još jednu plavu perlu sa bilo koje strane). (D)

B11. U toku dve sedmice Jovan ima 4 časa, a Nenad 1 čas. Dakle, na svake dve sedmice Jovan ima 3 časa više od Nenada, pa će imati 15 časova više u toku $(15:3)\cdot 2=10$ sedmica. (E)

B12. Krugovi pokrivaju oblast čija je površina $5\cdot 1-4\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{2}$ cm^2. (B)

B13. Stepeni broja 2 manji od 100 su 1, 2, 4, 8, 16, 32 i 64. Lako se vidi da je $64+32+4=100$, kao i da zbir bilo koja druga tri od ovih brojeva nije jednak 100. Dakle, unuka ima 4 godine. (C)

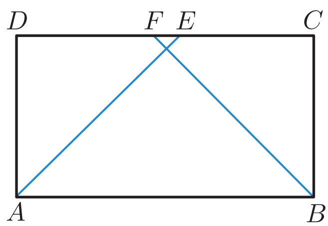
B14. Neka je kraća stranica pravougaonika dužine a, duža dužine b i $x=b-a$. Tada je $a+b+b+a=24$ i $x+b+a+b=24$, odakle dobijamo da je $a+b=12$ i $x=a$, tj. da je $a=b-a$, pa je $b=2a$. Dalje je $a+2a=12$, odakle dobijamo da je $a=4$ cm i $b=8$ cm, pa je površina jednog pravougaonika 32 cm^2. (E)

B15. U svakom koraku strelica dolazi u trougao u kom je srce prethodno bilo, pa se nikada ne može desiti da se nađu u istom trouglu. (E)

B16. Neka je tačka E presek duži BH i AD. Tada je $\sphericalangle HEA=180^\circ-4\alpha$, pa iz trougla AHE dobijamo da je $90^\circ+\alpha+180^\circ-4\alpha=180^\circ$, tj. $3\alpha=90^\circ$, pa je $\alpha=30^\circ$ i $\sphericalangle CAB=2\alpha=60^\circ$. (C)

B17. Ukupno vreme koje dečaci provode u kupatilu je $8+10+12+17+21+22=90$ minuta. Lako se vidi da se ovi brojevi ne mogu podeliti u dve grupe takve da je zbir u svakoj od njih jednak 45. Kako je $22+10+12=44$ i $8+17+21=46$, zaključujemo da oni mogu da završe sa korišćenjem kupatila najranije u 7.46 (B)

B18. Trouglovi ADE i BCF (vidi sliku) su pravougli jednakokraki, pa je $DE=AD=6$ cm i $CF=BC=6$ cm i $EF=6+6-11=1$ cm. Dakle, $CE=5$ cm, $EF=1$ cm i $FD=5$ cm. (E)



B19. Neka je bilo x pirata i neka je svaki od njih dobio po k zlatnika. Tada je $x\cdot k=(x-4)\cdot(k+10)$ i $x\cdot k-50=x\cdot(k-5)$. Iz druge jednačine je $5x=50$, tj. $x=10$. Zamenom u prvu jednačinu dobijamo $10k=6k+60$, pa je $4k=60$, tj. $k=15$. Pirati su iskopali $k\cdot x=15\cdot 10=150$ zlatnika. (D)

B20. Neka su x i y dva broja i neka je njihova aritmetička sredina za 30% manja od broja x. Tada je $\frac{x+y}{2} = 0,7x$, odakle dobijamo $x+y = 1,4x$, tj. $x = \frac{5}{2}y$. Dalje je $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}y + y\right) = \frac{7}{4}y = 1,75y$, što znači da je aritmetička sredina brojeva x i y za 75% veća od broja y. (A)

B21. Broj 9 ne može biti upisan u polje između brojeva 1 i 2, jer bi u centralnom polju morao da bude broj $15-1-2=12$. Ne može biti ni u polju između brojeva 1 i 3 (jer je $15-1-3=11$), ni u polju između brojeva 2 i 4 (jer je $15-2-4=9$). Takođe, broj 9 ne može biti upisan u centralno polje, jer bi zbir susednih polja bio $5+6+7+8 \neq 15$. Dakle, broj 9 mora biti upisan u polje koje je između brojeva 3 i 4 i onda je u centralno polje upisan broj $15-3-4=8$. Zbir brojeva upisanih u polja susedna polju sa brojem 8 je $5+6+7+9=27$. (E)

B22. Kako je $B+D) > 1000$, $B+E=800$ i $B+C=900$, zaključujemo da je $D > C > E$ i da je $C-E=100$. Iz $C+E > 1000$ i $E = C-100$ dobijamo $C+C-100 > 1000$, tj. $C > 550$, pa je $E = C-100 > 550-100 = 450$ i $B = 900-C < 900-550 = 450$. Dakle, $E > B$. Konačno, iz $A = 700-E < 700-450 = 250$, zaključujemo da je $E > A$. Prema tome, najveća težina je D. (D)

B23. Neka je O presečna tačka dijagonala AC i BD. Trouglovi ABD i ABO imaju zajedničku stranicu AB i kako je površina trougla ABD (jednakaje $10+5=15$) tri puta veća od površine trougla ABO, to je visina iz temena O u trouglu ABO jednaka $\frac{1}{2}AD$. Onda je visina trougla OCD iz temena O jednaka $\frac{2}{3}AD$ i kako su trouglovi ABO i CDO slični, to je $DC = 2AB$. Zato je površina trougla BCD jednaka $\frac{1}{2}DC \cdot AD = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot AD = 2 \cdot 15 = 30$. Dakle, površina četvorougla $ABCD$ je $10+5+30=45$. (B)

B24. Neka je x broj zadataka koje su rešile obe. Tada je $5x + 2\cdot(60-x)\cdot 4 = 312$, odakle dobijamo da je $x = 56$. (D)

B25. Neka je t vreme za koje je David planirao da stigne do dvorišta, a s put koji treba da pređe. Tada je brzina kojom se kretao na prvom delu puta:

$$v_1 = \frac{\frac{3}{4}s}{\frac{2}{3}t} = \frac{9}{8} \cdot \frac{s}{t},$$

a brzina kojom se kretao na drugom delu puta je:

$$v_2 = \frac{\frac{1}{4}s}{\frac{1}{3}t} = \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{t}.$$

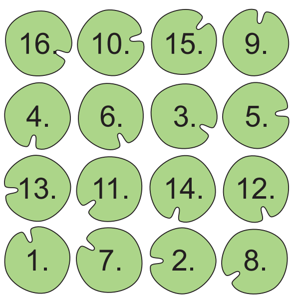
Odnos ovih brzina je $v_1 : v_2 = \frac{9}{8} : \frac{3}{4} = 3:2$. (C)

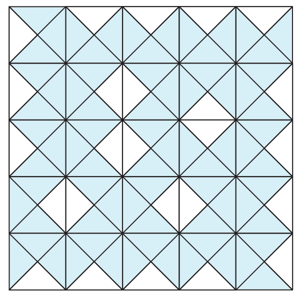
B26. Ono što se vidi na suprotnoj strani kocke prikazano je na slici (A).

B27. Neka je k broj kraljeva i ℓ broj lažljivaca. Pošto kmetovi naizmenično govore istinu i lažu, sa n ćemo obeležiti broj kmetova koji su na prvo pitanje dali lažni odgovor, a istiniti na drugo pitanje. Tada je $k+\ell+n=17$ i $\ell+n=12$, odakle jednostavno dobijamo da je $k=17-12=5$. (B)

B28. Broj M je najmanji ako su zapisani brojevi $13\cdot m$ za prvih 11 neparnih prirodnih brojeva m i za dva parna broja m manja od jedanaestog neparnog prirodnog broja, tj. od broja 21. Dakle, najmanja moguća vrednost za M je $13\cdot 21=273$. (C)

B29. Može da skoči na svih 16 listova (vidi sliku: redni broj skoka odgovara rednom broju lista na koji žaba skače redom). (A)





B30. Najpre vidimo da zbog uglova kvadrata mora da budu bar 4 plava segmenta. Ako bi svi ostali segmenti bili beli, tada bi unutrašnji kvadrat dimenzije 3×4 imao spolja sve plave segmente, a lako se vidi da je to nemoguće. Rešenje sa 5 plavih segmenata u obimu je moguće (vidi sliku). (B)

C) 7. i 8. razred

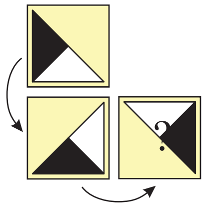
C1. Između 20,16 i 3,17 ima 17 celih brojeva (brojevi 4, 5, 6,…, 20). (C)

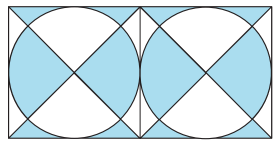
C2. Znak D nema nijednu osu simetrije, znak E ima jednu osu simetrije, znak B ima dve ose simetrije, znak C ima tri ose simetrije i znak A ima četiri ose simetrije. (A)

C3. Zbir unutrašnjih oštrih uglova trougla je 90°, pa je zbir dva označena ugla na slici jednak $2\cdot 180^\circ-90^\circ=270^\circ$. (C)

C4. Neka je x broj kome je Jelena trebalo da doda 26. Tada je $x-26=-14$, pa je $x=12$. Jelena je trebalo da dobije $12+26=38$. (D)

C5. Nakon obrtanja vidi ono što je prikazano na slici B (vidi sliku). (B)





C6. Dobio je $(9 \cdot 555) : 5 = (9 \cdot 5 \cdot 111) : 5 = 999$ grupa. (A)

C7. Ako 45 nastavnika predstavlja 60% od ukupnog broja, onda je 12% pet puta manjem a to je $45 : 5 = 9$ nastavnika. (C)

C8. Za svaki obojeni deo (vidi poslednju sliku) postoji beli deo iste površine. Zato je površina obojenog dela jednaka polovini površine celog pravougaonika, tj. $10 \cdot 20 : 2 = 100$. (C)

C9. Ako konopac dužine 1 m iseče na x delova, tada će konopac dužine 2 m iseći na $2x$ delova. Ukupan broj delova je $x + 2x = 3x$, dakle, deljiv je sa 3. Prema tome, od ponuđenih odgovora samo 8 ne može predstavljati ukupan broj dobijenih delova. (B)

C10. Ima 6 mogućih ruta: $B - A - D - B - C - D$, $B - A - D - C - B - D$, $B - C - D - A - B - D$, $B - C - D - B - A - D$, $B - D - A - B - C - D$ i $B - D - C - B - A - D$. (C)

C11. Neka su stranice pravougaonika dužina a i b. Tada je $2(a+b) = 16$ cm, na je $a + b = 8$ cm. Obim kvadrata je $4(a + b) = 4 \cdot 8$ cm $= 32$ cm. (E)

C12. Jedna crvena perla treba da predstavlja 10% svih perli. To znači da će preostalih 90% predstavljati 9 perli, tj. da treba skloniti $49 - 9 = 40$ plavih perli. (E)

C13. Kako je $\left|\frac{1}{2} - \frac{25}{79}\right| = \frac{29}{158}$, $\left|\frac{1}{2} - \frac{27}{59}\right| = \frac{5}{118}$, $\left|\frac{1}{2} - \frac{29}{57}\right| = \frac{1}{114}$, $\left|\frac{1}{2} - \frac{52}{79}\right| = \frac{52}{138}$ i $\left|\frac{1}{2} - \frac{57}{92}\right| = \frac{11}{92}$, od datih razlomaka najbliži broju $\frac{1}{2}$ je $\frac{29}{57}$. (C)

C14. Finalisti su ostvarili pobede i u četvrtfinalu i u polufinalu. Jedan od njih je imao i treću pobedu u finalu. Dakle, u finalu turnira su igrali igrač koji je imao ukupno 3 pobede i igrač koji je imao ukupno 2 pobede, a to su Emilijan i Vanja. (B)

C15. Neka trojke imaju po n godina. Tada njihova braća blizanci imaju po $n-3$ godine. Zbir godina petorice braće je tada $3n+2(n-3) = 5n-6$. Od ponuđenih brojeva jedino je broj 89 oblika $5n - 6$, $\in \mathbb{N}$ (za $n = 19$). (D)

C16. Ne može da vidi figuru B. (B)

C17. Dužina originalne trake je $9+3+6+9+6+3+6+9+6 = 57$ cm. (D)

C18. Pretpostavimo da Peca stigne Jocu posle n skokova. Do tog momenta Joca će preći $6n$ metara, a Peca $1+2+\cdots+n+\dfrac{n(n+1)}{2}$ metara. Tada je $6n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, odakle dobijamo da je $12n = n(n+1)$, odnosno, $12 = n+1$. Odavde je $n = 11$. (B)

C19. Svaka od 6 kockica koje se vide na figuri ima po dva para naspramnih strana kod kojih je zbir tačkica 7 i po jednu stranu čija je naspramna strana zalepljena. Kako su zalepljene jedna za drugu strane koje imaju isti broj tačkica, to među tih 6 strana figure čija je naspramna strana zalepljena imamo 3 para strana, tako da je zbir tačkica na svakom paru jednak 7. Dakle, ukupan broj takica na površini figure je: $6\cdot 2\cdot 7+3\cdot 7 = 15\cdot 7 = 105$. (D)

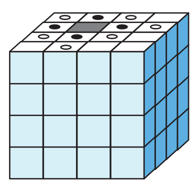
C20. Neka je x broj dečaka, a y broj devojčica u odeljenju. Tada je $x+y = 20$ i $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2}$. Odavde je $y = \dfrac{2}{3}x$, pa je $x+\dfrac{2}{3}x = 20$, odnosno, $\dfrac{5}{3}x = 20$ i $x = 12$. (B)

C21. Obojeni deo sastoji se od četiri trougla čije su stranice redom p, q, r i s, a odgovarajuća visina jednaka je dužini stranice kvadrata, tj. 6. Tada je $27 = \dfrac{1}{2}\cdot 6(p+q+r+s)$, odakle dobijamo da je $p+q+r+s = 9$. (D)

C22. Kada je Teodor mislio da je 12.00 njegov sat je pokazivao 12.05, a bilo je 12.15. Lazarov sat je u tom trenutku pokazivao 12.20, a on je mislio da je tačno vreme 12.30. (D)

C23. Devojke su pojele ukupno $1,5\cdot 12 = 18$ kolača. Kolače je jelo ukupno 10 devojaka, pri čemu su neke pojele po 2, a neke po 1 kolač. Neka je x devojaka pojelo po 2 kolača, a y po jedan kolač. Tada je $x+y = 10$ i $2x+y = 18$, odakle sledi da je $x = 8$. (E)

C24. Neka je x broj kolača koje je Crvenkapa imala u korpi na početku i y broj kolača koji je dala svakoj od tri bake. Kada je vuk pojeo pola kolača pre nego što je Crvenkapa ušla kod prve bake u korpi je bilo $\dfrac{x}{2}$ kolača. Nakon posete prvoj baki u korpi je ostalo $\dfrac{x}{2}-y$ kolača, a nakon što je vuk pojeo pola od toga, ostalo je $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}$ kolača. Nakon druge bake u korpi je ostalo $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}-y = \dfrac{x}{4}-\dfrac{3y}{2}$. Vuk je pojeo polovinu od toga, pa je u korpi ostalo $\dfrac{x}{8}-\dfrac{3y}{4}$. To je količina kolača koju je Crvenkapa dala trećoj baki. Dakle, $\dfrac{x}{8}-\dfrac{3y}{4} = y$, pa je $\dfrac{x}{8} = \dfrac{7y}{4}$, tj. $x = 14y$. Od datih brojeva jedino broj 7 sigurno deli broj kolača koje je Crvenkapa imala u korpi kada je krenula. (D)



C25. Nakon prvog dana biće 6 sivih kocki, jedna koja je bila siva i 5 njoj susednih kocki (to su 4 kocke koje su obeležene crnim krugom na slici ijedna kocka koja je ispod sive kocke). Nakon drugog dana biće još 11 novih sivih kocki i to 5 kocki ispod onih 5 koje su postale sive nakon prvog dana i 6 kocki koje su označene belim krugovima na slici. Dakle, nakon drugog dana ima ukupno $6+11=17$ sivih kocki. (E)

C26. Kako je $16 = 4\cdot 4 = 2\cdot 8 = 1\cdot 16$ i $225 = 15\cdot 15 = 9\cdot 25 = 5\cdot 45 = 3\cdot 75 = 1\cdot 225$ vidimo da se 225 ne može dobiti kao proizvod dva broja koja su veća od 16, pa su na tabli zapisani brojevi 2, 8, 9 i 25. Njihov zbir je 44. (C)

C27. Neka su r_1, r_2, r_3, r_4 i r_5 poluprečnici krugova ca centrima redom: A, B, C, D i E. Tada je $r_1+r_2=16$, $r_2+r_3=14$, $r_3+r_4=17$, $r_4+r_5=13$ i $r_5+r_1=14$. Tada je $2(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5)=74$ i $r_1+r_2+r_3+r_4=16+17=33$, pa je $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=37$ i $r_5=37-33=4$. Sada lako dobijamo da je $r_1=10$, $r_2=6$, $r_3=8$ i $r_4=9$. Dakle, tačka A je centar najvećeg kruga. (A)

C28. Da bi dobila najveći mogući broj na kocki sa znakom pitanja, potrebno je da na centralnu kocku u donjem redu zapiše najveći mogući broj. Zbir prvih devet prirodnih brojeva je $1+2+3+\cdots+9=45$, pa je najveći broj koji može da zapiše u donjem redu kocki $9+50-45=14$. Brojeve 1, 2, 3 i 4 treba da zapiše na kocke u uglovima donjeg reda (koje se nalaze samo ispod jedne kocke iz srednjeg reda), broj 14 na centralnu kocku donjeg reda (koja se nalazi ispod svih kocki srednjeg reda) i brojeve 5, 6, 7 i 8 na preostale kocke. Zbir brojeva zapisanih na kockama srednjeg reda tada će biti $1+2+3+4+2\cdot(5+6+7+8)+4\cdot 14=118$. To je ujedno i najveći broj koji Kalina može zapisati na kocki sa znakom pitanja. (E)

C29. Primetimo najpre da putnik koji je u prvom vagonu ne može imati 10 "suseda", jer bi tada, s obzirom na to da treći vagon nije prazan, svaki putnik iz drugog vagona (koji takođe nije prazan) imao više od 10 "suseda". Dakle, svaki putnik iz prvog vagona ima tačno 5 "suseda", odakle zaključujemo da je ukupan broj putnika u prva dva vagona jednak 6. Kako je treći vagon neprazan, zaključujemo da svaki putnik iz drugog vagona mora imati tačno 10 suseda, a kako ih već ima 5 u prva dva vagona, to u trećem vagonu mora biti tačno 5 putnika. Zbog simetrije problema, u poslednja dva vagona mora biti ukupno 6 putnika kao u prva dva vagona. Prema tome, ukupan broj putnika u vozu je $6+5+6=17$. (C)

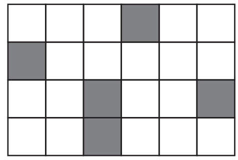
C30. Brojimo bele kocke. Ako je ona na ćošku, tada se vidi na tri strane. Na prvih pet strana bela kocka se pojavljuje 5 puta na ćoškovima. Dakle, ima ih na dva ćoška i jednom se vidi i na šestoj strani. Onda je šesta strana A) ili E). Bela kocka na sredini ivice vidi se na dve strane. Prebrojimo ih i utvrdimo da se vide na 14 mesta, pa ih ima 7. Sa one 2 na ćoškovima, to je 9. Ima 12 belih kocki, pa su preostale 3: centralna kocka koja se ne vidi i dve koje se vide u centrima dveju strana. Od pet poznatih strana samo treća ima belu kocku u sredini, pa je šesta strana na slici A. (A)

Misliša

D) 7. razred

D1. E) 36.

Radi ce o nizu brojeva kojeg čine redom kvadrati prirodnih brojeva.



D2. B) 3. Veliki pravougaonik sastoji se iz $6 \cdot 4 = 24$ polja. Traži se da odnos crnih i belih polja bude $1:2$, tj. da crnih polja bude 8, a belih 16. Na slici je 5 crnih polja, pa treba obojiti još 3 polja.

D3. E) 7.

(To su brojevi: 0; -2; 1,73; 3,14; 13,333...; $\sqrt{49}$; $\dfrac{23}{2008}$)

D4. B) 20. Šestina i po znači: šestina i još polovina od šestine, a to je šestina i još dvanaestina, tj. $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Drugim rečima, traži se broj čija četvrtina iznosi 5.

D5. E) $6a^3$.

D6. A) 10. Postoji više načina da izvršimo prebrojavanje trouglova. Recimo, da brojimo po planu od manjih, ka sve većim i većim trouglovima $(4+3+2+1 = 10)$, ili da uočimo da na ovoj slici ima onoliko trouglova koliko se duži može izbrojati na osnovici velikog trougla, tj. $(5 \cdot 4) : 2 = 10$.

D7. B) 2. Netačne su jednakosti c) i d), jer je:

c) $-10 \cdot (-0,3)^2 = -10 \cdot 0,09 = -0,9$

d) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \cdot (-3)^2 - 0,5^2 : \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{16}{9} \cdot 9 - 0,25 : \dfrac{1}{8} = 16 - \dfrac{1}{4} \cdot 8 = 14$

D8. D) 35. 35, jep je broj dijagonala konveksnog mnogougla $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$, pa je $D_{10} = \dfrac{10 \cdot 7}{2} = 35$.

D9. A) $-a^2 = (-a)^2$. Date formule tačne su redom: A) samo za $n = 0$, B) za svako $a \in R$, C) za $a \in \{0, 1\}$, D) za $a \in \{-1, 0, 1\}$, E) za $a \in \{0, 1\}$.

D10. D) $a(a+1)$ je deljiv sa 2, jep su a i $a+1$ uzastopni brojevi. Obrazloženje:

A) a je pozitivan broj – **nije tačno** jer može biti npr. $a = -5$

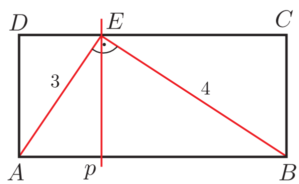
B) $a + 2$ je paran broj – **nije tačno** za a neparno

C) $3a > a$ – **nije tačno** za $a \leqslant 0$

E) $2a + 1 < 2a$ – **nije tačno** jer je $2a$ prethodnik broja $2a + 1$.

D11. D) 11. Bilo kojim redom da se vrši lomljenje, broj lomljenja je uvek za 1 manji od broja dobijenih komadića! Izvrši "probu" za više različitih slučajeva!

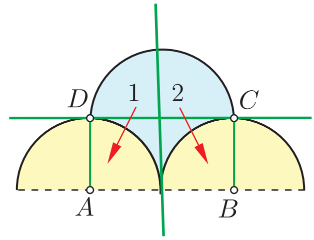
D12. A) 12. Prema podacima sa slike, trougao ABE je pravougli sa katetama 3 i 4. Njegova površina je $(3 \cdot 4) : 2 = 6$. Ako sada povučemo pravu p, kao na slici, vidimo dva nova pravougaonika od kojih je svaki katetom trougla ABE podeljen na dva podudarna trougla. To znači da je površina pravougaonika jednaka dvostrukoj površini trougla ABE, tj. $P = 2 \cdot 6 = 12$.



D13. C) 8^{11}. Sve brojeve treba pretvoriti u stepene sa osnovom 2: 2^{32}; $4^{15}=2^{30}$; $8^{11}=2^{33}$; $16^8=2^{32}$; $32^6=2^{30}$.

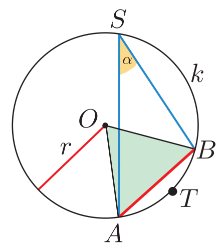
D14. D) 1, jep u datom izrazu ima parni broj negativnih faktora.

D15. D) 6. Obeležimo sa O centar datog kruga, a sa O_1 i O_2 centre dvaju od susednih traženih krugova. Tada je trougao OO_1O_2 jednakostranični, pa se dalje lako uveravamo da je odgovor 6.



D16. C) 8. Plavu figuru razrežemo i presložimo kao što je prikazano na slici! Tada se vidi da je tražena površina jednaka površini pravougaonika $ABCD$.

D17. C) 14. Treba posmatrati najnepovoljniji slučaj, tj. slučaj kada za redom iz kutije izvučemo sve crvene i sve plave klikere. Tek će sledeći (14.) kliker biti žuti, i zajedno sa prethodno izvučenim klikerima dveju boja, bićemo sigurni da među izvučenim klikerima imamo 3 raznobojna.



D18. D) 30° ili 150°. Trougao AOB je jednakostranični (prema uslovima zadatka). Ugao AOB je centralni ugao, a ASB je njemu odgovarajući periferijski ugao, pa je ugao $\sphericalangle ASB = 30^\circ$. Međutim, tetiva AB se može posmatrati i iz bilo koje tačke T luka AB na datoj kružnici. Ugao pod kojim se tada vidi tetiva AB je 150°, jer je to periferijski ugao kome odgovara centralni ugao AOB od 300° (dopuna ugla $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ do 360°).

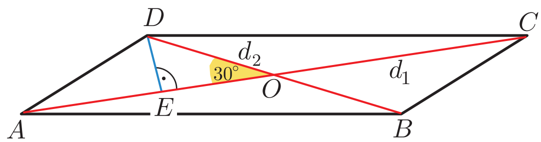
D19. A) 28. Označimo prvi broj sa a, a drugi sa b. Kad prvom broju dodamo drugi dobijamo treći, što u našem slučaju iznosi $a+b$. Dalje, drugom broju dodajemo treći i dobijamo $a+2b$. Ako tako produžimo dalje, prema uslovu zadatka, dobićemo niz brojeva: a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b=7$, $3a+5b$,...Traženi zbir šest tako nastalih brojeva je: $a+b+a+b+a+2b+2a+3b+3a+5b = 8a+12b = 4(2a+3b) = 4\cdot 7 = 28$.

D20. C) 7. Najpre je sigurno da poslednja cifra toga broja ne može biti cifra 1. Dalje, kako se radi o prostom broju, poslednja cifra ne može biti ni 0, 2, 4, 6, 8, ali ni cifra 5. Ako bi poslednja cifra bila 3 ili 9, onda bi zbir cifara toga broja bio jednak dvostrukoj poslednjoj cifri, što bi značilo da je taj broj deljiv sa 3 (dakle, opet nije prost). Tako nam konačno ostaje samo cifra 7.

D21. D) 8. Kako je $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots = 0,(\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7})$, tj, periodični razlomak sa periodom od 6 decimala (142857) i kako je $2008 = 6\cdot 334+4$, znači da će na 2008. mestu biti četvrta cifra u 335. periodi decimalnog zapisa broja $\frac{1}{7}$, a četvrta cifra u svakoj periadi je cifra 8.

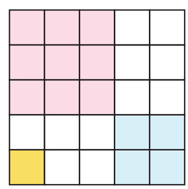
D22. E) 4017. Uočimo da $x^2+y^2+2x-4y+5 = x^2+2x+1+y^2-4y+4 = (x+1)^2+(y-2)^2 = 0$, a to je moguće samo ako je svaki od sabiraka jednak nuli, tj. $x+1=0$ i $y-2=0$. Odavde je $x=-1$ i $y=2$. Sada izračunavamo vrednost polinoma: $P(-1,2) = (-1)^{2008} + 2008\cdot 2 = 1+4016 = 4017$.

D23. C) 27. U ovom zadatku je veoma pogodno da se površina paralelograma posmatra kao zbir površina dva podudarna trougla (ABC i CDA). Osnovica trougla CDA je dijagonala d_1 a visina DE. Ostaje nam sada da visinu DE izrazimo pomoću d_1 ili d_2 (jer su nam to jedini poznati podaci). Posmatraćemo zato pravougli trougao EOD, sledeća slika. S obzirom da mu je jedan oštar ugao 30°, zaključujemo da mu je drugi oštar ugao 60°, pa taj trougao predstavlja polovinu zamišljenog jednakostraničnog trougla, čija je stranica $\frac{d_2}{2}$. Duž DE je tada polovina stranice tog zamišljenog jednakostraničnog trougla, pa je zato $DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_2}{4}$. Prema tome, površina paralelograma je: $P = 2 \cdot \frac{AC \cdot DE}{2} = AC \cdot DE = d_1 \cdot \frac{d_2}{4} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4} = \frac{12 \cdot 9}{4} = 3 \cdot 9 = 27$.



D24. C) $1 : \sqrt{5}$. Uredimo date duži y rastućem poretku: $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Hipotenuze odgovarajućih trouglova mogu biti samo c, d i e. Pri tome e može biti hipotenuza dvaju različitih trouglova. Zato imamo: $c^2 = a^2 + b^2$, $d^2 = a^2 + c^2$, $e^2 = a^2 + d^2 = b^2 + c^2$ i $e = a\sqrt{5}$. (a, $b = a\sqrt{2}$, $c = a\sqrt{3}$, $d = a\sqrt{4} = 2a$, $e = a\sqrt{5}$).

D25. D) 259. Na kvadratnoj mreži 5×5 možemo uočiti $5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 55$ kvadrata. Međutim oni nisu svi istih dimenzija, odnosno površina. Naime, na kvadratnoj mreži 5×5 možemo uočiti: $5 \times 5 = 25$ kvadratića stranice 1 cm, $4 \times 4 = 16$ kvadrata stranice 2 cm, $3 \times 3 = 9$ kvadrata stranice 3 cm, $2 \times 2 = 4$ kvadrata stranice 4 cm i konačno $1 \times 1 = 1$ kvadrat stranice 5 cm.



Njihova ukupna površina je: $25 \cdot 1 + 16 \cdot 4 + 9 \cdot 9 + 4 \cdot 16 + 1 \cdot 25 = 25 + 64 + 81 + 64 + 25 = 259$. (Na slici vidimo obojene kvadrate 1×1, 2×2, 3×3.)

E) 7. razred

E1. E) 1, jep je $(2 + 0 + 1 + 4 - 20 + 14)^{2014} = 1^{2014} = 1$.

E2. C) -1, jep je: $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = -1 + 1 - 1 = -1$.

E3. D) D.

E4. D) $\frac{15}{14}$, jer je $(1,25 - 0,5) : \left(1\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = 0,75 : \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} : \frac{12-5}{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{7} = \frac{15}{14}$.

E5. B) 6 Iz $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = \frac{2}{6}x + \frac{1}{6}x = \frac{3}{6}x = \frac{1}{2}x = 3$, sledi $x = 6$.

E6. D) 81. Dvocifenih brojeva ima 90. Među njima ima 9 brojeva koji se pišu istim ciframa. Dakle, brojeva koji se pišu različitim ciframa ima $90 - 9 = 81$.

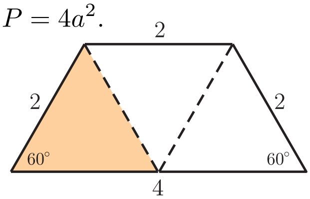
E7. E) $\frac{5}{12}$, jer je $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9+16}{16\cdot 9}} = \sqrt{\frac{25}{16\cdot 9}} = \frac{5}{4\cdot 3} = \frac{5}{12}$.

E8. A) 25%. Broj figura na tabli u tom trenutku je $9 + 7 = 16$, a to je tačno četvrtina, tj. 25% od broja polja na čitavoj tabli, tj. od 64 polja.

E9. E) $\sqrt{10}$. Pažnja, pažnja! Naći hipotenuzu jednakokrakog pravouglog trougla je isto što i naći dijagonalu kvadrata stranice $\sqrt{5}$. Dakle, $c = \sqrt{5}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{10}$.

E10. C) $4a^2$. Figura se sastoji iz 3 kvadrata stranice a i 4 podudarna trougla od kojih možemo složiti još jedan kvadrat stranice a. Zato možemo reći da se površina ove figure sastoji iz 4 jednaka kvadrata, tj. $P = 4a^2$.

E11. D) 60°, 60°, 120°, 120°. U pitanju je jednakokraki trapez sastavljen od 3 jednakostranična trougla stranice 2 cm (kao na slici).



E12. A) Sl. 1. Računaćemo redom površine datih figura:

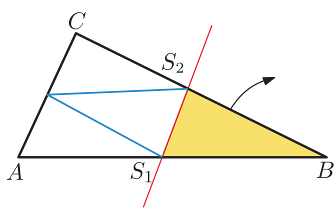
Sl. 1. paralelogram, $a = 2$, $h = 4 \Rightarrow P = ah = 2\cdot 4 = 8$.

Sl. 2. trougao, $a = 3$, $h = 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$.

Sl 3. trapez, $a = 3$, $b = 2$, $h = 3 \Rightarrow P = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}\cdot(3+2)\cdot 3 = 7,5$.

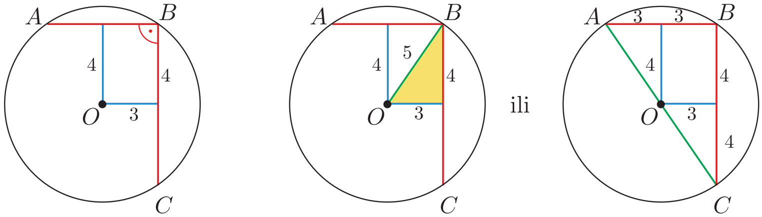
E13. A) $2\alpha = 3\beta$. Kad povučemo poluprečnik SB datog kruga, imamo $SA = SB = BC$, pa cy SAB i SCB dva jednakokraka trougla. Zato je $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = \beta$ (kao uglovi na osnovici jednakokrakog trougla) i $\sphericalangle SCB = \frac{\beta}{2}$ (jer je $\sphericalangle SBA$ spoljašnji ugao trougla SCB). Sad posmatramo ugao α. To je spoljašnji ugao trougla ASC, pa je $\alpha = \sphericalangle SAC + \sphericalangle SCA = \beta + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{2}$, tj. $2\alpha = 3\beta$.

E14. C) četvrtinu, jer je S_1S_2 srednja linija trougla, a kada bismo datom trouglu povukli sve tri srednje linije on bi bio podeljen na 4 podudarna trougla. Kako je ovo samo jedan od tih trouglova, znači da je njegova površina jednaka četvrtini površine trougla ABC.

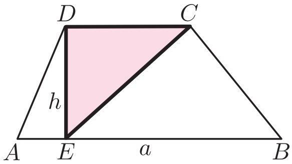


E15. D) 136°. Uglovi kod susednih temena paralelograma su suplementni, što znači da se ovde radi o zbiru uglova kod suprotnih temena, a pošto su oni jednaki, svaki od njih je jednak 44°. Stoga je njemu suplementni ugao traženi ugao, tj. $180° - 44° = 136°$.

E16. C) 10 cm. Poluprečnik $OB = 5$, pa je prečnik 10 cm. Prečnik AC je hipotenuza trougla čije su katete 6 i 8.



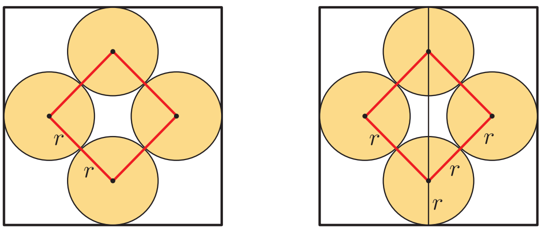
E17. E) 170 cm^2. Iz pravouglog trougla DEC je $\frac{1}{2} \cdot CD \cdot 10 = 60$, pa je $CD = 12$ (cm). Površina trapeza je $P = \dfrac{12+22}{2} \cdot 10 = 170$ (cm).



E18. D) 27. Na slici, najpre, uočimo pravilne šestouglove koji se sastoje od po 6 "malih" jednakostraničnih trouglova, a zatim redom idemo prema većim pravilnim šestouglovima, tj. onim koji se sastoje od većih jednakostraničnih trouglova. Tako dobijamo: malih (po redovima): $3+4+5+4+3=19$; srednjih: $2+3+2=7$; velikih (najveći): 1 što ukupno čini $19+7+1=27$ pravilnih šestouglova.

E19. C) 2. Kad izraz na levoj strani rastavimo na činioce, datu jednačinu možemo napisati u obliku $5x \cdot (x-2) = 0$. Proizvod je jednak 0 ako je bar jedan od činilaca tog proizvoda jednak 0. Kako je prvi od činilaca broj 5 (i on nikako ne može biti jednak 0), ostaju nam još dva činioca, pa možemo reći da je dati proizvod jednak 0, ako je $x=0$, ili $x-2=0$, tj. $x=0$, ili $x=2$, što se zapisuje i ovako: $x \in \{0, 2\}$. Dakle, ova jednačina ima dva rešenja. Njihov zbir je $0+2=2$.

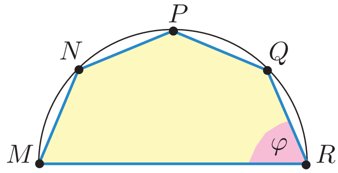
E20. D) $2+2\sqrt{2}$. Ako poluprečnik kružnice označimo sa r i spojimo centre svih kružnica, dobićemo kvadrat stranice $2r = 2$. Dijagonala tog kvadrata je $2r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Ako tu dijagonalu produžimo na obe strane (do preseka sa stranicama kvadrata) videćemo da se stranica kvadrata može izraziti u obliku: $a = r + 2r\sqrt{2} + r = 2r + 2r\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$, vidi drugu sliku.



E21. B) 7. Da bi broj bio što je moguće manji, treba, između ostalih uslova, da bude zapisan sa što manje cifara. Da bi zbir cifara što pre dostigao vrednost 2014, taj broj treba da bude zapisan sa što više devetki. Koliko nam devetki treba da bi njihov zbir bio 2014? Kako je $2014 = 223 \cdot 9 + 7$, znači da se radi o broju koji se piše sa 223 devetke i jednom sedmicom. Da bi traženi broj bio što je moguće manji, cifru 7 stavićemo na prvo mesto u tom broju. Dakle, radi se o broju: $\underbrace{799999\ldots9}_{223 \text{ devetke}}$.

E22. D) šesnaestougao. Dati ugao je polovina centralnog ugla pravilnog mnogougla: $\frac{1}{2}\varphi = 11°15'$, pa je $\varphi = 22°30' = 22,5°$. Kako je $n \cdot \varphi = 360°$, t.j. $n \cdot 22,5 = 360$, dobijamo: $n = 360 : 22,5 = 16$.

E23. D) $67°30'$. Mnogougao $MNPQR$ je polovina pravilnog osmougla, čiji je unutrašnji ugao $135°$. Traženi ugao φ je polovina ovog ugla: $\varphi = \frac{1}{2} \cdot 135° = 67°30'$.



E24. C) 4. Traženi brojevi su elementi skupa $\{-4,-3,-2,-1\}$, jep je: $\frac{2x+8}{2x+5} = \frac{2x+5+3}{2x+5} = 1 + \frac{3}{2x+5}$. Da bismo konačno imali celi broj, vidimo da broju 1 treba dodati celi broj, t.j. izraz $\frac{3}{2x+5}$ treba da bude celi broj. To će se desiti samo ako je broj 3 deljiv sa $2x+5$. Znači, $(2x+5) \in \{-3,-1,1,3\}$, odnosno $x \in \{-4,-3,-2,-1\}$. Postoje 4 cela broja za koja je dati izraz takođe celi broj.

E25. D) Te količine su jednake. Kao što se lako vidi, početne količine tečnosti u sudovima nisu bitne. Odgovor je uvek isti: U mešavini ima jednako vode u drugom sudu koliko i soka u prvom sudu. Naime, na mesto soka koji je iz flaše sa sokom prešao u flašu sa vodom, došla je voda iz flaše sa vodom, tj. dve jednake količine tečnosti samo su zamenile mesta u flašama.

F) 8. razred

F1. C) $M = \frac{P}{N}$.

F2. D) polovina. (12,5 belih i 12,5 crnih polja).

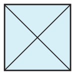
F3. A) $n - 3$

F4. D) $x = 5 \cdot y$

F5. D) 20. Obeležimo sa x broj žetona u prvom redu. Po uslovu zadatka, u svih 6 redova treba da bude ukupno 105 žetona, a u svakom sledećem redu treba da bude po 1 žeton manje nego u prethodnom. Dakle: $x + (x-1) + (x-2) + (x-3) + (x-4) + (x-5) = 105$, odakle je $6x - 15 = 105 \Rightarrow 6x = 120 \Rightarrow x = 20$.

F6. C) 3. Pera je pogrešio u zadacima, 2) i 3), jer je: $\frac{3}{4} \cdot 48 = 36$ i $\frac{15}{100} \cdot 60 = 0,15 \cdot 60 = 9$.

F7. D) 3140. Prečnik točka je $2r = 1$, pa je obim točka $O = 2r\pi = \pi \approx 3,14$ (m), a to znači da će toliki biti i njegov pređeni put pri jednom obrtu. Dalje lako izračunavamo da će sa 1000 obrta pređeni put biti $1000 \cdot 3,14 \approx 3140$ (m).

F8. E) 

F9. D) 48. Samo tri od 4 date cifre su “kandidati” za mesto cifre stotina u traženom broju, tj. trocifren broj ne može počinjati cifrom nula. Za mesto cifre desetica i cifre jedinica u traženom trocifrenom broju imamo po 4 “kandidata”, pa je pomoću datih cifara moguće napisati $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ trocifrenih brojeva.

F10. D) 6,5. Visina drveta se odnosi prema dužini svoje senke isto onako kako se dužina štapa odnosi prema dužini svoje senke, tj. $x : 10 = 1,3 : 2$. Odavde je $x = 6,5$ metara.

F11. E) 3. Rešavanjem jednačine $\dfrac{x+1}{4} = x - 2$ dobijamo $x = 3$.

F12. E) 7 kćeri, 118 forinti. Označimo sa x broj kćeri, a sa s broj forinti koje im je poklonio. Prema uslovima zadatka je:

$$\left.\begin{array}{l} 16x = s - 6 \\ 17x = s + 1 \end{array}\right\}$$

Oduzimanjem prve jednačine od druge dobijamo $x = 7$, pa je dalje $s = 118$. Prema uvedenim oznakama to znači da je deda Sima imao 7 kćeri i da im je podelio 118 forinti.

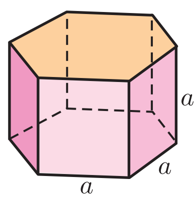
F13. D) $2D^2$, jer je $D^2 = d^2 + a^2 = 3a^2$, a $P = 6a^2 = 2 \cdot 3a^2 = 3D^2$.

F14. E) 120. Svaki od obojenih pravougaonika prikazuje po jedan od artikala. Ovo je ujedno i logički zadatak, pa grafikon možemo čitati i na sledeći način: najviši i najniži pravougaonik predstavljaju broj svezaka (jer su se najčešće prodavale) i broj gumica (jer su se najređe prodavale). Ostaju nam još prvi i drugi pravougaonik na grafikonu. Kako je olovaka prodato višs iego leljira, znači da prvi (viši) predstavlja broj prodatih olovaka, a drugi broj prodatih lenjira. Kao što sa slike vidimo, u nivou visine prvog stupca na vertikalioj osi stoji broj 120.

F15. A) 1° *Obrazloženje*: $M = \dfrac{2}{3}x + 10$ i $\check{Z} = \dfrac{1}{3}x + 10 \Rightarrow M > \check{Z}$

F16. D) 4800. $V = \dfrac{2}{3} \cdot 20 \cdot 15 \cdot 2,4 = 480$ (m^3), $V = 480000$ lit $= 4800$ hl.

F17. A) $300(2+\sqrt{3})$. $P = 2 \cdot 6 \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6a^2 = 3a^2(\sqrt{3}+2) = 300(\sqrt{3}+2)$, vidi sliku desno.



F18. E) 3. Da bi nam jednačina bila što jednostavnija, označimo sa v brzinu devojčice. Tada brzina dečaka predstavlja $3v$, pa imamo: $8 \cdot 3v + 8 \cdot v = 32$, odakle je $(3v + v) \cdot 8 = 32$, odakle je $4v = 4$, pa je $v = 1$ (m/s). Kako je v brzina devojčice, znači da je brzina dečaka 3 m/s.

F19. B) 2. Tačne su formule 3° i 5°.

F20. D) 34. Obratite pažnju! Klikere uzimamo iz kutije **ne** gledajući u kutiju. Osim toga, zadatak treba da rešimo tako da naš odgovor važi i u **najnepovoljnijem slučaju**. Šta je u ovom zadatku najnepovoljniji slučaj? Ako želimo klikere iste boje, a izvlačimo iz kutije raznobojne klikere, to su za nas nepovoljni slučajevi. Koliko puta to može da nam se desi? Ako nam se desi da iz kutije uzmemo 11 crvenih, 11 plavih i 11 žutih klikera – još uvek nismo rešili zadatak. Sada je jasno da će sa uzimanjem sledećeg, 34. klikera, zadatak biti rešen. Taj kliker, ma koje boje bio, biće dvanaesti kliker iste boje kad se pridruži nekoj od grupa od po 11 klikera jedne boje, koje smo prethodno već uzeli.

F21. E) 4. Uradi najpre redom nekoliko konkretnih proba, a zatim otkrij pravilo! Trebalo bi uočiti sledeće: Prema uslovu zadatka imamo $a = 3k+1$, a pošto je a papni broj, onda k mora biti neparan, pa je: $a = 3k+1 = 3\cdot(2n+1)+1 = 6n+4$, što znači da je traženi ostatak 4.

F22. E) 7. Označimo sa x broj golubova na grani, a sa y broj golubova ispod drveta. Tada je: $y - 1 = \dfrac{x+y}{3}$ i $x - 1 = y + 1$, tj. $x = y + 2$. Primenom metode zamene na dobijeni sistem, imaćemo:

$$\begin{aligned}(y-1)\cdot 3 &= y+2+y\\ 3y-3 &= 2y+2\\ y &= 5\end{aligned}$$

I konačno $x = 7$, što znači da je 7 golubova sletelo na drvo, a 5 golubova je bilo ispod drveta.

F23. E) 2,77 kg. 1 kg nektara sadrži 700 g vode i 300 g suve materije. 1 kg meda sadrži 170 g vode i 830 g suve materije. Odnos suvih materija je isti kao odnos nektara. Iz proporcije $300 : 830 = 1 : x$ dobijamo $x \approx 2,77$, što znači da za 1 kg meda pčele treba da sakupe 2,77 kg nektara.

F24. B) $2x + 3y = 13$. Do odgovora možemo doći tako što ćemo upoređivati odsečke koje grafici datih jednačina čine na koordinatnim osama sa onim na slici, ili proverom koju od datih jednačina zadovoljavaju koordinate obe date tačke, ili ...

F25. D) Pobeđuje prvi, ako prvi put uzme 4 žetona. Igrač koji želi da osigura pobedu, tj. da uzme poslednji žeton, mora da vodi računa da posle njegovog pretposlednjeg poteza na gomili ostanu 6 žetona. Kad njegov protivnik odigra sledeći potez, bez obzira na to koliko žetona uzme sa gomile (od 1 do 5), na gomili će sigurno ostati bar jedan žeton za sledećeg igrača koji tako postaje pobednik. Dakle, prvi igrač obezbeđuje pobedu, ako u prvom potezu uzme sa gomile 4 žetona, a zatim pazi da na potez protivnika uvek "odgovori" tako da protivnikov broj žetona dopuni do 6.

G) 6. razred

G1. C) -1, jep je $(2+0+1-4)^{2+0+1+4} = (-1)^7 = -1$.

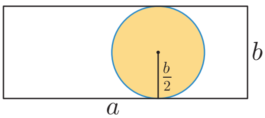
G2. C) $(-3,-1)$. Date podatke treba prikazati u koordinatnom sistemu.

G3. B) B.

G4. B) 7. $1-\dfrac{3x-5}{8}=\dfrac{3-x}{4}$ uprostimo: $8-(3x-5)=2(3-x)$, a odavde je $8-3x+5=6-2x$. Rešenje jednačine je $x=7$.

G5. C) 54, jep je $V=18\cdot 6\cdot 0,5=54$ (m^3).

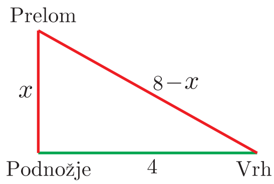
G6. D) veći od 200 i manji od 250. Ako umanjilac označimo sa b, onda je, prema uslovu zadatka, umanjenik $3b$, pa je $3b-b=470$, odakle je $b=235$, tj. to je broj veći od 200, manji od 250.

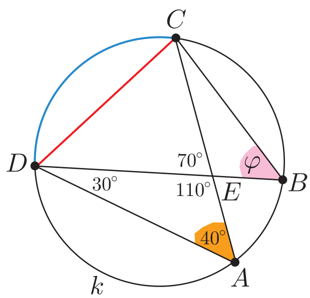


G7. D) $\pi:1$. Prema uslovu zadatka je $r=\dfrac{b}{2}$ i $r^2\pi=\dfrac{1}{4}ab$. Odavde sledi: $\dfrac{b^2}{4}\pi=\dfrac{1}{4}ab$, tj. $b\pi=a$ i konačno $\dfrac{a}{b}=\pi$, ili $a:b=\pi:1$.

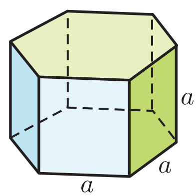
G8. E) 35. Prilikom brojanja moramo imati plan: po 1 pravougaonik, po 2 pravougaonika, ..., pa je $10+7+6+6+4+2=35$ pravougaonika.

G9. C) 3 m. Pretpostavka je da stablo stoji normalno u odnosu na tlo, pa zbog toga odgovarajući crtež predstavlja pravougli trougao čija je jedna kateta 4, a zbir druge katete i hipotenuze je 8. Primenom Pitagorine teoreme imamo:
$(8-x)^2=x^2+4^2$. Odavde je $48=16x$, pa je $x=3$,slika levo.





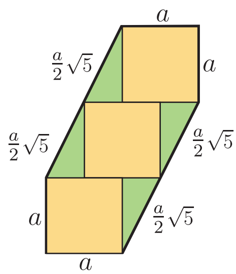
G10. A) 40°. Ugao kod temena E trougla AED je 110° (kao suplementan uglu od 70°), pa ugao kod temena A istog trougla iznosi 40°. Traženi ugao takođe ima 40°, jer je $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DBC$ (periferijski uglovi nad istom tetivom DC).



G11. D) $300(\sqrt{3}+2)$. Baza pravilne šestostrane jednakoivične prizme sastoji se iz 6 jednakostraničnih trouglova stranice a, a omotač iz 6 kvadrata stranice a. Visina te prizme je $H=a$. Prema uslovu zadatka imamo $6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=150\sqrt{3}$, odakle je $a^2=100$ i $a=10$. Sada je: $P=2B+M=2\cdot150\sqrt{3}+6a^2=300\sqrt{3}+600=300(\sqrt{3}+2)$.

G12. E) 7. Želja nam je da iz kese uzmemo 2 bombone različite vrste, a najnepovoljniji slučaj je da redom uzimamo bombone iste vrste. Najnepovoljniji slučajevi će se ponavljati sve dok iz kese ne uzmemo sve bombone iste vrste, tj. dok ne uzmemo svih 6 voćnih bombona (jer njih ima više). Tek će sedma bombona garantovano biti različita u odnosu na sve prethodno uzete bombone.

G13. E) $4a\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$. Figura se sastoji od 3 kvadrata stranice a i od 4 podudarna trougla od kojih svaki ima katete a i $\dfrac{a}{2}$ i hipotenuzu $\dfrac{a}{2}\sqrt{5}$ cm. To znači da se obim date figure sastoji iz 4 stranice kvadrata i 4 hipotenuze pravouglog trougla, pa možemo pisati: $O = 4a + 4\dfrac{a}{2}\sqrt{5} = 4a\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.



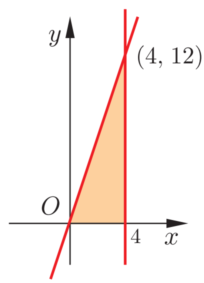
G14. A) 0. Razlika je 0 jer i Ana i Bora imaju sada po 12 godina. Ako ca a označimo broj Aninih, a sa b broj Borinih godina, onda prema uslovima zadatka imamo:

$$\begin{aligned} b+4 &= 2(b-4), \quad \text{odakle je} \quad b = 12\\ a+6 &= 3(a-6), \quad \text{odakle je} \quad a = 12e. \end{aligned}$$

Dakle, Ana i Bora sada imaju po 12 godina.

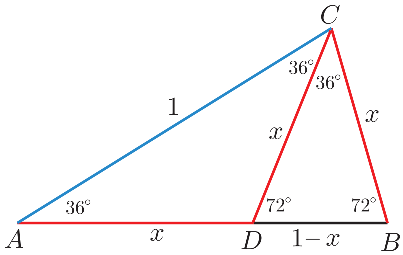
G15. A) 1000 cm^3. Formula za izračunavanje zapremine u ovom slučaju glasi: $V = 6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H = 6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2a = 3a^3\sqrt{3}$, (zbog $H = 2a$, što sledi iz podatka da je veći dijagonalni presek te prizme kvadrat). To znači da nam nedostaje samo još podatak o tome koliko je a. Kako je manja dijagonala pravilnog šestougla jednaka dvostrukoj visini jednog jednakostraničnog trougla iz baze, možemo pisati: $2\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=10$. odakle je $a\sqrt{3} = 10$. Dakle, $a = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$, pa je $V = 1000$ cm^3.

G16. B) 24. Kao što vidimo, radi ce o pravouglom trouglu čija je jedna kateta 4, a druga 12, pa je površina odgovarajućeg trougla $\dfrac{4\cdot 12}{2} = 24$.



G17. E) 3 : 2. Osnovnu ivicu kocke označićemo sa a, pa je zapremina kocke $V_k = a^3$. Prema uslovu zadatka radi se o pravilnoj četvorostranoj piramidi osnovne ivice a i visine $2a$. Njena zapremina je $V_p = \dfrac{1}{3}a^2\cdot 2a = \dfrac{2}{3}a^3$. Traženi odnos zapremina kocke i piramide je: $\dfrac{V_k}{V_p} = \dfrac{a^3}{\frac{2}{3}a^3} = \dfrac{3}{2} = 3:2$, ili $V_k : V_p = a^3 : \dfrac{2}{3}a^3 = 1 : \dfrac{2}{3} = 3:2$.

G18. D) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$. Da bi rešavao ovaj zadatak Jovan treba da bude upoznat sa pojmom sličnosti, a u našem slučaju, sa pojmom sličnih trouglova. Dakle, ima li na ovoj slici sličnih trouglova? Jovan je sigurno najpre detaljno posmatrao sliku, pa je, s obzirom na date podatke, zaključio da se na ovoj slici mogu uočiti sledeći uglovi:



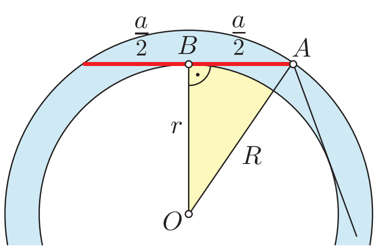
Kako je Jovan do toga došao? Ako krene od jednakokrakog trougla BCD, zaključuje da je i drugi ugao na osnovici takođe 72°, pa je zbog toga ugao pri vrhu 36°. Drugi jednakokraki trougao na ovoj slici je trougao ADC, a ugao kod temena D (u trouglu BCD) je njegov spoljašnji ugao. Zato su uglovi kod temena A i C u trouglu ADC međusobno jednaki i svaki ima po 36°. To sada znači da je trougao ABC jednakokraki (uglovi na osnovici su mu 72° i $36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$. Sada se vidi da se jedan krak trougla ABC sastoji iz delova x i $1-x$ (drugi krak je 1). Na slici, dakle, vidimo 2 slična trougla, ABC i CDB, pa sada možemo napisati proporciju: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$.

G19. C) 126. Objašnjenje: Jednocifrenih brojeva ima 2, dvocifrenih $2\cdot 2 = 2^2$, trocifrenih $2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$, četvorocifrenih $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4$, petocifrenih $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^5$ i šestocifrenih $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^6$, što ukupno čini: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126$.

G20. D) 3, jer su tačne formule b), c), d).

G21. E) 7. Jedan od načina da rešimo zadatak je i ovaj: Označimo sa m broj dečaka, a sa d broj devojčica. Prema uslovu zadatka imamo $m = d+1$ i $2(d-1) = m$, odakle dobijamo $d + 1 = 2(d - 1)$, pa je $d = 3$. Onda je $m = 4$, pa je $m + n = 7$.

G22. A) $\dfrac{a^2\pi}{4}$. Primenićemo Pitagorinu teoremu na pravougli trougao OAB na slici: $R^2 - r^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, Kako je površina kružnog prstena jednaka razlici površina opisanog i upisanog kruga datog mnogougla, imamo: $R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \pi = \dfrac{a^2\pi}{4}$.

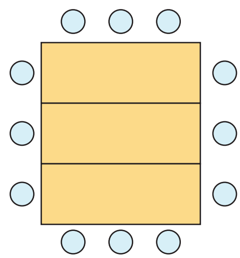


G23. B) 4. Traženi brojevi su elementi skupa $\{-1, 1, 2, 4\}$. Zaista, ako dati izraz zapišemo ovako $\dfrac{2x+2}{2x-3} = \dfrac{2x-3+5}{2x-3} = 1 + \dfrac{5}{2x-3}$. Vidimo da će on biti celi broj ako broju 1 dodamo celi broj, tj. ako izraz $\dfrac{5}{2x-3}$ bude celi broj. To će se desiti samo ako je broj 5 deljiv sa $2x-3$, tj. ako je $(2x-3) \in \{-5, -1, 1, 5\}$, odnosno $(2x) \in \{-2, 2, 4, 8\}$. To će se desiti ako je $x \in \{-1, 1, 2, 4\}$, Postoje 4 cela broja za koja je dati izraz takođe celi broj.

G24. D) $6n+2$. Stolove možemo ređati na dva načina.

a) Posmatrajmo jednu varijantu tog dugačkog stola sa manjim brojem stolova (na primer 3 stola), u trenutku kad nisu još svi gosti zauzeli svoja mesta. Šta primećujemo?

Na svakom mestu gde se stolovi spajaju, gube se mesta za po 2 osobe. Dakle, na dugačkom stolu od bočnih mesta, ostaju samo krajnje levo i krajnje desno. Osim ta dva mesta, ostala mesta zauzimaju gosti tako da za svakim stolom može da sedi po 6 osoba. Kad bismo na ovaj način nastavili dalje da ređamo stolove, imali bismo n stolova po 6 osoba i još 2 osobe na krajnjim stolicama, ukupno $6n+2$ osobe.



b) Da bi obrazloženje bilo kompletno treba razmotriti i slučaj kada su stolovi poređani ovako (na slici je primer sa 3 stola). Na svakom mestu gde se stolovi spajaju, gube se mesta za po 6 osoba (za svakim od spojenih stolova po 3 osobe). Od bočnih mesta, za svakim stolom ostaju krajnje levo i krajnje desno, tako da za svakim stolom mogu da sede još po 2 osobe. Osim njih, samo za prvim i poslednjim stolom mogu da sede još po 3 osobe. Tako bismo imali n stolova ca po 2 osobe i još 6 osoba za prvim i poslednjim stolom, tj. ukupno $2n+6$ osoba. Kako je $n>1$ lako se možemo uveriti da je $6n+2>2n+6$, na primer, ovako: $6n+2 = 2n+6+4n-4 = 2n+6+4(n-1) > 2n+6$, za $n>1$.

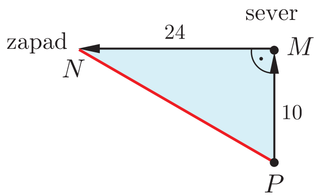
G25. C) Te količine su jednako. Vidi rešenje zadatka E25.

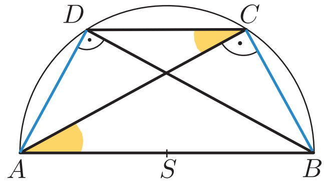
Školska takmičenja

H1. Dobijamo broj: $\dfrac{2}{3} \cdot 0,4 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

H2. Iz $79^{499} < 81^{499} = (3^4)^{499} = 3^{1996} < 3^{1997}$, sledi da je $79^{499} < 3^{1997}$.

H3. Na slici vidimo kretanje broda. Ka severu za $\dfrac{1}{3}$ sata pređe $30 \cdot \dfrac{1}{3} = 10$ km. Ka zapadu plovi narednih pola sata (30 minuta) i pređe $48 \cdot 0,5 = 24$ km. Udaljenost od pristaništa određuje hipotenuza NP pravouglog trougla MNP: $NP = \sqrt{MP^2 + MN^2} = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26$ km.





H4. Središte hipotenuze je centar kruga opisanog oko pravouglog trougla, pa je središte S osnovice AB centar kružnice opisane oko trapeza $ABCD$. (Po uslovu je $\sphericalangle ACB = 90° = \sphericalangle ADC$.) Sada su uglovi ACD i BAC jednaki (sa paralelnim kracima), pa je $AD = BC$, kao tetive koje odgovaraju jednakim periferijskim uglovima. Dakle,m $ABCD$ je jednakokraki trapez.

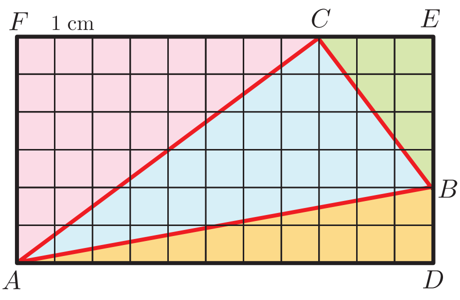
H5. Kako je $\sqrt{x^2} = |x| = |\sqrt{2} - 1997| = 1997 - \sqrt{2}$, biće $A = x + 1 + \sqrt{x^2} = \sqrt{2} - 1997 + 1 + 1997 - \sqrt{2} = 1$. Dakle:$A = 1$.

I1. Uočimo da je: $\sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$. Slično je: $\sqrt{245} = \sqrt{49 \cdot 5} = 7\sqrt{5}$, zatim $\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$ i $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$. Dakle, dati izraz ima vrednost: $\dfrac{2 \cdot 5\sqrt{7}}{5} - \dfrac{3 \cdot 7\sqrt{5}}{7} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{5} = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{5} = 0$.

I2. "Levi" trougao, prema slici, ima osnovicu $2 - (0,6 + 0,6) = 0,8$ cm i visinu 0,8 cm, pa je njegova površina: $P_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,32\ \text{cm}^2$. Slično, površina "desnog" trougla je $P_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,8 = 1,8\ \text{cm}^2$. Površina P pravougaonika je $P = 4 \cdot 2 = 8\ \text{cm}^2$. Tražena površina je: $P - P_1 - P_2 = 8 - 0,32 - 1,8 = 5,88\ \text{cm}^2$.

I3. Znamo da je $0,\dot{1} = \dfrac{1}{9}$, pa je $\sqrt{0,\dot{1}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$, racionalan broj.

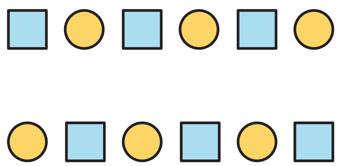
I4. Primenimo Pitagorinu teoremu na pravougloe trouglove ADB, BEC i ACF. Dobijamo redom: $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 11^2 + 2^2$, odnosnoo $AB^2 = 125$; $BC^2 = BE^2 + CE^2 = 4^2 + 3^2$, odnosno $BC^2 = 25$ i $AC^2 = AF^2 + CF^2 = 6^2 + 8^2$, odakle je $AC^2 = 100$. Sada za trougao ABC važi jednakost: $BC^2 + AC^2 = 25 + 100 = 125 = AB^2$. Dakle: $AB^2 = BC^2 + AC^2$, pa, na osnovu obrnute Pitagorine teoreme, zaključujemo da je trougao ABC pravougli.

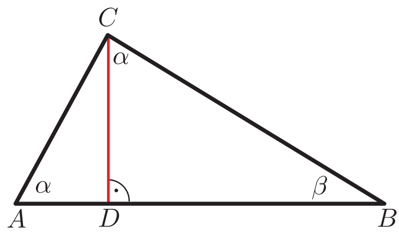


I5. a) Najveći je 99927. b) Najmanji je 10017.

J1. Neka je u prvom džaku a kg šećera. Onda je u drugom $\frac{5}{4}a$ kg , a u trećem $0,425a$ kg šećera. Ukupno ima $a+\frac{5}{4}a+0,425a=64,2$ kg šećera. Kako je $\frac{5}{4}=1,25$, imamo uslov: $2,675a=64,2$, odakle je $a=64,2:2,675=64200:2675=24$ kg. U prvom džaku ima 24 kg šećera.

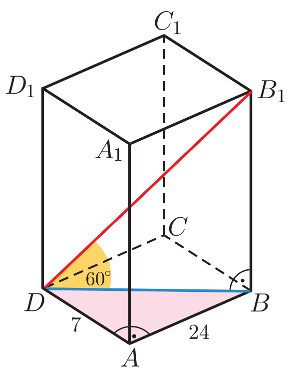
J2. Označimo plavim kvadratićima stolice u kojima sede dečaci, a narandžastim kružićima stolice devojčica. Vidimo na slici dva moguća rasporeda ovih stolica. Dečaci se mogu rasporediti u svoje stolice na $3\cdot2\cdot1=6$ načina, a isto tako i devojčice u svojim stolicama. Ukupan broj rasporeda je: $6\cdot6+6\cdot6=72$.

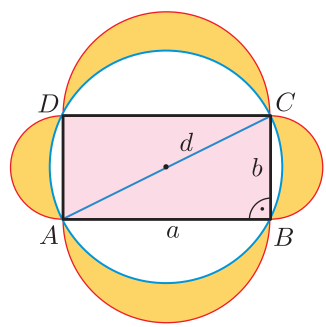




J3. Ugao BCD u pravouglom trouglu BCD komplementan je uglu β trougla ABC, što se vidi na slici gore. Zbog toga su slični pravouglo trouglovi ADC i CDB, pa su im proporcionalne katete: $AD:CD=CD:BD$. Odavde je $CD^2=AD\cdot BD$.

J4. Ugao kojeg dijagonala kvadra zahvata sa osnovom kvadra određen je tom dijagonalom i dijagonalom osnove. Na slici levo to je $\sphericalangle BDB_1=60^\circ$. Iz baze izračunamo dijagonalu BD, pomoću Pitagorice teoreme: $BD^2=AB^2+AD^2=24^2+7^2=625$. Odavde je $BD=25$ cm. Onda iz pravouglog trougla BB_1D nalazimo visinu kvadra: $H=BB_1=BD\sqrt{3}=25\sqrt{3}$ cm. Prema tome, $P=(336+1550\sqrt{3})$ cm^2 i $V=4200\sqrt{3}$ cm^3.



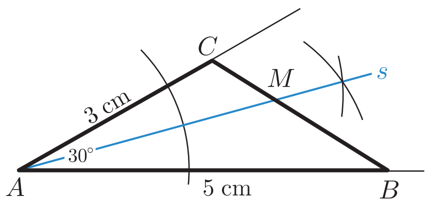


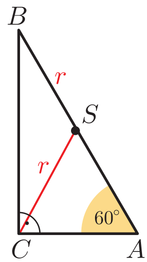
J5. Neka su a, b i d stranice i dijagonala pravougaonika $ABCD$. Važi jednakost: $d^2=a^2+b^2$. Zbir površina četiri polumeseca računamo tako što od zbira površina pravougaonika i četiri polukruga oduzmemo površinu kruga opisanog oko pravougaonika. Dakle, $P = a\cdot b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \left(\frac{b}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{d}{2}\right)^2\pi = ab + \frac{a^2\pi}{4} + \frac{b^2\pi}{4} - \frac{d^2\pi}{4} = ab + \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2 - d^2)$. Pritom $a^2 + b^2 - d^2 = 0$, jer je $a^2 + b^2 = d^2$. Ostaje: $P = a\cdot b$, što se i tvrdi.

K1. Odgovor daje jednačina $\frac{2x-5}{3} = 5 + \frac{1-3x}{2}$. Rešenje je $x = \frac{43}{13}$.

K2. Vidi rešenje **zadatka 541**: a) 21 prava; b) 16 ravni.

K3. Trougao ABC određen je po stavu SUS, pa se lako konstruiše, slika levo. (Prvo se konsturuiše ugao od $30°$ sa temenom A.) Prema osobini simetrale unutrašnjeg ugla u trouglu, tražena tačka M je presek simetrale s ugla $\sphericalangle BAC$ sa stranicom BC.





K4. Prečnik opisanog kruga pravouglog trougla je hipotenuza. Dati trougao poznat je kao polovina jednakostraničnog trougla. Na slici desno data je kateta $BC = 3\text{ cm} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$. Odavde je $AB\sqrt{3} = 6$ cm, odnosno: $AB\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, pa je $3AB = 6\sqrt{3}$. Dakle $AB = 2\sqrt{3}$ cm, pa je $r = \sqrt{3}$ cm. Površina opisanog kruga je $P = r^2\pi = 3\pi\text{ cm}^2$.

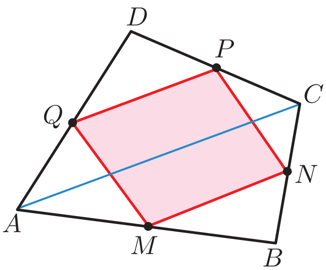
K5. Svih 15 radnika dovršilo bi drugu polovinu posla za 20 dana. To je ukupno $15\cdot 20 = 300$ radnih dana, pa će preostalih 12 radnika dovršiti posao za $300 : 12 = 25$ dana. Celi posao urađen je za $20 + 25 = 40$ dana.

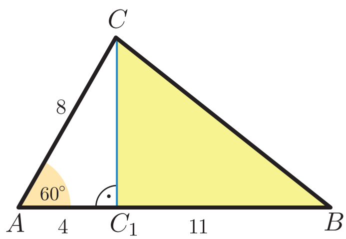
Opštinska takmičenja

L1. Ako neku cenu c snizimo za $p\%$, dobićemo novu cenu: $c - c\cdot\frac{p}{100} = c\left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Posle prvog sniženja cena je bila $25000\left(1 - \frac{p}{100}\right)$, a posle drugog sniženja je $25000\left(1 - \frac{p}{100}\right)\cdot\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 16000$, odnosno $25000\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 16000$. Odavde je $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{16}{25}$, pa je $1 - \frac{p}{100} = \frac{4}{5}$. Rešenje ove jednačine po nepoznatoj p je $p = 20\%$. Za toliko je dva puta snižena cena.

L2. $\sqrt{6+\sqrt{6}} < \sqrt{6+\sqrt{9}} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3 < 3,00001$. Dakle, $\sqrt{6+\sqrt{6}} < 3,00001$.

L3. Koristimo osobine srednje linije trougla. Uočimo dijagonalu AC datog četvorougla, slika levo. Duž MN je srednja linija trougla ABC, pa je $MN = \frac{1}{2}AC$ i MN paralelno sa AC. Dalje, duž PQ je srednja linija trougla ACD, pa je i $PQ = \frac{1}{2}AC$ i PQ paralelno sa AC. Dakle, $MN = PQ \left(= \frac{1}{2}AC\right)$ i MN paralelno sa PQ (obe duži paralelne sa AC), pa je četvorougao $MNPQ$ paralelogram. (Ima naspramne stranice, MN i PQ, paralelne i jednake.)





L4. Trougao ACC_1 je pravougli, kao u **zadatku K4**. Budući da je $AC = 8$ cm, biće $AC_1 = 4$ cm, slika desno, a $CC_1 = 4\sqrt{3}$ cm je jedna od traženih visina: $h_c = 4\sqrt{3}$ cm. Sada su poznate dve katete u trouglu BCC_1, pa izračunamo hipotenuzu: $BC = \sqrt{BC_1^2 + CC_1^2} = \sqrt{11^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{121 + 48} = \sqrt{169} = 13$ cm. Druge dve visine trougla ABC odredićemo iz površine trougla: $P = \frac{1}{2}AB \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$ cm^2. Kako je $BC = a = 13$, iz $P = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, odnosno iz $30\sqrt{30} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot h_a$, dobijamo: $h_a = \frac{60\sqrt{3}}{13}$. Slično izračunamo i $h_b = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

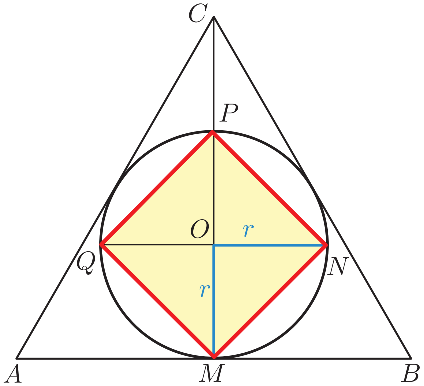
L5. $\left|\frac{a^2+b^2}{2} - ab\right| + \left|\frac{a^2+b^2}{2} + ab\right| = \left|\frac{a^2+b^2-2ab}{2}\right| + \left|\frac{a^2+b^2+2ab}{2}\right| = \left|\frac{(a-b)^2}{2}\right| + \left|\frac{(a+b)^2}{2}\right| = \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2}$, jer su oba sabirka nenegativna. Kada se oslobodimo zagrada i saberemo dobićemo da je ovaj zbir jednak $a^2 + b^2$.

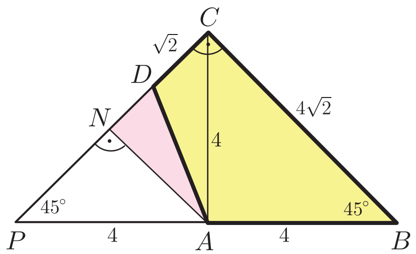
LJ1. Kako je $8 = 3^3$ i $32 = 2^5$, biće $\frac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4} = \frac{((2^3)^5)^{4n}}{((2^5)^{3n})^4} = \frac{2^{60n}}{2^{60n}} = 1$.

LJ2. $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ i $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$. Dalje je $|x+1| = |2-\sqrt{3}+1| = |3-\sqrt{3}| = 3-\sqrt{3}$, jer je $3-\sqrt{3} > 0$, a $|x-1| = |2-\sqrt{3}-1| = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$, jer je $1 < \sqrt{3}$. Dakle: $\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} + 2\sqrt{3} = 3 - \sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) + 2\sqrt{3} = 3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} = 4$.

LJ3. Poluprečnik upisanog kruga je $OM = r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ cm, slika levo. Dijagonale upisanog kvadrata predstavljaju dva normalna prečnika kruga. Stranicu kvadrata odredimo iz jednakokrakog trougla OMN i $MN = r\sqrt{2} =$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{6}$ cm. Onda je površina kvadrata $P_k = MN^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$ cm^2. Površina datog trougla je $P_t = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2. Iz $P_k \cdot P_t = 6 : 9\sqrt{3} = \dfrac{6}{9\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} = \dfrac{2\cdot 1,73}{9} = 0,38\ldots$, zaključujemo da površina kvadrata predstavlja približno 38% površine trougla ABC.



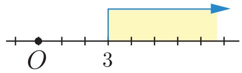


LJ4. Produžimo stranice AB i CD do preseka P, slika gore desno. Ugao BPC ima 45°, pa je BPC jednakokraki trougao sa hipotenuzom $BP = 8$ cm, čije je središte tačka A. Onda je i $AC = AB = 4$ cm, pa je i ACP jednakokraki pravougli trougao sa hipotenuzom $CP = 4\sqrt{2}$ cm i hipotenuzinom visinom $AN = CN = 2\sqrt{2}$ cm. Sledi da je $CN = 2\sqrt{2}$ cm, pa je $DN = DC = \sqrt{2}$ cm. Sad iz pravouglog trougla ADN nalazimo: $AD^2 = AN^2 + DN^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 8 + 2 = 10$, pa je $AD = \sqrt{10}$ cm. Obim čevorougla $ABCD$ je $O = 4 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{10} = (4 + 5\sqrt{2} + \sqrt{10})$ cm. Površinu odredimo kao zbir površina trouglova ABC i ACD. Dakle, $P = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC + \dfrac{1}{2}CD\cdot AN = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 + \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 10$ cm^2.

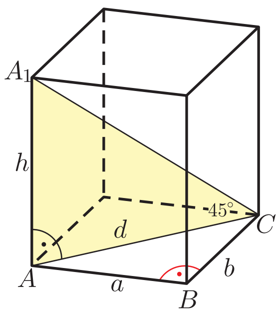
LJ5. Neka je na početku u red selo n gledalaca. Onda se između njih smestio $(n-1)$ gledalac, pa ih sada ima $2n-1$. Onda se između njih smestilo još $2n-2$ gledalaca, pa ih ima $4n-3$ ukupno. Konačno, treći put, između ovih $4n-3$ smestilo se još $4n-4$ gledalaca, što čini ukupno $8n-7 = 2009$ gledalaca. Odavde je $n = 252$.

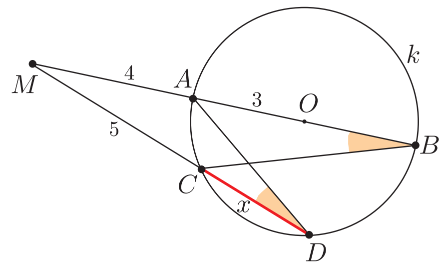
M1. Ako se iz druge cisterne odlije x litara na st, onda se iz prve odlije $3x$ litara na sat. Dakle, $540 - 6\cdot 3x = 360 - 6\cdot x - 60$. Rešavanjem jednačine dobija se $x = 20$ litara, pa se iz prve cisterne svakog sata odlije 60 litata, a iz druge 20 litara vode.

M2. Sredimo datu nejednačinu: $(x-3)^2 - x(x-3) < 0$, odnosno $x^2 - 6x + 9 - x^2 + 3x < 0$, pa je $-3x < -9$. Rešenje je $x > 3$ i vidimo ga desno na brojevnoj pravoj.



M3. Dijagonalu d osnove odredimo iz pravouglog trougla ABC, slika dole levo: $d^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100$. Odavde je $d = 10$ cm. Kako je $\sphericalangle ACA_1 = 45°$, trougao AA_1C je pravougli jednakokraki, pa je visina kvadra: $h = AA_1 = d = 10$ cm. Onda je površina kvadra $P = 376\ \text{cm}^2$, za zapremina $V = 480\ \text{cm}^3$.

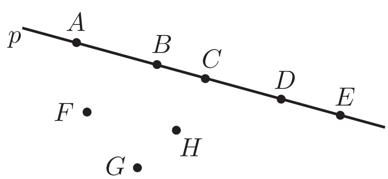


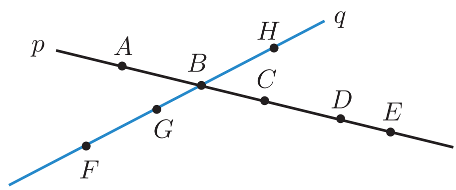


M4. Označimo sa A i B presečne tačke prave OM sa kružnicom k, kao na slici. Tada je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$, kao periferijski uglovi nad istim lukom AC. Trouglovi MAD i MCB sa zajedničkim uglom BMD, slični su, pa je $MA : MD = MC : MB$. Ako nepoznatu dužinu tetive CD označimo sa x, onda je $4 : (5+x) = 5 : 10$. Odavde je $x = 3$ cm.

M5. Slično **primeru B)** iz **odeljka 7.1.**

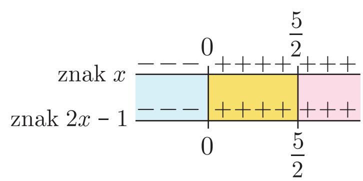
a) Najviše trouglova ima ako su tačke F, G, H nekolinearne i ako nijedna od tačaka A, B, C, D, E nije kolinearna sa nekim od parova FG, FH i GH. Tada svaka od duži određenih datim tačkama na pravoj p (10 duži) sa svakom od tačaka F, G, H određuje trougao. Takođe svaka od duži FG, FH, GH sa prvih 5 tačaka određuje po jedan trougao. I tačke F, G, H određuju još jedan trougao, slika levo. To je ukupno $10 \cdot 3 = 3 \cdot 5 + 1 = 46$ trouglova.





b) Najmanje trouglova biće određeno ako su F, G, H tačke na nekoj pravoj q i pritom prava q prolazi kroz jednu od 5 datih tačaka prave p, slika desno. Tada je određeno $10 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 42$ trougla.

N1. Znamo da je $|x| = x$ za $x \geqslant 0$ i $|x| = -x$ za $x < 0$. Slično je $|2x-5| = 2x - 5$ za $x \geqslant \frac{5}{2}$ i $|2x-5| = -(2x-5)$ za $x < -\frac{5}{2}$. Zbog toga razlikujemo tri slučaja, na slici obojeno različitim bojama. (Vidi **primer B)** u **odeljku 2.4.**)



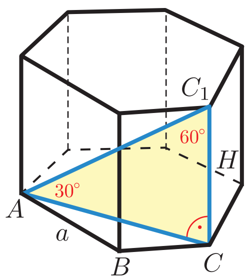
1° Za $x < 0$ imamo: $-x - (2x - 5) = 4$. Odavde je $x = \frac{1}{3}$, ali to ne može biti rešenje date jednačine, jer ne zadovoljava uslov $x < 0$.

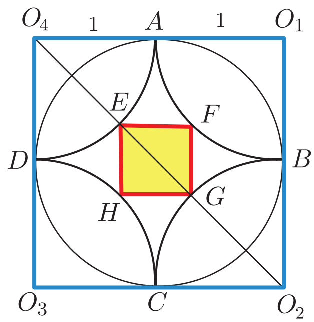
2° Za $0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$ imamo: $x - (2x - 5) = 4$. Odavde je $x = 1$, što jeste rešenje polazne jednačine. (Zadovoljava uslov $0 \leqslant 1 \leqslant \frac{5}{2}$.)

3° Za $x > \frac{5}{2}$ imamo: $x + (2x - 5) = 4$, odakle je $x = 3$. Ovo je takođe rešenje polazne jednačine, jer zadovoljava uslov $3 > \frac{5}{2}$.

Polazna jednačina ima dva rešenja: $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$.

N2. Pravougli trougao ACC_1 na levoj slici, određen manjom dijagonalom AC_1 prizme, manjom dijagonalom AC osnove i visinom CC_1 ima oštre uglove od $30°$ i $60°$. Poznat nam je ovakav trougao, pa kako je hipotenuza $AC_1 = 12$ cm, biće $H = CC_1 = 6$ cm i $d_1 = AC = 6\sqrt{3}$ cm. Kako u bazi (šestouglu) važi da je $d_1 = a\sqrt{3}$, odnosno $6\sqrt{3} = a\sqrt{3}$, to je $a = 6$ cm osnovna ivica prizme. Onda jw površina prizme $P = 108(2 + \sqrt{3})$ cm^2, a zapremina $V = 324\sqrt{3}$ cm^3.





N3. Centri datih četvrtina kružnica predstavljaju temena kvadrata $O_1O_2O_3O_4$, stranice 2 cm. Da bi slika bila osno simetrična, moraju temena E i G malog kvadrata biti na dijagonali O_2O_4 velikog kvadrata. Onda je $EG = O_2O_4 - 2O_2G = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$, pa je tražena stranica kvadrata $EF = \frac{1}{2}EG\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})$ cm.

N4. Odredićemo koliko ima brojeva manjih od 1000, koji u svom zapisu nemaju cifru 1. Takvih jednocifrenih brojeva ima 8, dvocifrenih $8 \cdot 9 = 72$, a trocifrenih $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Dakle, ukupno ih je $8 + 72 + 648 = 728$. Traženih brojeva ima $1000 - 728 = 272$.

N5. Neka je dati broj $\overline{abcd}$. Ako je $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$, onda je $a = 2$. (Ne može biti $a = 1$, jer bi se onda broj $\overline{dcba}$ koji je deljiv sa 4, završavao neparnom cifrom 1.) Tada je $d = 8$, jep se proizvod $4 \cdot 8$ završava cifrom 2. Kako cifra b ne može biti veća od 2, zbog prenosa sa mesta stotina, proverom zaključujemo da ni $b = 0$, ni $b = 2$ ne daju rešenja. Za $b = 1$ imamo $4 \cdot \overline{21c8} = \overline{8c12}$, odakle je $c = 7$, jer je $4 \cdot 2178 = 8712$. Dakle, traženi broj postoji. To je broj 2178.

Okružna takmičenja

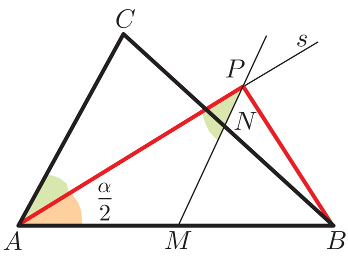
NJ1. Kako je $n^3 + 1997n + 1998 = n^3 - n + 1998n + 1998 = n(n^2 - 1) + 1998(n + 1) = (n - 1)n(n + 1) + 6 \cdot 333(n + 1)$, to je dati broj deljiv sa 6, jer je $(n-1)n(n+1)$ proizvod tri uzastopna prirodna broja, od kojih je jedan uvek deljiv sa 2, a jedan deljiv sa 3.

NJ2. Površina romba je $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$, a odavde je $d_1 \cdot d_2 = 2P$. Odredićemo $d_1 \cdot d_2$. Najpre, iz poznate veze $a^2 = \left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2$, dobijamo $9^2 = \dfrac{d_1^2}{4} + \dfrac{d_2^2}{4}$, odnosno $d_1^2 + d_2^2 = 4 \cdot 81 = 324$. Dato je $d_1 + d_2 = 24$, pa je $(d_1 + d_2) = 24^2$, odnosno $d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 = 576$. Zamenimo $d_1^2 + d_2^2 = 324$ i dobijamo $324 + 2d_1 \cdot d_2 = 576$, odakle je $d_1 \cdot d_2 = 126$. Prema utvrđenoj vezi $d_1 \cdot d_2 = 2P$, konačno dobijemo: $P = 63 \text{ cm}^2$.

NJ3. Neka je n broj stranica datog mnogougla. Kako je navedeno važi uslov: $\dfrac{2n(2n-3)}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2} + 1998$. Sredimo ovu jednakost i dobijemo: $3n^2 - 3n = 2 \cdot 1998$ ili $3n(n-1) = 2 \cdot 3 \cdot 666$, odnosno $n(n-1) = 2 \cdot 666$. Rastavimo na proste činioce $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$, pa dobijemo: $n(n-1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 37 \cdot 36$. Dakle, $n = 37$.

Zbir unutrašnjih uglova ovog mnogougla je $S_n = 35 \cdot 180°$, a kod mnogougla sa 74 stranice: $S_{2n} = 72 \cdot 180°$. Zbir unutrašnjih uglova povećava se za $37 \cdot 180° = 6660°$.

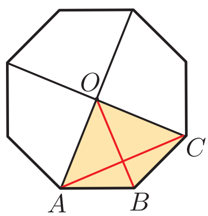
NJ4. Duž MN je srednja linija trougla ABC, pa je MN paraleleno sa AC. Onda su uglovi $\sphericalangle APM$ i $\sphericalangle CAP$ jednaki (sa paralelnim kracima. Kako je $\sphericalangle CAP = \dfrac{\alpha}{2}$, sledi da je $\sphericalangle APM = \sphericalangle PAM$, pa je trougao AMP jednakokraki i $AM = MP$. Kako je $AM = MB$ (tačka M je središte stranice AB), sledi da je $AM = MP = MB$, Dakle, tačka P je na kružnici čiji je prečnik duž AB. Onda je $\sphericalangle APB = 90°$ (nad prečnikom).

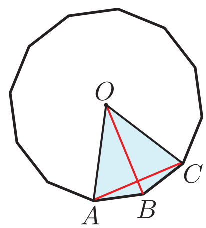


NJ5. Cifre A, A, B i C mogu se rasporediti na 12 načina: $AABC$, $AACB$, $ABAC$, $ABCA$, $ACAB$, $ACBA$, $BAAC$, $BACA$, $BCAA$, $CAAB$, $CABA$, $CBAA$. U konkretnom slučaju postoje tri moguće kombinacije cifara A, A, B, C: (1, 1, 8, 9), (8, 8, 1, 9) i (9, 9, 1, 8). Dakle, ukupan broj takvih četvorocifrenih brojeva je $12 \cdot 3 = 36$.

O1. Datu jednakost možemo naisati u obliku $(x^2 - 2x + 1) - y^2 = 0$, ili $(x-1)^2 = y^2$. Pošto su x i y prirodni brojevi, zaključujemo da je $y = x - 1$, pa je $y - x = -1$. Prema tome: $(y - x)^{2013} = (-1)^{2013} = -1$.

O2. Pravilni osmougao se sastoji od četiri podudarna deltoida (prva slika), pa je $P_8 = 4P_d = 4 \cdot \dfrac{d_1 d_2}{2} = 2d_1 d_2$, gde su d_1 i d_2 dijagonale deltoida. Jedna dijagonala jednaka je poluprečniku opisane kružnice $d_1 = OB = r$, a druga $d_2 = AC = r\sqrt{2}$, pa je $P_8 = 2d_1 d_2 = 2r \cdot r\sqrt{2} = 2r^2\sqrt{2}$. Slično, površina pravilnog dvanaestougla (druga slika) je $P_{12} = 6 \cdot \dfrac{d_1' d_2'}{2} = 3d_1' \cdot d_2'$, $d_1' = r$, $d_2' = r$. Dakle, $P_{12} = 3d_1' d_2' = 3r \cdot r = 3r^2$. Odnos površina ovih mnogouglova je $\dfrac{P_8}{P_{12}} = \dfrac{2r^2\sqrt{2}}{3r^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.





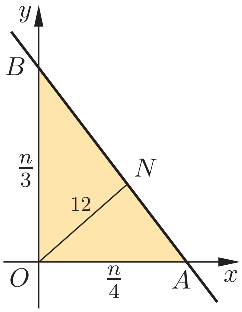
O3. $\dfrac{3n^2+15}{n+2} = \dfrac{3n^2-12+27}{n+2} = \dfrac{3(n-2)(n+2)}{n+2} + \dfrac{27}{n+2} = 3(n-2) + \dfrac{27}{n+2}$. Vrednost početnog razlomka je celi broj kada je $\dfrac{27}{n+2}$ celi broj. Dakle, $(n+2) \in \{-27, -9, -3, -1, 1, 3, 9, 27\}$, pa je $n \in \{-29, -11, -5, -3, -1, 1, 7, 25\}$.

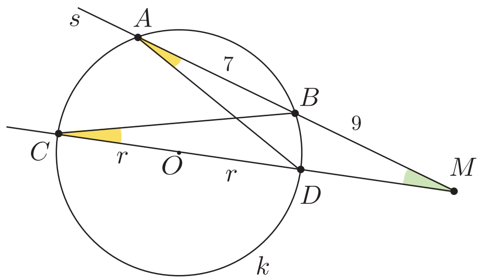
O4. Vidi rešenje **zadatka 380**.

O5. Milašin ima pobedničku strategiju. Prvim potezom Milašin iznosi 3 sulundara. U daljem toku igre, Milašin uvek iznosi po 2 sulundara. Na taj način posle svakog njegovog poteza broj sulundara je deljiv sa 3, dok posle svakog Radašinovog poteza broj preostalih sulundara pri deljenju sa 3 daje ostatak 2. Jasno je onda da će poslednji sulundar izneti Milašin.

P1. Iz date jednačine dobijamo $x = \dfrac{-8y+1996}{3} = \dfrac{-9y+1995+(y+1)}{3}$, pa je $x = -3y + 665 + \dfrac{y+1}{3}$. Rešenje za x je celi broj ako je $y+1 = 3k$, gde je k celi broj. Onda je $y = 3k-1$, pa je $x = -3(3k-1) + 665 + \dfrac{3k}{3}$, odnosno $x = -8k + 668$. Da bi x i y bili prirodni brojevi, $x > 0$ i $y > 0$, mora biti $3k-1 > 0$ i $-8k+668 > 0$. Dakle, $k > 0$, odnosno $k \geqslant 1$ i $k < 83{,}5$, odnosno $k \leqslant 83$. Iz uslova $1 \leqslant k \leqslant 83$ zaključujemo da k uzima 83 različite vrednosti, pa toliko ima odgovarajućih parova (x, y) prirodnih brojeva.

P2. Po uslovu zadatka, data prava na koordinatnim osama Ox i Oy odseca odsečke $OA = \dfrac{n}{4}$ i $OB = \dfrac{n}{3}$, slika levo. Tada je hipotenuza AB pravouglog trougla OAB jednaka $\dfrac{5n}{12}$, a površina trougla je $\dfrac{n^2}{24}$. Iz površine pravouglog trougla AOB hipotenuzina visina $ON = \dfrac{n}{5} = 12$, pa je $n = 60$, $OA = 15$, $OB = 20$, a površina trougla OAB je 150. Ima još jedno rešenje simetrično u odnosu na tačku O, ako je $n < 0$. Tada je $n = -60$.





P3. Pretpostavimo da je to moguće i da je zbir brojeva u svakom od skupova jednak S. Kako je tada $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{1995} + 2^{1996}$, to je $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdot + 2^{1995}$. Dakle, S je neparan broj. što je nemoguće, jer se S dobija kao zbir parnih brojeva. Dakle, nemoguće je i dati skup brojeva podeliti na dva dela koji imaju jednak zbir.

P4. Neka sečica MO seče k u tačkama C i D, kao na poslednjoj slici. Tada je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ (nad istim lukom BD). Onda su slični trouglovi MAD i MCB (imaju zajednički ugao sa temenom M). Iz sličnosti dobijamo proporciju: $MA : MC = MD : MB$, odnosno: $16 : (13 + r) = (13 - r) : 9$. Odavde dobijamo $(13 + r) \cdot (13 - r) = 9 \cdot 16$, odnosno $169 - r^2 = 144$. Sledi da je $r^2 = 25$ i $r = 5$ cm. Obim kruga je $O = 2r\pi = 10\pi$ cm, a površina $P = r^2\pi = 25\pi$ cm^2.

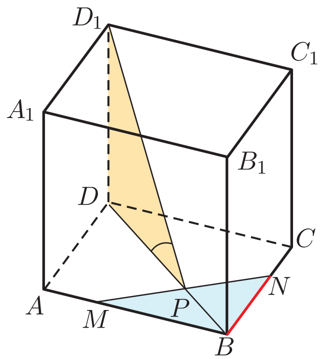
P5. Vidi rešenje **zadatka 573**.

Q1. Neka su x i y prirodni brojevi takvi da je $xy = 2(x + y)$. Prebacivanjem sabiraka na levu stranu i dodavanjem 4, dobijamo $xy - 2x - 2y + 4 = 4$, odnosno $(x - 2)(y - 2) = 4$. Kako je $4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$, onda je jedno rešenje za $x - 2 = 4$ i $y - 2 = 1$, dakle, $x = 6$ i $y = 3$, a drugo rešenje dobijamo iz $x - 2 = 2$ i $y - 2 = 2$ što daje $x = 4$ i $y = 4$. Zadatak ima dva rešenja, a traženi brojevi su 6 i 3 ili 4 i 4.

Q2. Uočimo pravougaonik koga obrazuje veliki kvadrat sa četiri manja kvadrata, dva iznad i dva ispod. Ako je stranica manjeg kvadrata a, onda je stranica većeg $2a$. Dijagonala uočenog pravougaonika je prečnik kruga i hipotenuza pravouglog trougla, kome su stranice $2a$ i $4a$. Dakle: $(2a)^2 + (4a)^2 = 2^2$, a odnos $4a^2 + 16a^2 = 4$. Odavde he $a^2 = \dfrac{1}{5}$, pa je $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ dm. Traženu površinu računamo kao razliku površina kruga i zbira površina svih 9 kvadrata: $P = 1^2\pi - 8 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\pi - \dfrac{12}{\sqrt{5}}\right)$ dm$^2 = (\pi - 2,4)$ dm^2. To je približno $0,74$ dm$^2 = 74$ cm^2.

Q3. Jednačina prave OA je oblika $y = kx$. Zamenom koordinata tačke $A(32, 76)$ odredimo k: $76 = k \cdot 32$. Odavde je $k = \dfrac{76}{32} = \dfrac{19}{8}$, pa prava OA ima jednačinu

$y = \dfrac{19}{8}x$. Koordinata y biće celi broj ako je prirordni broj x deljiv sa 8, pri čemu je $x \leqslant 32$. Imamo samo 4 takve tačke: za $x = 8$, $x = 16$, $x = 24$ i $x = 32$.



Q4. Označimo sa P središte duži MN. Trougao BMN je pravougli jednakokraki, pa je P na dijagonali BD osnove. Ugao između ravni MND_1 i ABC je $\sphericalangle DPD_1 = 45°$. Zbog toga je $DP = DD_1 = 10$ cm (vidi sliku). Neka je tražena duž $x = BN$. Iz trougla MBN je $x = BP\sqrt{2}$. Kako je $BP = BD - DP = 10\sqrt{2} - 10$, biće $x = \sqrt{2} \cdot (10\sqrt{2} - 10) = (20 - 10\sqrt{2})$ cm.

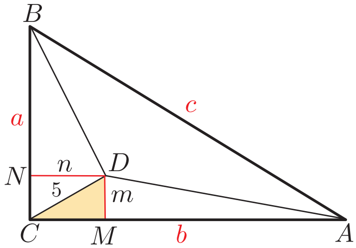
Q5. Najveći broj temena dobijamo ako svaki put sečemo četvorougao i delimo ga na dva četvorougla. Posle 5 sečenja imamo 6 četvorouglova sa ukupno 24 temena.

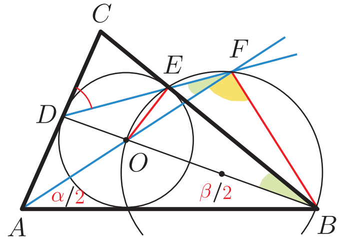
Najmanji broj temena imaćemo ako početni četvorougao presečemo po dijagonali. Dobijemo dva trougla. Dalje, svaki trougao presečemo tako da dobijemo dva trougla. Posle 5 sečenja imamo 6 trouglova sa ukupno 18 temena.

Državna takmičenja

R1. Kako je $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - ab = \dfrac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \dfrac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{ab} = \dfrac{2ab}{ab} = 2$, to je vrednost datog izraza uvek konstantna, pa ne zavisi ni od a, ni od b.

R2. Neka su M i N podnožja normala iz tačke D na katete AC i BC (slika dole). Označimo sa a, b, c, m i n dužine (u cm) duži BC, AC, AB, DM i DN, tim redom. Kako su površine trouglova ACD i BCD jednake četvrtini površine trougla ABC, to je $\dfrac{mb}{2} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{ab}{2}$ i $\dfrac{na}{2} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{ab}{2}$. Sledi da je $m = \dfrac{a}{4}$ i $n = \dfrac{b}{4}$. Iz pravouglog trougla CMD dobijamo da je $m^2 + n^2 = CD^2$, odnosno $\left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{4}\right)^2 = 25$ ili $\dfrac{a^2}{16} + \dfrac{b^2}{16} = 25$. Sledi da je $a^2 + b^2 = 400$, pa je $c^2 = 20^2$. Prema tome, dužina hipotenuze AB je 20 cm.





R3. Neka je razlika svakog broja i njegovog prethodnika jednaka d. Drugi i treći broj u nizu imaju istu cifru desetica, pa sledi da je d jednocifreni broj. Kako je prvi bpoj u nizu jednocifreni, a drugi dvocifreni, to je $B = 1$. Dalje sledi da je $C = 2$ i $F = 3$. Drugi broj u nizu je 12, a peti 33. Kako je $12 + 3d = 33$, to je $d = 7$. Ćirilo je na tabli napisao brojeve: 5, 12, 19, 26, 33.

R4. Kako je $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, to se brojevi oblika 2^n redom završavaju cifrom 2, 4, 8, 6, 2,...Slično, brojevi oblika 3^{n+3}, odnosno $27 \cdot 3^n$. završavaju se redom cifrom 1, 3, 9, 7, 1,...Zbog toga se zbir $2^n + 3^{n+3}$ završava ili cifrom 3, ili cifrom 7. Kako se kvadrat prirodnog broja nikad ne završava nekom od te dve cifre, sledi da traženi broj n ne postoji.

R5. Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$, a $\sphericalangle ABC = \beta$ (vidi poslednju sliku). Tada je $\sphericalangle ACB = 180° - \alpha - \beta$. Duži CD i CE su tangentne duži iz iste tačke, pa su jednake. Trougao DEC je jednakokraki, pa je $\sphericalangle CDE = \frac{1}{2}(180° - (180° - \alpha - \beta)) = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Ugao CDE je spoljašnji ugao trougla AFD, pa je $\sphericalangle FAD + \sphericalangle AFD = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Kako je AO simetrala $\sphericalangle BAC$, to je $\sphericalangle FAD = \frac{\alpha}{2}$, pa sledi da je $\sphericalangle AFD = \frac{\beta}{2}$ (jer je $\sphericalangle CDF$ spoljašnji za trougao ADF). Poluprava BO je simetrala ugla $\sphericalangle ABC$, pa je $\sphericalangle OBE = \frac{\beta}{2}$. Kako je $\sphericalangle OFE = \sphericalangle AFD = \sphericalangle OBE$, to se oko četvorougal $OBFE$ može opisati krug (osobine tetivnog četvorougla). Uglovi OEB i OFB su periferijski uglovi tog kruga nad istom tetivom OB, pa su jednaki. Kako je $\sphericalangle OEB = 90°$, to je i $\sphericalangle AFB = \sphericalangle OFB = 90°$.

S1. Izračunajmo nekoliko članova niza: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, ...Vidimo da se od petog člana, pa nadalje ponavljaju brojevi 5, 8 i 11, tim redom. Kako je $4 + 3 \cdot 669 + 1 = 2012$, zaključujemo da je na 2012-om mestu broj 5.

S2. Moguća su tri rezultata, koja ćemo ispitati.

1° Ako je Partizan pobedio, onda su tačne prognoze A, B, C, D, pa ova pretpostavka nije dobra.

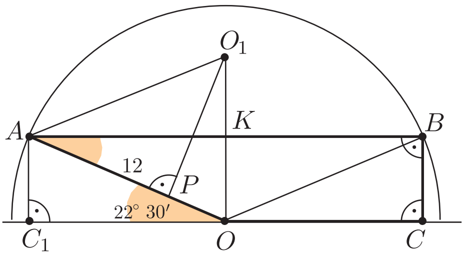
2° Ako je bilo nerešeno, onda su prognoze A, C i D netačne, pa ni ova pretpostavka nije dobra.

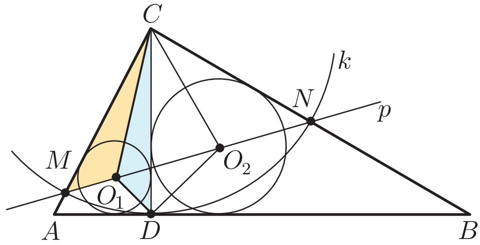
3° Ostaje samo mogućnost da je Zvezda pobedila. Tada su netačne prognoze C i D. Iz prognoze B i E, koje su tačne, zaključujemo da je Zvezda pobedila rezultatom 2 : 1.

S3. Na pravoj OC odredimo tačku C_1, tako da je $\sphericalangle AC_1O = 90° = \sphericalangle BCO$. Onda je $ABCC_1$ pravougaonik, pa je $AC_1 = BC$. Dakle, pravougli trouglovi AOC_1 i BOC su podudarni ($OA = OB = 12$ cm i $AC_1 = BC$). Neka je K podnožje normale iz O na AB. Lako se uverimo da su i trouglovi OAK i OBK podudarni sa AOC_1. Tražena površina četvorougla $OABC$ jednaka je trostrukoj površini trougla AOK.

Uočimo da je $\sphericalangle AOC_1 = 180° - 157°30' = 22°30' = \sphericalangle OAK$. Neka je tačka O_1 simetrična tački O u odnosu na pravu AB. Tada je trougao AKO_1 podudaran trouglu AKO, a $\sphericalangle O_1AK = 22°30'$. Zbog toga je $\sphericalangle OAO_1 = 45°$. Možemo izračunati površinu trougla OAO_1, a površina trougla OAK je dva puta manja. Označimo sa

O_1P visinu trougla AOO_1. Trougao APO_1 je pravougli jednakokraki, pa je $O_1P = AO_1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$. Onda, površina trougla AOO_1 je $\dfrac{1}{2} \cdot AO \cdot O_1P = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ cm^2, a površina trougla AOK je polovina od toga, t.j. $18\sqrt{2}$ cm^2. Konačno, tražena površina četvorougla $OABC$ je tri puta veća:
$P = 3 \cdot 18\sqrt{2}\text{cm}^2 = 54\sqrt{2}$ cm^2.





S4. Rastavimo na činioce: $p^4 - q^4 = (p^2 + q^2) \cdot (p^2 - q^2)$. Broj $(p^2 + q^2)$ deljiv je sa 2, jer je zbir dva neparna broja. Dokažimo da je $p^2 - q^2$ deljivo sa 24: $p^2 - q^2 = p^2 - 1 - (q^2 - 1) = (p-1)(p+1) - (q-1)(q+1)$. Pritom: $(p-1) \cdot p \cdot (p+1)$ predtavlja proizvod tri uzastopna prirodna broja, pa je jedan od njih deljiv sa 3. To sigurno nije broj p, jer je prost. Onda je jedan od brojeva $(p-1)$ ili $(p+1)$ deljiv sa 3. Osim toga, $(p-1)$ i $(p+1)$ su dva uzastopna parna broja, pa je jedan od njih deljiv sa 2, a drugi sa 4. Zbog toga je njihov proizvod deljiv sa $2 \cdot 4 = 8$. Dakle, $(p-1) \cdot (p+1)$ deljivo je sa 3 i sa 8, pa je deljivo i sa 24. To važi i za proizvod $(q-1) \cdot (q+1)$. Ako su dva broja deljiva sa 24, onda je i njihova razlika deljiva sa 24. Konačno: $p^4 - q^4 = (p^2 + q^2)((p-1)(p+1) - (q-1)(q+1)) = 2 \cdot n \cdot 24 \cdot k$, pa je $p^4 - q^4$ deljivo sa 48.

S5. a) Kako je $CM = CN$, to je trougao CMN jednakokraki pravougli i $\sphericalangle CMN = 45°$ (poslednja slika). Neka je P presek simetrale ugla ACD i duži MN. Trouglovi MPC DPC cy podudarni ($CM = CD$, $CP = CP$, $\sphericalangle MCP = \sphericalangle DCP$), pa je $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CDP = 45°$. Dakle, poluprava DP je simetrala ugla CDA pa je tačka P centar upisane kružnice, odnosno $P \equiv O_1$. Dakle, tačka O_1 pripada pravoj MN. Analogno se pokazuje i da tačka O_2 pripada pravoj MN.

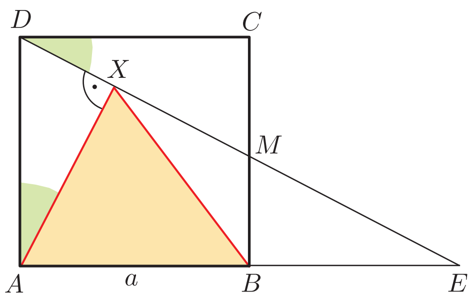
b) Iz podudarnosti trouglova CO_1M i CO_1D sledi da je $MO_1 = DO_1$. Slično zaključujemo da je $O_2N = DO_2$. U trouglu O_1O_2D važi nejednakost: $O_1D + O_2D > O_1O_2$. Onda je i $MO_1 + NO_2 > O_1O_2$, pa je $MN = (MO_1 + O_2N) + O_1O_2 > 2O_1O_2$.

T1. Zamenimo $a = 2x$, pa dobijemo: $4x^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2x(b + c + d)$, a odavde je: $(x^2 - 2bx + b^2) + (x^2 - 2cx + c^2) + (x^2 - 2dx + d^2) + x^2 = 0$ ili $(x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2 + x^2 = 0$. Na levoj strani jednakosti svi sabirci su nenegativni, pa će zbir biti nula samo ako su svi sabirci nule. Otuda dobijamo $x = 0 = b = c = d = a$.

T2. Iz dijagonalnog preseka SAC odredićemo visine cele piramide i dela piramide koji je u gornjoj kocki. Baza velike piramide je kvadrat dijagonale d, a baza manje, gornje piramide je kvadrat dijagonale $d_1 = \frac{1}{3}d$ (posledica sličnosti). Visina cele piramide je $H = \frac{3}{2}a$, a visina male piramide je $H_1 = \frac{1}{2}a$. Izračunajmo zapremine: $V = \frac{1}{3}\frac{d^2}{2} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{1}{4}(a\sqrt{2})^2 \cdot a = \frac{1}{2}a^3$ i $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{d_1^2}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}d\right)^2 \cdot a = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}a\sqrt{2}\right)^2 \cdot a = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2a^3 = \frac{1}{54}a^3$. Kako je $V_1 : V = \frac{1}{54}a^3 : \frac{1}{2}a^3 = \frac{1}{27}$, zaključujemo da je u gornjoj kocki jedan dvadesetsedmi deo piramide.

T3. Jedno (očigledno) rešenje je $x = 1$. Ako je $x < 1$, tada je $x^{2009} < 1$, pa je i $kx^{2009} + 1 < k + 1$, za svako k, odnosno $\frac{kx^{2009}+1}{k+1} < 1$. Kako članova oblika $\frac{kx^{2009}+1}{k+1}$ ima tačno n, njihov zbir će uvek biti manji od n, pa u slučaju $x < 1$ zadatak nema rešenja. Analogno u slučaju $x > 1$ je $x^{2009} > 1$, pa je za svako k ispunjeno $\frac{kx^{2009}+1}{k+1} > 1$. Kako ovakvih članova ima n, njihov zbir će uvek biti veći od n, pa zadatak ni u ovom slučaju nema rešenja. Dakle, jedino rešenje je $x = 1$.

T4. Neka je E presečna tačka pravih AB i DM. Onda su pravougli trouglovi CDM i BEM podudarni ($CM = BM$, $\sphericalangle CMD - BME$, kao u nakrsni). Sledi da je $BE = CD = a$. U pravouglom trouglu AEX duž BX je težišna linija hipotenuze, pa je $BX = \frac{1}{2}AE = a$. Trouglovi ADX i DMC slični su ($\sphericalangle X = 90^\circ = \sphericalangle C$ i $\sphericalangle DAX = \sphericalangle MDC$, sa normalnim kracima). Iz sličnosti zaključujemo: $AX : AD = CD : DM$. Pritom je



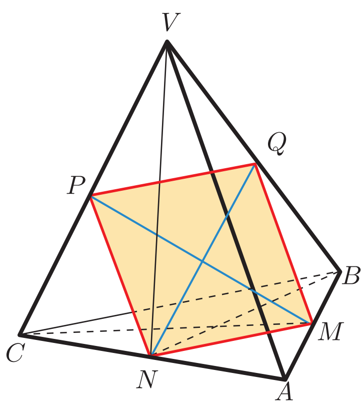
$AD = CD = a$, a iz trougla CDM računamo: $DM^2 = CD^2 + CM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$, odnosno $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Iz proporcije izračunamo: $AX = \frac{AD \cdot CD}{DM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$. Obim trougla ABX je $O = 2a + \frac{2\sqrt{5}}{5}a = \frac{2a}{5}(5 + \sqrt{5})$.

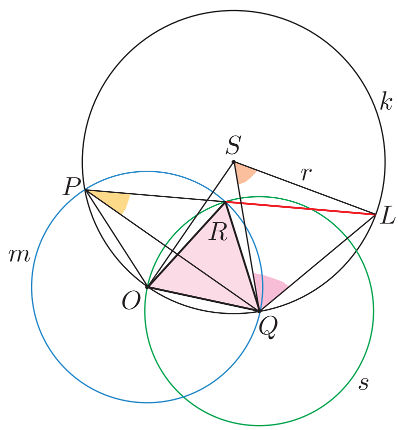
T5. Neka je $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2007}{2008}$. Kako je $\frac{n}{n+1} > \frac{n}{n+2}$, za svako n, to je $A > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2007}{2009} = \frac{1}{2009}$, tj. $A > \frac{1}{2009}$. Kako je $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$, to je $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, itd., pa je $A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2008}{2009} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2008}{2007} \cdot \frac{1}{2009} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2009}$, dakle $A < \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2009}$. Odavde je $A^2 < \frac{1}{2009}$, tj. $A < \sqrt{\frac{1}{2009}}$, što je i trebalo dokazati.

U1. Iz prve jednačine je $x-2y=1$. Drugu jednačinu transformišemo: $(x-2y)(x+2y)+4y-17=0$, pa kad $x-2y$ zamenimo sa 1, dobijemo: $x+2y+4y=17$.. Dobili smo sistem jednačina $\begin{matrix} x-2y=1 \\ x+6y=17 \end{matrix}$, koji lako rešimo: $x=5$, $y=2$.

U2. Označimo zbir sa S: $S=\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\cdots+\frac{2013^2+1}{2013^2-1}=\frac{2^2-1+2}{2^2-1}+\frac{3^2-1+2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2013^2-1+2}{2013^2-1}=1+\frac{2}{2^2-1}+1+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+1+\frac{2}{2013^2-1}=2012+\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2}{2013^2-1}$. Kako je $\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$, skedi da je dobijeni zbir $S=2012+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014}\right)$, pa sređivanjem dobijamo $S=2012+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=2013+\frac{1}{2}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$, odakle sledi tvrđenje.

U3. Presečna ravan je paralelna bočnoj ivici AV, pa seče bočnu stranu ACV po pravoj koja je paralelna sa AV. Kako ona sadrži središte N ivice AC, presečna duž je srednja linija NP trougla ACV. Zbog toga je $NP=\frac{1}{2}AV=7$ cm i NP je paralelno sa AV, slika dole. Slično se uverimo da je presek sa trouglom ABV srednja linija MQ ovog trougla, pa je $MQ=7$ cm i MQ je paralelno sa AV. Dakle, presek ravni i piramide je paralelogram $MNPQ$. Pritom je $MN=PQ=\frac{1}{2}BC=6$ cm. Pokažimo da su dijagonale MP i NQ jednake. Trouglovi MCV i NBV su podudarni (po stavu SSS) pa su im jednake težišne linije: $MP=NQ$. Dijagonale četvorougla $MNPQ$ su jednake, pa je to pravougaonik. Njegov obim je $2MN+2NP=12+14=26$ cm, a površina je $P=MN\cdot NP=6\cdot 7=42$ cm^2.





U4. Videti **primer D)** iz **odeljka 4.2.** Rešenje: $\dfrac{2013 \cdot 2012}{2} - 2 \cdot 671 = 2017676$.

U5. Trougao OQR je jednakostranični, jer su mu sve stranice jednake poluprečniku kružnice m. Dakle, centralni ugao je $\sphericalangle ROQ = 60°$, pa je odgovarajući periferijski $\sphericalangle QPR = 30° = \sphericalangle QPL$. Sledi da je centralni ugao u krugu k nad tetivom LQ jednak $60°$ ($\sphericalangle LSQ = 2 \cdot \sphericalangle LPQ = 2 \cdot 30° = 60°$). Zbog toga je trougao LQS jednakostranični, pa je i $\sphericalangle LQS = 60°$. Kako je i $\sphericalangle RQO = 60°$, sledi da je $\sphericalangle LQR = \sphericalangle SQO$. Budući da je $LQ = SQ = r$ i $QR = QO$, biće podudarni trouglovi LQR i SQO, po stavu SUS. Iz njihove podudarnosti sledi da je $LR = SO = r$.

Republička takmičenja u Jugoslaviji

V1. Neka su a i b prirodni brojevi i neka je $a > b$. Označimo sa s i d njihov najmanji zajednički sadržalac i najveći zajednički delilac. Tada je $s = k \cdot d$, $k \in N$ i prema uslovu $k \cdot d = d + 20$. Odavde je $d(k-1) = 20$. Kako je $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 10 \cdot 2 = 20 \cdot 1$, mogući su sledći slučajevi:

1° $d = 1$, $k - 1 = 20$, $k = 21$. Tada je $s = 21$, pa je $a = 21$, $b = 1$ ili $a = 7$, $b = 3$.

2° $d = 2$, $k - 1 = 10$, $k = 11$. Tada je $s = 22$, pa je $a = 22$, $b = 2$.

3° $d = 4$, $k - 1 = 5$, $k = 6$. Tada je $s = 24$, pa je $a = 24$, $b = 4$ ili $a = 12$, $b = 8$.

4° $d = 5$, $k - 1 = 4$, $k = 5$. Tada je $s = 25$, pa je $a = 25$, $b = 5$.

5° $d = 10$, $k - 1 = 2$, $k = 3$. Tada je $s = 30$, pa je $a = 30$, $b = 10$.

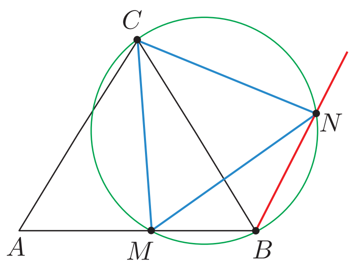
6° $d = 20$, $k - 1 = 1$, $k = 2$. Tada je $s = 40$, pa je $a = 40$, $b = 20$.

Ovde je navedeno 8 slučajeva i za $a < b$ ima još toliko, pa je moguće 16 rešenja.

V2. Proširimo dati razlomak sa $(2-1)$. Dobijamo:

$$\frac{(2-1)(2^{17} + 2^{16} + 2^{15} + \cdots + 2^2 + 2 + 1)}{(2-1)(2^8 + 2^8 + \cdots + 2^2 + 2 + 1)} : 3^3 =$$

$$\frac{2^{18} - 1}{2^9 - 1} : 3^3 = \frac{(2^9 - 1)(2^9 + 1)}{2^9 - 1} : 3^3 = (2^9 + 1) : 27 = 513 : 37 = 19.$$



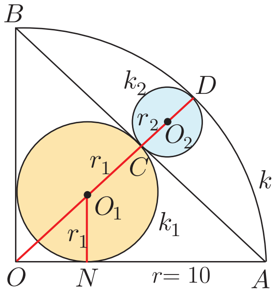
V3. Kako je $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MNC = 60°$, zaključujemo da postoji kružnica koja sadrži tačke M, B, N i C (vidi sliku). Tada je $\sphericalangle CMN = 60°$, pa je i $\sphericalangle CBN = 60°$ (nad istom tetivom CN). Budući da je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle NBC = 60°$ i ova dva ugla imaju zajednički krak BC, zaključujemo da su prave AC i BN paralelne, što se i tvrdi.

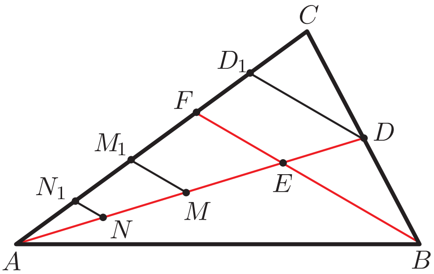
V4. Vidi **zadatak 527**.

V5. Postoji tačno 90 dvocifrenih brojeva: 10, 11, 12, ..., 97, 98, 99. Uočimo da je $10 + 90 = 100 = 11 + 89 = 12 + 88 = \cdots = 49 + 51$. Samo brojevi 50, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98 i 99 nemaju među dvocifrenim brojevima svog para sa kojim bi dali zbir 100. Takvih brojeva je ukupno 10, a onih koji imaju svoj par, je ukupno 80. Dakle, makako Leka odabrao svojih 55 različitih dvocifrenih brojeva, među njima ima najmanje 45 brojeva iz skupa onih koji imaju svog para. Kako je ovih parova 40, među 45 brojeva biće najmanje 5 parova koji daju zbir 100. Žarko je u pravu.

W1. Neka je x, $x \neq 0$, prva cifra traženog broja. Kada ovu cifru premestimo iza poslednje cifre, treba da dobijemo broj deljiv sa 5. Onda mora biti $x = 5$. Međutim, 5 ne može biti prva cifra traženog broja, jer "5 puta prvi broj" u tom slučaju bi imao cifru više nego što treba da ima dobijeni broj. Dakle, ne postoji broj koji se traži.

W2. Trougao OAB je pravougli jednakokraki,pa je $AB = r\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ cm, slika levo, Centri O, O_1, O_2 krugova k, k_1 i k_2 su kolinearne tačke. Neka su C i D dodirne tačke krugova k_1 i k_2, odnosno k_2 i k i neka su r_1 i r_2 dužine poluprečnika (u cm) krugova k_1 i k_2. Kako je $OC = \dfrac{AB}{2} = 5\sqrt{2}$, $OO_1 = r_1\sqrt{2}$ i $O_1C = r_1$, iz $OO_1 + O_1C = OC$ sledi da je $r_1\sqrt{2} + r_1 = 5\sqrt{2}$. Iz ove jednakosti dobijamo da je $r_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 5\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 5(2-\sqrt{2})$. Slično, iz $OD = 10$, $OC = 5\sqrt{2}$ i $CD = 2r_2$, sledi da je $5\sqrt{2} + 2r_2 = 10$, odnosno $2r_2 = 5(2-\sqrt{2}) = r_1$. Prema tome, $r_1 : r_2 = 2$.





W3. Vidi rešenje **zadatka 111**.

W4. Brojevi 1, 2 i 3 imaju jednocifrene kvadrate, koji zauzimaju prva 3 mesta u datom nizu cifara. Brojevi od 4 do 9 (ukupno 6 brojeva) imaju dvocifrene kvadrate, koji zauzimaju sledećih 12 mesta u datom nizu cifara. Brojevi od 10 do 31 (ukupno 22 broja) imaju trocifrene kvadrate, koji zauzimaju narednih 66 mesta u datom nizu cifara. Brojevi od 32 do 99 (ukupno 68 brojeva) imaju četvorocifrene kvadrate, koji zauzimaju sledećih 272 mesta u datom nizu cifara. Brojevi od 100 do 316 (ukupno 217 brojeva) imaju petocifrene kvadrate, koji zauzimaju još 1085 mesta u datom nizu cifara. Dakle, cifra jedinica kvadrata broja 316 nalazi se na 1438. mestu u nizu. Kvadrati sledeća 94 broja (od 317 do 410) su šestocifreni brojevi, pa zauzimaju još 564 mesta u datom nizu, što znači da je cifra jedinica kvadrata broja 410 na 2002. mestu u datom nizu cifara. Kako je $411^2 = 168921$, to će 2006. cifra u datom nizu biti 9.

W5. Neka je D_1 središte duži CF. Tada je DD_1 srednja linija trougla BCF, pa je DD_1 paralelno sa BF. Po uslovu je $AE = 3DE$, pa na duži AE možemo odrediti tačke M i N, takve da je $AN = DE = NM = ME$. Prave kroz M i N, paralelne sa BF, seku AC u tačkama M_1 i N_1, tako da je $AN_1 = N_1M_1 = M_1F = FD_1$ (primenjena Talesova teorema). Kako je $FD_1 = D_1C$, sledi da je $AF : FC = 3 : 2$, što se jasno vidi na poslednjoj slici.

X1. Velika kazaljka se kreće 12 puta brže od male. Ceo krug, 60 minutnih podeljaka pređe velika kazaljka, dok mala pređe 5 minutnih podeljaka.

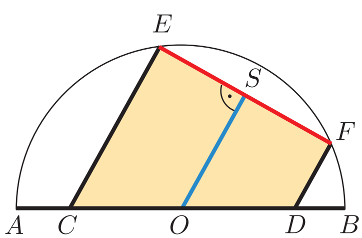
Ako je Milan proveo u putu x minuta, za to vreme mala kazaljka je prešla $\frac{x}{12}$ minutnih podeljaka, pa je $x - 120 + \frac{x}{12} = 60$ (prošlo je manje od 3 sata). Odavde je $x = \frac{12}{13} \cdot 180$ minuta $= 2$ sata i $46\frac{2}{13}$ minuta, ili približno 2 sata 46 minuta i 9 sekundi. Toliko je Milan putovao do Valjeva.

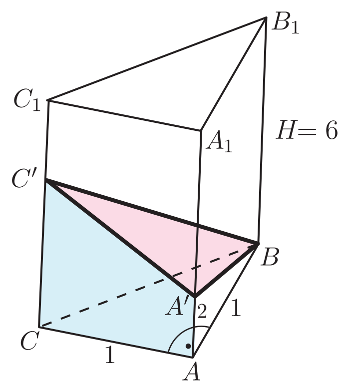
Neka je Milan krenuo u y minuta pre 9 sati. Tada će do 9 sati velika kazaljka preći y minutnih podeljaka, a mala $\frac{y}{12}$ podeljaka. Rastojanje između kazaljki je $\frac{180}{13}$ minutnih podeljaka, pa je: $\frac{180}{13} - \frac{y}{12} + y = 15$. Odavde je $y = \frac{180}{143}$ minuta $= 1\frac{37}{180}$ minuta, što čini približno 1 minut i 15,5 sekundi pre 9 sati. Tada je Milan krenuo.

X2. Vidi rešenje **primera A)** u odeljku 2.2.

X3. Vidi rešenje **zadatka 590**.

X4. Neka je S središte tetive EF, slika dole. Tada je OS normalno na EF (simetrala tetive). Kako je duž OS srednja linija trapeza $CDFE$, zaključujemo da su osnovice trapeza, duži CE i DF paralelne sa OS, oa su i normalne na tetivu EF.





X5. Od zapremine date trostrane prizme treba oduzeti zapreminu četvorostrane piramide, čija je baza trapez $AA'C'C$ (na slici gore obojen plavo) i vrh tačke

B. Visina piramide je $AB = 1$ cm. Dakle, tražena zapremina je $V = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot H - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AA' + CC'}{2} \cdot AC \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2+4}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 3 - 1 = 2$ cm^3.

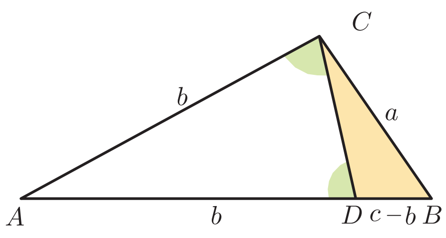
Y1. Uočimo da $2003^2 = 4012009$ pri deljenju sa 3 daje ostatak 1. Zatim, $2^{2003} = 2 \cdot 2^{2002} = 2 \cdot (2^2)^{1001} = 2 \cdot 4^{1001}$. Kako je $4 \equiv 1 \pmod 3$, to je $4^{1001} \equiv 1^{1001} \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$, pa je $2^{2003} \equiv 2 \cdot 1 \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$. Dakle, pri deljenju sa 3 prvi sabirak daje ostatak 1, a drugi daje ostatak 2, pa je njihov zbir deljiv sa 3. Broj $2003^2 + 2^{2003}$ deljiv je sa 3, pa je on složeni broj.

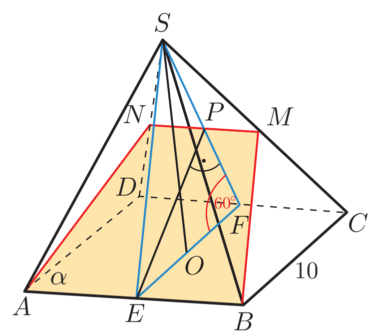
Drugo rešenje. Polazimo od osobine: proizvod dva broja od kojih svaki pri deljenju sa 3 daje ostatak 1, jeste broj koji pri deljenju sa 3 daje ostatak 1. Naime, $(3p+1) \cdot (3q+1) = 9pq + 3p + 3q + 1 = 3(3pq + p + q) + 1 = 3k + 1$.

Sada računamo $2^{2003} = 2^{2000} \cdot 2^3 = (2^4)^{500} \cdot 8 = 16^{500} \cdot 8$. Kako je $16 = (3 \cdot 5 + 1)$, a to je broj oblika $3p + 1$, to će i $16^{500} = 16 \cdot 16 \cdots 16$ biti oblika $3k + 1$. Onda je $2^{2003} = (3k+1) \cdot 8 = 24k + 8 = 24k + 6 + 2 = 3(8k+2) + 2$, pa 2^{2003} pri deljenju sa 3 daje ostatak 2.

Y2. Iz date relacije dobijamo: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ - \alpha$, odnosno: $\alpha + \beta = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Onda je $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. Neka je ABC dati trougao, slika dole. Označimo sa D tačku na stranici AB, takvu da je $\sphericalangle BCD = \alpha$. Tada je $\sphericalangle ACD = \gamma - \alpha = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} - \alpha = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Izračunajmo: $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} = \sphericalangle ACD$. Sledi zaključaka da je trougao ACD jednakokraki i $AD = AC = b$.

Uočimo da trouglovi ABC i CBD imaju dva para jednakih uglova, α i β, pa su oni slični. Iz sličnosti dobijamo proporciju $AB : BC = BC : BD$, odnosno $c : a = a : (c - d)$. Odavde je $a^2 + bc = c^2$.





Y3. Kako je $\dfrac{x^2 + 2003}{x + 2003} = \dfrac{x^2 - 2003^2 + 2003^2 + 2003}{x + 2003} = \dfrac{(x - 2003)(x + 2003) + 2003(2003 + 1)}{x + 2003}$, to je $\dfrac{x^2 + 2003}{x + 2003} =$

$x-2003+\dfrac{2003\cdot 2004}{x+2003}=x-2003+\dfrac{2^2\cdot 3\cdot 167\cdot 2003}{x+2003}$. Znači, $\dfrac{x^2+2003}{x+2003}$ je celi broj kada je $(x+2003)$ delilac broja $2^2\cdot 3\cdot 167\cdot 2003$. Prema tome, u skupu Z, x možemo uzeti $2\cdot(3\cdot 2\cdot 2\cdot 2)=48$ različitih vrednosti.

Y4. Neka je SEF presek piramide, koji sadrži bočne visine SE i SF. (E i F su središta osnovnih ivica AB i CD.) Po uslovu $\sphericalangle EFS=60^\circ=\sphericalangle FES$, pa je trougao EFS jednakostranični. Njegova visina EP polovi bočnu visinu SF. Pošto je presečna ravan α normalna na bočnu stranu SCD, ona sadrži duž EP, a presek sa bočnom stranom je srednja linija MN trougla SCD (vidi sliku gore desno). Duž MN je paralelna ivici CD, pa je paralelna i sa AB. Prema tome, presek ravni α i piramide je trapez $ABMN$ sa osnovicama $AB=10$ cm i $MN=5$ cm. Visina trapeza je $h=EP=\dfrac{EF\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ cm. Površina preseka je $P=\dfrac{10+5}{2}\cdot 5\sqrt{3}=\dfrac{75}{2}\sqrt{3}$ cm^2.

Y5. Pretpostavimo da su proizvodi u svih pet grupa veći od $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1000}$. Ako bi ova pretpostavka bila tačna, onda, ako ove proizvode označimo sa P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5 bilo bi: $P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_4\cdot P_5\geqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5000}$. Ovo nije moguće, jer je $P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_4\cdot P_5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+3+\cdots+100}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5050}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5000}$. Dakle, pretpostavka je pogrešna, što potvrđuje da postoji bar jedna grupa čiji je proizvod manji od $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1000}$.

Savezna takmičenja u Jugoslaviji

Ć1. Označimo sa x^2 broj kvadratića kvadratnog lista, a sa y^2 broj kvadratića isečenog kvadrata. Tada je $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=124=2\cdot 2\cdot 31$. Brojevi $x-y$ i $x+y$ su iste parnosti (zašto?), pa su oba parna. Kako je jedini način da se $2\cdot 2\cdot 31$ prikaže kao proizvod dva parna broj $2\cdot 62$, to je $x-y=2$ i $x+y=62$. Dakle, rešenje je $x=64$, pa je $x^2=1024$.

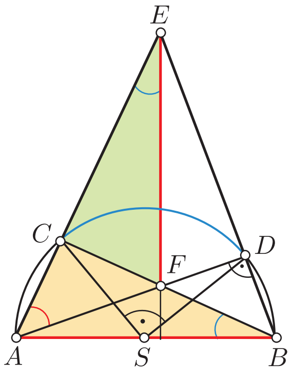
Ć2. Dokazaćemo prvo da je za svaki prirodni broj n izraz $n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ deljiv sa 30. Proizvod $(n-1)n(n+1)$ sadrži dva uzastopna broja, pa je deljiv sa 2 i tri uzastopna broja, pa je deljiv sa 3, tj. deljiv je sa 6. Razmatranjem slučajeva $n=5k$, $n=5k\pm 1$, $5k\pm 2$, uveravamo se da je izraz n^5-n deljiv sa 5, za svaki prirodni broj n. Dakle taj izraz je deljiv sa $6\cdot 5=30$.

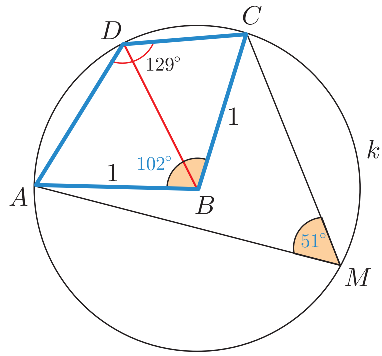
Na osnovu prethodnog dokaza zaključujemo: $n_1^5+n_2^5+\cdots+n_{1997}^5=(n_1^5-n_1)+(n_2^5-n_2)+\cdots++(n_{1997}^5-n_{1997})+(n_1+n_2+\cdots+n_{1997})=30k$, tj. $n_1^5+n_2^5+\cdots+n_{1997}^5$ je deljivo sa 30, jep je svaki sabirak sa desne strane jednakosti deljiv sa 30.

Ć3. Videti rešenje **zadatka 392**.

Ć4. Uglovi $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADB$ su pravi, jer su periferijski nad prečnikom AB. Prema tome, BC i AD su visibne trougla ABE, pa je njihova presečna tačka F ortocentar trougla ABE. Dakle, EF je treća visina, pa je EF normalno na AB, slika dole levo.

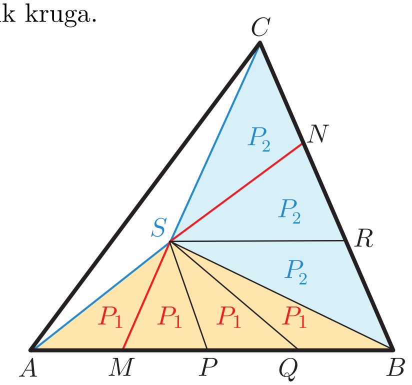
Po uslovu je centralni ugao $\sphericalangle CSD$ nad lukom CD prav, pa je odgovarajući periferijski $\sphericalangle CAD = 45°$. Onda je pravougli trougao ACF jednakokraki, pa je $AC = CF$. Sem toga, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FEC$, jer su oba oštri, a imaju normalne krake (BC normalno na CE i AB normalno na EF). Sledi da su pravougli trouglovi ABC i FEC podudarni. Iz njihove podudarnosti zaključujemo da je $AB = EF$.





Ć5. Konstruišimo krug $k(B, 1)$. Po uslovu k sadrži tačke A i C, jer je $AB = BC = 1 = r$, gde je r poluprečnik kruga k. Neka je M proizvoljna tačka na kružnici, tako da su B i M sa iste strane dijagonale AC. Tada je periferijski ugao $\sphericalangle AMC = 51°$, jer je jednak polovini odgovarajućeg centralnog ugla $\sphericalangle ABC = 102°$. Ali, sada uočavamo da je $\sphericalangle AMC + \sphericalangle ADC = 51° + 129° = 180°$, pa su M i D tačke na kružnicu k. Sledi da je $BD = 1$, kao poluprečnik kruga.

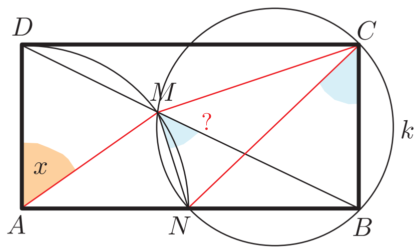
Č1. Neka su P i Q tačke na stranici AB, takve da je $MP = PQ = QB = AM$. Tada je $AM = \frac{1}{4}AB$, pa je površina trougla ACM jednaka $\frac{1}{4} \cdot 2004 = 501$, a površina trougla BCM je $2004 - 501 = 1503$. Slično, ako je R tačka stranice BC, takva da je $BR = RN = NC = \frac{1}{3}BC$, onda je površina trougla ABN jednaka $\frac{2}{3} \cdot 2004 = 1336$. Po konstrukciji trouglovi AMS, MPS, PQS i QBS imaju jednake površine, na slici označene sa P_1, jer imaju jednake osnovice i zajedničku visinu iz S. Slično, trouglovi BRS, RNS i NCS imaju međusobno jednake površine, na slici označene sa P_2. Uočimo da iz površine trougla BCM dobijamo jednakost: $3P_1 + 3P_2 = 1503$, odakle je $P_1 + P_2 = 501$. Slično, iz površine trougla



ABN dobijamo $4P_1 + 2P_2 = 1336$, odakle je $2P_1 + P_2 = 668$. Sabiranjem jednakosti dobijamo $(P_1 + P_2) + (2P_1 + P_2) = 3P_1 + 2P_2$, a to je prema slici površina P četvorougla $MBNS$. Dakle, $P = 501 + 668 = 1169$.

Č2. Kako je $abc = 1$, biće $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) = abc + \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} + \frac{1}{abc} = 1 + \frac{abc}{c^2} + \frac{abc}{b^2} + \frac{abc}{a^2} + \frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc} + 1 = 2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + a^2 + b^2 + c^2 = \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) +$
$\left(b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}\right) + \left(c^2 + 2 + \frac{1}{c^2}\right) - 4 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 - 4.$

Č3. Neka je utvrđeno da ima k prepunih i m ostalih autobusa. Neka je u prepunim autobusima x, a u ostalim y putnika. Tada je $x > 50k$, $y \leqslant 50m$. Ako je $k = 0$ ili $m = 0$, procenti pomenuti u formulaciji zadatka su međusoono jednaki (i jednaki 0, odnosno 100). U protvinom je $\frac{x}{k} > 50 \geqslant \frac{y}{m}$, odakle je $\frac{y}{x} < \frac{m}{k}$. Odavde je $\frac{y}{x} + 1 < \frac{m}{k} + 1$, pa sabiranjem dobijamo da je $\frac{x+y}{x} < \frac{k+m}{k}$, odnosno $\frac{x}{x+y} > \frac{k}{k+m}$. Prema tome, procenat putnika u prepunim autobusima (broj koji je izračunao Ratko) veći je od procenta prepunih autobusa (broja koji je dobio Voja).



Č4. Neka je $\sphericalangle DAM = x$ (slika). Tada iz jednakokrakog trougla AMD je $\sphericalangle AMD = 90^\circ - \frac{x}{2}$, a iz, takođe jednakokrakog, trougla ANM je $\sphericalangle MAN = 90^\circ - x$ i $\sphericalangle AMN = 45^\circ + \frac{x}{2}$. S obzirom da je $\sphericalangle DMA + \sphericalangle AMN + \sphericalangle NMB = 180^\circ$, sledi da je $\sphericalangle NMB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) - \left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = 45^\circ$. S druge strane, trougao NBC je jednakokraki pravougli, pa je $\sphericalangle NCB = 45^\circ$. Dakle, $\sphericalangle NMB = \sphericalangle NCB$, pa se oko četvorougla $BCMN$ može opisati krug. Iz jednakokrakog pravouglog trougla znamo da je $\sphericalangle BNC = 45^\circ$, pa je i $\sphericalangle BMC = 45^\circ$ (nad istom tetivom BC kruga k).

Č5. Vidi rešenje **zadatka 547**. Ima ukupno $2 + 2 + 4 \cdot 2003 = 8016$ načina.

DŽ1. Očigledno rešenje je $m = 1$ i $n = 1$, jer je $m^2 + n^2 = 1 + 1 = 2$. Primetimo da je kvadrat neparnog broja neparan, a kvadrat parnog broja paran broj. Ako zbir ili razlika kvadrata prirodnih brojeva m i n ima oblik $222\ldots22$, onda su brojevi m i n ili oba parni ili oba neparni. Ako su brojevi m i n parni, onda je kvadrat svakog od njih deljiv sa 4, pa su deljivi sa 4 i zbir i razlika kvadrata. Međutim broj oblika $222\ldots22$ nije deljiv sa 4. Zato otpada slučaj kada su m i n parni brojevi. Neka je sada $m = 2k + 1$ i $n = 2p + 1$, gde su k i p prirodni brojevi. Iz uslova $(2k+1)^2 + (2p+1)^2 = 222\ldots22$ dobijamo da je $4k(k+1) + 4p(p+1) = 222\ldots20$. Primetimo da je broj $4k(k+1) + 4p(p+1)$. deljiv sa 8 (jer je $k(k+1)$, odnosno $p(p+1)$ proizvod dva uzastopna prirodna broja), a broj oblika $222\dots20$ deljiv je sa 8 samo ako je jednak 0, a tada je $k=p=0$ i $m=n=1$. Razlika $m^2-n^2=(2k+1)^2-(2p+1)^2=4\cdot(k-p)(k+p+1)$ deljiva je sa 4 i ne može biti jednaka broju oblika $222\dots22$ jer on nije deljiv sa 4. Dakle, jedino rešenje je $m=1$, $n=1$.

DŽ2. Sva tri sabirka ne mogu biti manja od $\dfrac{1}{3}$ jer bi zbir bio manji od 1. Dakle, bar jedan mora biti veći ili jednak $\dfrac{1}{3}$. Neka je, npr. $\dfrac{1}{ab}\geqslant\dfrac{1}{3}$, odakle izlazi da je $a\cdot b\leqslant 3$. Svi parovi $(a,\,b)$ koji su rešenja ove nejednačine su: $(1,\,1)$, $(1,\,2)$, $(1,\,3)$, $(2,\,1)$ i $(3,\,1)$. Dalje lako nalazimo sva rešenja zadate jednačine: $(1,\,2,\,3)$, $(1,\,3,\,2)$, $(2,\,1,\,3)$, $(2,\,3,\,1)$, $(3,\,1,\,2)$ i $(3,\,2,\,1)$. Slučaj $(1,\,1)$, t.j. $a=1$ i $b=1$ ne daje rešenje jer ne može biti $\dfrac{1}{c}=0$.

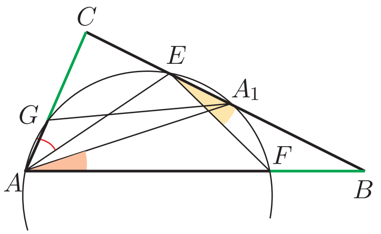
DŽ3. Neka je $2n+1=k^2$, $3n+1=m^2$, za neke prirodne brojeve k, m i n. Tada je $5n+3=4\cdot(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m)$. Kako su k i m prirodni brojevi, to je $2k+m>1$. Potrebno je dokazati i da je $2k-m\geqslant 2$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $2k-m\leqslant 1$. Tada $2k\leqslant m+1$, odakle sledi da je $k\leqslant\dfrac{m+1}{2}$ i $2n+1=k^2\leqslant\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2=\dfrac{(m+1)^2}{4}$. Sledi da je $8n+4<(m+1)^2$, odakle dobijamo $2(3n+1)+2n+2\leqslant(m+1)^2$, tj. $2m^2+2n+2<(m+1)^2$, a odavde dobijamo $(m-1)^2\leqslant -2n<0$, što je kontradikcija. Prema tome, broj $5n+3=(2k+m)(2k-m)$ je složen.

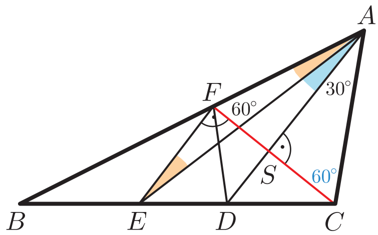
DŽ4. Videti rešenje **zadatka 419**.

DŽ5. Videti rešenje **zadatka 546**. Povučeno je 5989 nepresecajućih duži.

Đ1. Svaki petocifreni palindrom može se napisati u obliku $\overline{abcba}=10001a+1010b+100c=101(99a+10b+c)+2a-c$. Dakle, $2a-c$ mora biti deljiv sa 101, a kako su a i c jednocifreni brojevi, mora biti $2a-c=0$, tj. $c=2a$. Najveće cifre za koje to važi su $a=4$, $c=8$. Za b uzimamo najveću cifru, tj. $b=9$. Traženi broj je 49894.

Đ2. Na slici vidimo da je $\sphericalangle FAA_1=\sphericalangle FEA_1$, kao periferijski nad istim lukom FA_1. Zbog toga su slični trouglovi ABA_1 i EBF (imaju još zajednički ugao kod temena B). Iz sličnosti dobijamo proporciju $AB:BA_1=BE:BF$, odakle je $BF=BA_1\cdot\dfrac{BE}{AB}$. Slično zaključimo da je trougao AEC sličan trouglu A_1GC (jer je $\sphericalangle EAG=\sphericalangle EA_1G$, kao periferijski nad lukom GE). Iz ove sličnosti dobijamo proporciju $AC:CE=A_1C:CG$, a odavde je $CG=A_1C\cdot\dfrac{CE}{AC}$. Uporedimo ovu jednakost sa $BF=BA_1\cdot\dfrac{BE}{AB}$. Tačka A_1 je središte duži BC, pa je $BA_1=A_1C$. Simetrala ugla BAC seče BC u tački E, pa je $BE:CE=AB:AC$. Odavde izlazi da je $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CE}{AC}$. Onda je $BA_1\cdot\dfrac{BE}{AB}=A_1C\cdot\dfrac{CE}{AC}$, odnosno da je $BF=CG$, što se i tvrdilo.





Đ3. Neka su a, b i c dati pozitivni brojevi, takvi da je $abc = 1$ i $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Pomnožimo nejednakost sa abc i dobijemo: $abc(a+b+c) > bc+ac+ab$. Kako je $abc = 1$, biće $a+b+c > bc+ac+ab$. Odavde dobijemo: $a+b+c-ab-bc-ac+abc-1 > 0$. (Dodali smo $abc = 1$, jer je $abc - 1 = 0$.) Rastavimo polinom na činioce i dobijemo nejednakost $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$. Ovo je moguće ako su sva tri činioca pozitivni, ili ako je samo jedan činilac pozitivan. Prvi slučaj nije moguć, jer bi onda bilo $a > 1$, $b > 1$ i $c > 1$, što se protivi uslovu $abc = 1$. Dakle, samo jedan od brojeva a, b, c veći je od 1.

Đ4. Neka je ukupan broj ekipa n; tada je ukupan broj bodova koje su osvojile ekipe $n(n-1)$. Kako je $n(n-1) \geqslant 7+5+3$, sledi da je $n \geqslant 5$. Ekipa koje su se plasirale iza trećeg mesta ima $n-3$, i svaka od njih je osvojila manje od 5 bodova, pa je $n(n-1) \leqslant 15+5(n-3)$, odakle je $n(n-6) < 0$. Dakle, $n < 6$. Iz svega ovoga sledi da je $n = 5$. Ukupak broj bodova je 20, pa su četvrtoplasirana i petoplasirana ekipa osvojile 3, odnosno 2 boda.

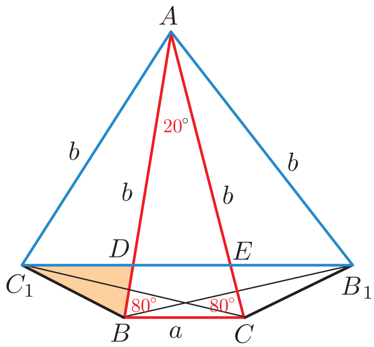
Đ5. Neka je F tačka stranice AB takva da je $\sphericalangle ACF = 60^\circ$ (slika). Trougao AFC je jednakostranični, (svi uglovi su mu od 60°). Zato je simetrala AD normalna na FC. Neka je S tačka preseka AD i FC. Kako je D na simetrali duži FC, to je $DP = DC = DE$. Sledi da je EC prečnik polukružnice koja prolazi kroz tačku F, pa je $\sphericalangle EFC$ prav. Dalje je $\sphericalangle FEA = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 15^\circ$, pa je trougao EFA jednakokraki. Sledi da je $FA = FE$, pa je i $FC = FE$. Dažle, trougao EFC je jedaakokraki pravougli pa je $\sphericalangle DCF = 45^\circ$, odakle je $\sphericalangle BCA = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

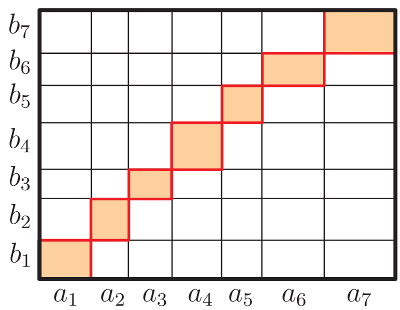
Male (srpske) olimpijade

Z1. Broj $n^2 + 2006n$ veći je od n^2, pa mora biti oblika $(n+k)^2$ gde je k prirodni broj. Dobijamo uslov $n^2 + 2006n = (n+k)^2 = n^2 + 2nk + k^2$, a odavde je $k^2 = n(2006 - 2k)$. Mora biti $2006 - 2k > 0$, pa je $k < 1003$. Najveći je broj $k = 1002$, a odgovarajuću vrednost za n dobijamo iz uslova $1002^2 = 2n$. Dakle, $n = 1052 \cdot 501$ i to je tražena najveća vrednost za n.

Z2. Uočimo tačku C_1 simetričnu sa C u odnosu na pravu AB i tačku B_1 simetričnu sa B u odnosu na pravu AC. Tada je trougao AB_1C_1 jednakostranični, jer je $\sphericalangle B_1AC_1 = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ i $AB_1 = AC = b = AC_1$, slika levo. Neka su D i E tačke u kojim duž B_1C_1 seče krake AB i AC. Budući da je $\sphericalangle BC_1D = \sphericalangle AC_1B - \sphericalangle AC_1B_1 = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ i $\sphericalangle ABC_1 = 80^\circ$, zaključujemo da je trougao BC_1D

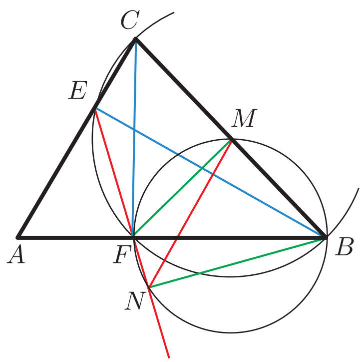
sličan datom trouglu ABC. Otuda dobijamo proporciju $BD : BC_1 = BC : AB$, odnosno $BD : a = a : b$. Odavde je $BD = \frac{a^2}{b}$. Osim toga, na osnovu Talesove teoreme je $DE : BC = AD : AB$, odnosno $DE : a = (b - BD) : b$ ili $DE : a = \left(b - \frac{a^2}{b}\right) : b$. Odavde je $DE = \frac{a}{b}\left(b - \frac{a^2}{b}\right) = \frac{a(b^2 - a^2)}{b^2}$. Uočimo da je $B_1C_1 = b = C_1D + DE + EB_1$, pa je $b = 2a + \frac{a(b^2 - a^2)}{b^2}$, jer je $C_1D = a = EB_1$. Sređivanjem jednakosti dobijemo: $b^3 = 2ab^2 + ab^2 - a^3$, odnosno $a^3 + b^3 = 3ab^2$.





Z3. Prema slici gore stranice pravougaonika su: $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ i $b = b_1 + b_2 + \cdots + b_7$, pa je njegov obim $O = 2(a+b) = 2(a_1+a_2+\cdots+a_7)+2(b_1+b_2+\cdots+b_7)$, što možemo zapisati i ovako: $2(a + b) = 2(a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) + \cdots + 2(a_7 + b_7)$. Na desnoj strani jednakosti su obimi manjih pravougaonika koji su na slici gore obojeni. Po uslovu svi ovi obimi su izraženi celim brojevima, pa je i $2(a + b)$ celi broj (kao zbir celih brojeva).

Ž1. Četvorougao $BFEC$ je tetivni, jer je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90°$, pa je $\sphericalangle BFN = \sphericalangle ACB = \gamma$. (Spoljašnji ugao tetivno četvorougla jednak je naspramnom unutrašnjem uglu; vidi sliku. Četvorougao $MBNF$ takođe je tetivni, jer je $\sphericalangle FNB = 90° = \sphericalangle FMB$. Zbog toga je $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BFN = \gamma = \sphericalangle BCA$, odakle sledi da je prava MN paralelna sa AC.

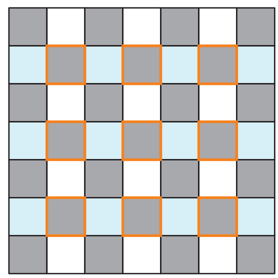


Ž2. Kako je $x \in [1, 2]$ i $y \in [1, 2]$, to je $y \leqslant 2 \leqslant 2x$ i $x \leqslant 2 \leqslant 2y$. Odavde je $2x - y \geqslant 0$ i $x - 2y \leqslant 0$, pa je $(2x - y)(x - 2y) \leqslant 0$. Sređivanjem dobijamo: $2x^2 + 2y^2 \leqslant 5xy$, odnosno $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leqslant \frac{5}{2}$. (Podelili smo sa $2xy$.) Sada je $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 \leqslant \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$. Dakle $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leqslant \frac{9}{2}$.

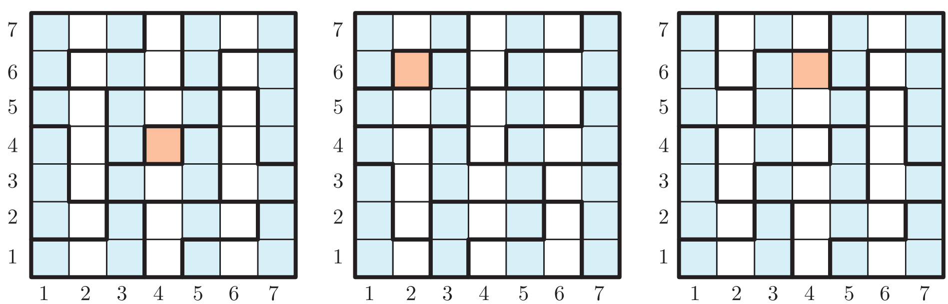
Ž3. Za $p = 2$ je $2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5 = 2^4 + 3^4 + 4^4 - 5 = 16 + 81 + 256 - 5 = 348$, a to nije deljivo sa 13. Za $p = 3$ je $p^2 = 9$, pa dobijamo: $2^9 + 3^9 + 4^9 - 5 = 512 + 27^3 + 512^2 - 5$. Kako je $512 \equiv 5 \pmod{13}$ i $27 \equiv 1 \pmod{13}$, biće: $512 + 27^3 + 512^2 - 5 \equiv (5 + 1^3 + 5^2 - 5) \pmod{13} \equiv 26 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}$. Dakle, $p = 3$, je rešenje zadatka.

Za $p > 3$ prosti broj p je oblika $6k \pm 1$, pa je $p^2 = 36k^2 \pm 24k + 1$. Prema tome: $p^2 \equiv 1 \pmod{12}$. Dakle, $p^2 = 12q + 1$. Onda je $2^{p^2} = 2^{12q+1} = 2^{12q} \cdot 2$. Vidimo da je $2^{12} = (2^6)^2 = 64^2 \equiv (-1)^2 \pmod{13} \equiv 1 \pmod{13}$, pa je $2^{p^2} = 2^{12q} \cdot 2 = (2^{12})^q \cdot 2 \equiv 1^q \cdot 2 \pmod{13} \equiv 2 \pmod{13}$. Slično pokažemo da je $3^{p^2} \equiv 3 \pmod{13}$ i $4^{p^2} \equiv 4 \pmod{13}$. Konačno je $2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5 \equiv (2 + 3 + 4 - 5) \pmod{13} \equiv 4 \pmod{13}$, pa u ovim slučajevima nema rešenja. Jedino rešenje je $p = 3$.

Ž4. Ako tablu obojimo sivo-belo, kao šahovsku table (donji levi ugao je sivo obojen), dobićemo 25 sivih i 24 bela polja. Budući da svaka L figura pokriva dva bela i dva siva polja, ostaće nepokreiveno jedno sivo polje.



Sada obojimo tablu po kolonama, naizmenično plavo-belo, kao na slici. Neka je n broj L-figura koje pokrivaju 3 plava i jedno belo polje. Očigledno da je jedina mogućnost da je $n = 8$, a preostale 4 L-figure pokrivaju po 3 bela i 1 plavo polje. Tada je pokriveno $8 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 28$ plavih i $8 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 20$ belih polja. Dakle, jedno polje koje nije plavo obojeno neće biti pokriveno. Budući da smo utvrdili da pri "šahovskom" bojenju sivo-belo neće biti pokriveno sivo polje, jasno je da neće biti pokriveno jedno od 9 polja, koja su na slici uokvirena naradžastim ivicama. Na sledećim slikama prikazana su popločavanja sa nepokrivenim poljima (4, 4), (2, 6) i (4, 6). Primenom simetrije dobijamo i ostlih 6 popločavanja.

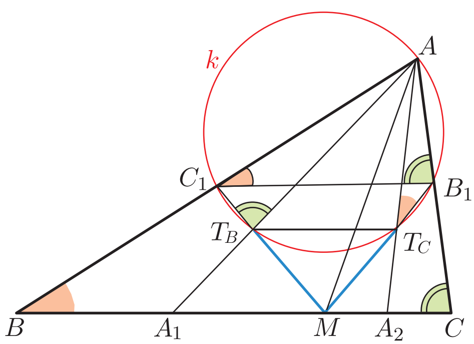


Ž5. Devetocifreni broj je $\overline{A2AA} = 1000000A + 2000A + A = 1002001A = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot A$. Dakle, A je kvadrat prirodnog broja, $A \in \{11^2, 12^2, 13^2, \ldots, 21^2, 22^2\}$. Proverom utvrdimo da uslov o četiri različita prosta delioca zadovoljava šest brojeva: 196, 256, 289, 361, 441 i 484.

Ž6. Koristićemo nejednakost između aritemtičke i geoemtrijske sredine: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$. levu stranu date nejednakosti napišemo u obliku zbira 21 sabirka. Pritom, skraćujemo razlomke gde je to moguće. $\frac{a^2}{bc} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c^2}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \geqslant 21 \cdot \sqrt[21]{\frac{a^8 \cdot b^8 \cdot c^8}{a^8 \cdot b^8 \cdot c^8}} = 21$. Pritom smo, na primer, pisali: $\frac{2b^2}{bc} = \frac{b^2}{bc} + \frac{b^2}{bc} = \frac{b}{c} + \frac{b}{c}$.

Ž7. Svi napisani brojevi su međusobno različiti, jer ako bi dva broja bila jednaka, onda bi njihova razlika bila 0, pa bi na tabli bila zapisana 0, ali ona nije prirodni broj. Onda su na tabli zapisani brojevi u rastućem nizu: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2009} < a_{2010}$. Među ovim brojevima su i apsolutne vrednosti njihovih raylika, pa je $a_{2009} = a_{2010} - a_1$, $a_{2008} = a_{2009} - a_1, \ldots a_2 = a_3 - a_1$, $a_1 = a_2 - a_1$. Odavde sledi da je: $a_2 = 2a_1$; $a_3 = a_2 + a_1 = 3a_1, \ldots, a_{2009} = 2009a_1$, $a_{10} = 2010a_1$. Jedan od napisanih brojeva je 2011, pa kako je to prost broj, sledi da je $a_1 = 2011$, a ostali su oblika $a_k = k \cdot 2011$, što znači da su svi deljivi sa 2011.

Ž8. Neka su C_1 i B_1 središta stranica AB i AC, a MC_1 i MB_1 težišne linije trouglova ABM i ACM. Sa T_B i T_C označimo težišta trouglova ABM i ACM. Po uslovu tačka T_C je na opisanoj kružnici trougla ABM, pa je $\sphericalangle AT_CB_1 = \sphericalangle ABM$ (osobina spoljašnjeg ugla tetivnog četvorougla). Duž B_1C_1 je srednja linija trougla ABC, pa je paralelna sa BC. Zbog toga je $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle ABC$, pa je $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle AT_CB_1$. Na osnovu toga zaključujemo da tačka T_C leži na kružnici k opisanoj oko trougla AB_1C_1. Slično se dokaže da i tačka T_B leži na kružnici k. Zbog osobina težišta je $AT_B : AA_1 = AT_C : A_M = 2 : 3$, pa na osnovu obrnute Talesove teoreme sledi da je T_BT_C paralelno sa A_1A_2, odnosno sa AB. Samim tim je T_BT_C paralelno sa B_1C_1. Ondqa je $B_1C_1T_BT_C$ trapez upisan u krug k, pa mora biti jednakokraki (videti rešenje **zadatka 396**). Zbog toga je $C_1T_B = B_1T_C$, ali i $MT_B = MT_C$, što se i tvrdi.



Š1. Tražimo broj $n = \overline{abba} = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$, koji je očigledno deljiv sa 11. Broj n je četvorocifreni i predstavlja proizvod uzastopnih prostih brojeva, a jedan od činilaca je broj 11. Jedina rešenja su $n = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. i $n = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 5005$.

Š2. Pretpostavimo da je $x \leqslant y \leqslant z$. Datu jednačinu pomnožimo sa 2 i dobijemo: $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2x + z^2) = 6$, pa je $(y - x)^2 + (z - y)^2 + (z - x)^2 = 6$. Brojevi u zagradama su prirodni, pa, kako je $1 + 1 + 4 = 6$, možemo uzeti da je $y-x=1$, $z-y=1$ i $z-x=2$. Ovo važi za svaka tri uzastopna prirodna broja. Dakle, rešenja su: $x=n$, $y=n+1$ i $z=n+2$, za svaki prirodni broj n.

Š3. Slično rešenju **zadatka R3**. Označimo članove niza sa $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}, a_{16}, \ldots$, pri čemu je $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, itd. Kako je a_1 jednocifreni broj, a a_9 četvorocifreni, imamo jednakost: $a_9 = a_1 + 8d > 1000$ tj. mora biti ispunjeno $8d > 991$ što nam daje uslov da je $d > 123$. S druge strane, a_8 je poslednji trocifreni član niza pa je $a_8 = a_1 + 7d < 1000$ tj. $7d < 999$ što nam daje i drugi uslov $d < 143$. Dakle, $123 < d < 143$.

Za bilo koju vrednost prvog člana niza i bilo koju vrednost za d iz određenog intervala imamo da je $B = 1$, a $A = 2$. Posmatrajući deveti član niza uz uslov da različita slova označavaju različite cifre, lako uočavamo da F ne može biti cifra 1 ili 2, jer su to već B i A. A kako je $123 < d < 143$, sledi da je $F = 0$. Kako četvrti član niza ne može biti 303, a kamoli 505, sve zbog ograničenja za d, sledi da je $G = 4$. (Ne može biti $F \geqslant 3$, jer bi tada bilo $d > 143$.) Kada imamo određena dva člana niza, lako možemo odrediti tačnu vrednost za d, naime $a_4 = 3d + a_1$, odakle lako dobijamo da je $d = 134$, pa je $a_{16} = a_1 + 15d = 2 + 2010 = 2012$, tj. 16. član niza je $AFBA$.

Š4. Odredimo kordinate crvene tačke. Kako se crvena tačka nalazi u preseku datih lrazih, njene koorinate biće rešenja sistema jednačina po x i y $\begin{array}{c} y = ax + b \\ y = bx + a. \end{array}$. Kako je iz uslova zadatka $a \neq b$, lako dobijamo da crvena tačka ima koordinate $(1,\ a+b)$. Prava koja sadrži plave tačke očigledno predstavlja y osu, ali nije poznat pozitivan smer ose. Znajući da crvena tačka ima koordinate $(1, a+b)$, pozitivan smer ose y lako određujemo.

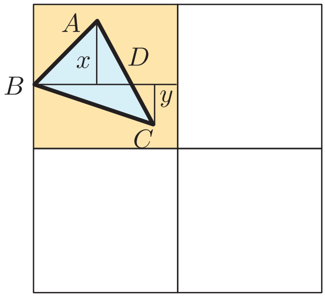
U preseku y ose i prave koja sadrži crvenu tačku i normalna je na y osu nalazi se tačka $P(0,\ a+b)$. U zavisnosti da li se tačka P nalazi između plavih tačaka ili ne, razlikozaćemo dva slučaja. Ova dva slučaja javljaju se kao posledica toga da a i b mogu biti istog, a i različitog znaka.

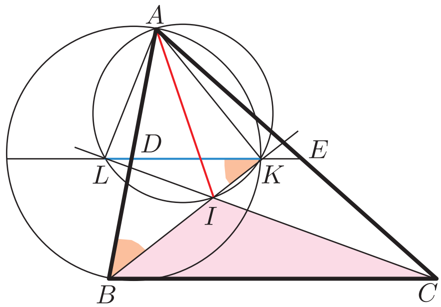
1. slučaj. Neka su a i b istog znaka, na primer pozitivni (analogno je i ako su negativni). Plave tačke imaju redom koordinate $(0,\ a)$ i $(0,\ b)$. Rastojanje između ove dve tačke je $|b-a|$. Jasno je da tačka $P(0,\ a+b)$ neće biti između plavih tačaka, već će biti van i to bliže onoj plavoj tački koja je udaljenija od koordinatnog početka, jer je njena udaljenost od koordinatnog početka $a+b$. Rastojanje tačke $P(0,\ a+b)$ do njoj bliže plave tačke jednako je rastojanju druge plave tačke i koordinatnog početka. Na taj način lako nalazimo poziciju koordinatnog početka.

2. slučaj. Neka su a i b različitog znaka. Tačka $P(0,\ a+b)$ kao i kordinatni početak nalaze se između plavih tačaka. Nije teško uočiti da se tačka $P(0, a+b)$ nalazi na rastojanjima $|a|$ i $|b|$ od plavih tačaka, a kako se i koordinatni početak nalazi na rastojanjima $|b|$ i $|a|$ od plavih tačaka, lako ga je odrediti, jer imamo rastojanja $|a|$ i $|b|$ kao rastojanja tačke $P(0,\ a+b)$ do plavih tačaka.

Juniorske balkanske olimpijade

I1. Podelimo dati kvadrat na kvadrate stranice $\frac{1}{2}$. Po Dirihleovom principu. postoji manji kvadrat u kojem su 3 od 9 datih tačaka. Neka su to tačke A, B i C. Moguće je kroz jednu od njih postaviti pravu paralelnu stranici datog kvadrata, tako da ona seče naspramnu stranicu trougla ABC, prema slici u tački D. Očigledno je $BD < \frac{1}{2}$, a površina trougla ABC je: $P = P_{ABD} + P_{ACD} = \frac{1}{2}BD \cdot x + \frac{1}{2}BD \cdot y = \frac{1}{2}BD(x+y)$. Kako je $BD < \frac{1}{2}$ i $x + y \leqslant \frac{1}{2}$ sledi da je $P < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.





I2. Sređivanjem date relacije dobijamo $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} = \frac{k}{2}$. Odavde je $\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} = \frac{2}{k}$, pa iz $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} + \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} = \frac{k}{2} + \frac{2}{k} = \frac{k^2+4}{2k}$, dobijamo $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} = \frac{k^2+4}{4k}$, odnosno $\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8} = \frac{4k}{k^2+4}$. Dalje jednostano izračunavamo: $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8} = \frac{k^2+4}{4k} + \frac{4k}{k^2+4} = \frac{k^4+24k^2+16}{4k^3+16k}$.

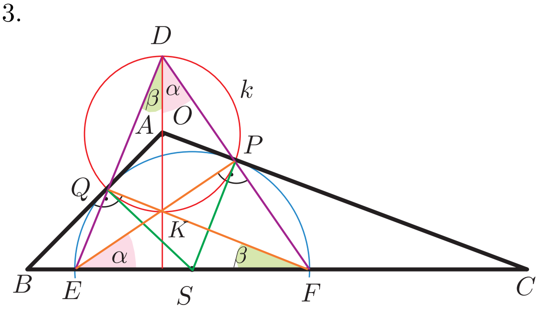
I3. Lako se dokazuje da je trougao BDK jednakokraki, poslednja slika desno ($\sphericalangle DBK = \sphericalangle KBC = \sphericalangle DKB$), pa je $DK = DB = AD$ i postoji krug sa centrom D,koji sadrži tačke A, B i K. Sledi da je $\sphericalangle AKB = 90°$, kao ugao nad prečnikom. Slično se dokazuje da je $LE = EC = EA$ i $\sphericalangle ALC = 90°$. Dakle, krug prečnika AI sadrži tačke K i L. Zbog toga je $AI \geqslant KL$. U trouglu BCI je $BI + CI > BC$, pa je $AI + BI + CI > BC + KL$.

I4. Iz uslova $R(b+c) = a\sqrt{bc}$ dobijamo: $\frac{2R}{a} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}$. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine je $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$, pa dobijamo: $\frac{2R}{a} \leqslant 1$, odnosno $2R \leqslant a$. Kako je $2R$ prečnik opisanog kruga trougla, to je $2R \geqslant a$. Ostaje jedna mogućnost: $2R = a$, što znači da je a hipotenuza. tj. $\alpha = 90°$. Dalje iz $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} = \frac{2R}{a} = 1$ sledi $b + c = 2\sqrt{bc}$, što je moguće samo ako je $b = c$. Znači, pravougli trougao je jednakokraki, pa je $\beta = \gamma = 45°$.

I5. Ne može biti samo broj n_{1998} paran, jer bi tada leva strana jednakosti, kao zbir neparnog broja neparnih, bila neparan broj. Iz sličnih razloga ne može biti samo jedan broj leve strane neparan. Pretpostavimo da su svi brojevi neparni. Za svaki neparni broj $2k-1$ važi $(2k-1)^2 = 4k^2-4k+1 = 4k(k-1)+1 = 8p+1$, (jer $k(k-1)$ je uvek paran broj). Tada leva strana date jednakosti ima oblik: $8q+1997 = 8(q+249)+5$ pa važi jednakost: $8(q+249)+5 = 8m+1$, što je kontradikcija. Sledi, bar dva broja su parni.

II1. Data jednakost je ekvivalenta sledećim jednakostima: $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+(x+y)^3+30xy-3x^2y-3xy^2 = 2000$, $2((x+y)^3-1000)-3xy(x+y-10) = 0$, $2(x+y-10)((x+y)^2+10(x+y)+100)-3xy(x+y-10) = 0$, $(x+y-10)(2x^2+2y^2+20x+20y+xy+200) = 0$, $(x+y-10)\left((x+10)^2+(y+10)^2+\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right) = 0$. Kako je $(x+10)^2+(y+10)^2+\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 > 0$, (ne mogu svi sabirci istovremeno biti jednaki 0), to je $x+y-10 = 0$, pa je $x+y = 10$.

II2. Tražimo prirodni broj n, takav da je $n^2+3^n = m^2$, gde je m ceo broj. Treba da bude: $m^2-n^2 = 3^n$, odnosno $(m-n)(m+n) = 3^n$. Odavde sledi da je $m+n = 3^p$ i $m-n = 3^q$, $p > q \geqslant 0$ i $p+q = n$, pa je $m = \dfrac{3^p+3^q}{2} = 3^q\dfrac{3^{p-q}+1}{2}$ i $n = 3^q\dfrac{3^{p-q}-1}{2}$. Izrazi $(3^{p-q}+1)$ i $(3^{p-q}-1)$ su deljivi sa 2, pa m i n imaju zajednički delilac 3^q, ili je $q = 0$. (Ako je $q = 0$, onda je $n = p$, pa je $n = \dfrac{3^n-1}{2}$, odnosno $3^n = 2n+1$, što je moguće samo za $n = 1$. Tada je $n^2+3^n = 1+3 = 4 = 2^2$, pa je $n = 1$ jedno rešenje zadatka.) Otuda zaključujemo da je 3^q takođe delilac brojeva $(m+n)$ i $(m-n)$, a zajednički delilac brojeva $(m+n)$ i $(m-n)$ ne može biti veći od $(m+n)-(m-n) = 2n$. Dakle: $2n \geqslant 3^q = m-n$, odakle je $3n \geqslant m$. Sledi da je $n^2+3^n = m^2 \leqslant 9n^2$, odnosno $3^n \leqslant 8n^2$. Ovo važi za $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ i $n = 4$. Za $n = 5$ ne važi, jer je $3^5 = 243 > 200 = 8\cdot 5^2$. Dokazaćemo, ako ovo ne važi za n, onda ne važi ni za $n+1$. Zaista, ako je $3^n > 8n^2$, onda je $3\cdot 3^n > 3\cdot 8n^2$, odnosno $3^{n+1} > 8\cdot 3n^2 = 8\cdot(n^2+2n^2)$. Primetimo da je za $n \geqslant 5$ ispunjen uslov: $(n-1)^2 > 2$, a odavde je $n^2 > 2n+1$. Samim tim je i $2n^2 > 2n+1$, pa je $3^{n+1} > 8(n^2+2n^2) > 8(n^2+2n+1) = 8(n+1)^2$. Zaključujemo da za svako $n \geqslant 5$ važi: $3^n > 8n^2$. Dakle, $n < 5$. Proverom utvrdimo da postavljeni uslov zadovoljavaju samo $n = 1$ i $n = 3$.



II3. Neka se EQ i FP seku u tački D, a centar datog polukruga označimo sa S. Uglovi EPF i EQF su pravi (nad prečnikom), pa su EP i FQ visine, a tačka K ortocentar trougla DEF. Dokazaćemo da tačka A pripada visini DK ovog trougla. Uvedimo oznake: $\sphericalangle PEF = \alpha$ i $\sphericalangle QFE = \beta$. Tada je $\sphericalangle EDK =$

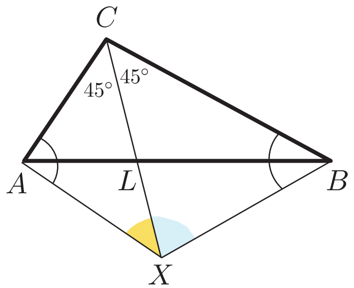
$\sphericalangle QFE = \beta$ (sa normalnim kracima). Slično dokažemo i da je $\sphericalangle PDK = \alpha$. Dakle: $\sphericalangle EDF = \alpha + \beta$. Uglovi KPD i KQD su po pretpostavci pravi, pa krug k prečnika DK sadrži tačke P i Q. Neka je O, središte duži KD, centar kruga k. Tada je $\sphericalangle POQ = 2\sphericalangle EDF = 2(\alpha + \beta)$ (centralni i periferijski uglovi), a poluprečnici kruga k su $OP = OQ$. Uočimo da su uglovi APS i AQS pravi (između poluprečnika i tangente). Dakle, krug prečnika SA sadrži tačke P i Q, a $\sphericalangle PAQ = 180^\circ - \sphericalangle PSQ$. Kako je $\sphericalangle PSQ = 180^\circ - (\sphericalangle ESQ + \sphericalangle FSP)$, sledi da je $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle ESQ + \sphericalangle FSP$. Međutim, u datom polukrugu je $\sphericalangle ESQ = 2\beta$ i $\sphericalangle FSP = 2\alpha$ (centralni i periferijski uglovi), pa je $\sphericalangle PAQ = 2(\alpha + \beta) = \sphericalangle POQ$. Sem toga je $AP = AQ$, što znači da je tačka A na simetrali tetive PQ kruga k (kao i tačka O). Zbog jednakosti $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle POQ$, sledi da je $A \equiv O$. Otuda sledi da je tačka A na pravoj DK, odnosno da je AK visina trougla ABC, što se i tvrdilo.

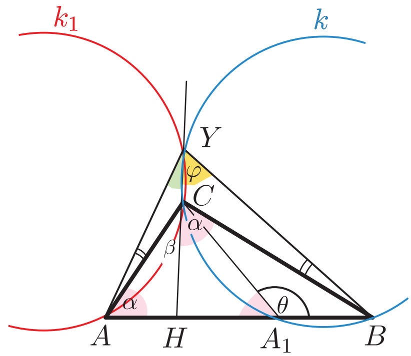
II4. Neka je bilo x devojčica. Tada je bilo $2x$ dečaka. Sve pobede u mečevima devojčica protiv devojčice pripadaju devojčicama, a bilo ih je $\frac{x(x-1)}{2}$. Pobede iz mečeva dečak protiv dečaka pripadaju dečacima, a takvim mečeva bilo je ukupno $\frac{2x(2x-1)}{2}$. Devojčicama pripadaju još neke pobede iz mečeva devojčica protiv dečaka. Takvih mečeva je bilo ukupno $x \cdot 2x$, tj. $2x^2$. Ako su od njih devojčice dobile y mečeva, onda su dečaci dobili $(2x^2 - y)$ mečeva. Prema datom uslovu, tada važi proporcija $\left(\frac{x(x-1)}{2} + y\right) : \left(\frac{2x(2x-1)}{2} + 2x^2 - y\right) = 7 : 5.$
Sređivanjem odavde dobijemo da je $17x^2 - 3x = 8y$. Kako je $y \leqslant 2x^2$, sledi da je: $17x^2 - 3x \leqslant 16x^2$, odnosno: $x^2 - 3x \leqslant 0$ ili $x - 3 \leqslant 0$. Konačno je $x \leqslant 3$. Proverom utvrdimo da za $x = 1$ i $x = 2$ vrednost y nije celi broj, a jedino rešenje je $x = 3$. Dakle, bilo ih je: tri devojčice i šest dečaka, ukupno 9 učesnika turnira. Devojčice su od 18 mečeva sa dečacima dobile svih 18. Svaka čast!

III1. Poznata je osobina da se svaki prirodni broj može predstaviti u obliku $n = 3k$ ili $n = 3k \pm 1$. (Broj je deljiv sa 3 ili pri deljenju sa 3 daje ostatke 1 ili 2.) U prvom slučaju je $n^3 = 27k^3$, a u drugom $n^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 9(3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1$. Dakle, kub prirodnog broja pri deljenju sa 9 daje ostatak 0 ili ± 1, tj. $n^3 \equiv 0 \pmod 9$ ili $n^3 \equiv \pm 1 \pmod 9$. Budući da je $2001 = 9 \cdot 222 + 3$, sledi da su sva tri borja a, b, c oblika $3k + 1$. Treba, dakle, odrediti brojeve k_1, k_2, k_3, takve da je $a = 3k_1 + 1$, $b = 3k_2 + 1$, $c = 3k_3 + 1$ i $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$. Pretpostavimo da je $a \leqslant b \leqslant c$, odnosno $k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3$. Zbog $c^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$, sledi da je $k_3 < 4$. Dalje, zbog $7^3 = 343$ i $3 \cdot 343 < 2001$, nije moguće da je $k_3 \leqslant 2$. Sledi: $k_3 = 3$. Tako dobijamo jedino rešenje: $k_3 = 3 = k_2$ i $k_1 = 0$. Traženi brojevi su $a = 1$, $b = c = 10$.

III2. a) Neka je ABC dati trougao i L tačka preseka simetrale pravog ugla $\sphericalangle ACB$ i hipotenuze AB. Tada je $\sphericalangle ACL = \sphericalangle BCL = 45^\circ$. Pretpostavimo da na pravoj CL postoji tačka X, $X \neq C$, takva da je $\sphericalangle XAC = \sphericalangle XBC$. Tada bi trouglovi ACX i BCX imali jednaka po dva unutrašnja ugla, pa bi im bili jednaki međusobno i treći uglovi, tj. $\sphericalangle AXL = \sphericalangle BXL$. Zbog $CX = XC$ trouglovi ACX i BCX bili bi podudarni. Odatle bi sledilo $AC = BC$, što je protivurečno pretpostavci ($AC \neq BC$).

Sledi, da ne postoji tačka X, $X \neq C$, takva da je $\sphericalangle XAC = \sphericalangle XBC$.





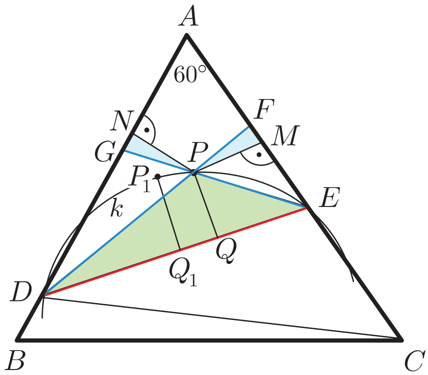
b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji tačka Y, $Y \neq C$, na pravoj CH, takva da je $\sphericalangle YAC = \sphericalangle YBC$. Ako je to tačno, tada su krugovi k_1 i k, opisani oko trouglova ACY i BCY, podudarni (tetiva CY je zajednička, tačke O_1 i O su simetrične u odnosu na CY i $\sphericalangle CO_1Y = \sphericalangle COY = 2\sphericalangle CAY$) i simetrični u odnosu na pravu CH. Tada je presečna tačka A_1 kruga k i hipotenuze AB simetrična sa A u odnosu na H. Zbog $CA \neq CB$ je $A_1 \neq B$. Tada je četvorougao A_1BYC tetivni, pa je $\theta + \varphi = 180°$, gde je $\theta = \sphericalangle BA_1C = 180° - \alpha$ (jer je zbog simetrije $\sphericalangle CA_1H = \sphericalangle CAH$) i $\varphi = \sphericalangle BYH$. Dalje, α je spoljašnji ugao tetivnog četvorougla $BYCA_1$, pa je $\varphi = \alpha$. Međutim, u pravouglom trouglu BCH je $\sphericalangle BCH = 90° - \beta = \alpha$, pa je zbog toga $\sphericalangle CYB = \sphericalangle BCH$. Dakle, u trouglu BCY je spoljašnji ugao $\alpha = \sphericalangle BCH$ jednak unutrašnjem uglu $\sphericalangle BYC$. Međutim, poznato je da važi relacija: $\sphericalangle BCH = \sphericalangle BYC + \sphericalangle CBY$ (spoljašnji ugao i unutrašnji nesusedni). Odavde sledi da mora biti $\sphericalangle CBY = 0$, a to je moguće samo ako je $Y \equiv C$, što je suprotno pretpostavci ($Y \neq C$). Sledi da ne postoji tačka Y, $Y \neq C$, takva da je $\sphericalangle YAC = \sphericalangle YBC$.

III3. Neka je P presečna tačka duži DF i EG. Po konstrukciji P je centar upisanog kruga za trougao ADE, pa su normale PM, PN, PQ na AE, AD, DE redom, jednake među sobom. Budući da je $\sphericalangle A = 60°$, to je $\sphericalangle D + \sphericalangle E = 120°$. Neka je $\sphericalangle D < \sphericalangle E$, a to znači, npr., $\sphericalangle D < 60°$ i $\sphericalangle E > 60°$. (Slučaj $\sphericalangle D = \sphericalangle E = 60°$ je trivijalan.) Tada je $\sphericalangle DPE = 180° - \left(\frac{1}{2}\sphericalangle D + \frac{1}{2}\sphericalangle E\right) = 180° - \frac{1}{2}(\sphericalangle D + \sphericalangle E) = 180° - 60° = 120°$, pa je $\sphericalangle DPG = \sphericalangle EPF = 60°$. U tom slučaju je $\sphericalangle DGP > 90°$, pa je tačka N van trougla DGP, a $\sphericalangle EFP < 90°$, pa je tačka M u trouglu EFP.

Površina trougla DPG je $S_1 = \frac{1}{2}DG \cdot NP$, a površina trougla EFP je $S_2 = \frac{1}{2}EF \cdot MP$. Prema tome $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}DG \cdot NP + \frac{1}{2}EF \cdot MP$. Kako je $NP = MP = PQ$, sledi: $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(DG + EF) \cdot PQ$.

Lako se dokazuje da su pravougli trouglovi DPN i DPQ podudarni, odakle sledi da je $DN = DQ$. Slično se dokaže da je $EF = EQ$. Dokažimo da su podudarni pravougli trouglovi MPF i NPG. Za to je dovoljno dokazati da je $\sphericalangle MFP = \sphericalangle NGP$ (jer je već $MP = NP$).

U trouglu DEG je $\sphericalangle NGP$ spoljašnji, pa je $\sphericalangle NGP = \sphericalangle D + \frac{1}{2}\sphericalangle E$. Posmatrajući slično trougao ADF, imamo jednakost: $\sphericalangle MFP = \sphericalangle A + \frac{1}{2}\sphericalangle D = 60^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle D = \left(\frac{1}{2}\sphericalangle D + \frac{1}{2}\sphericalangle E\right) + \frac{1}{2}\sphericalangle D = \sphericalangle D + \frac{1}{2}\sphericalangle E$. Dakle: $\sphericalangle MFP = \sphericalangle NGP$. Sada su podudarni pravougli trouglovi MPF i NPG, odakle je $MF = NG$. Zbog rasporeda tačaka E, F, M je $EF = EM + MF$, a zbog rasporeda tačaka D, G, N je $DG = DN - GN$. Zbog toga je $DG + EF = DN - GN + EM + MF = DN + EM = DQ + EQ = DE$. Sledi da je $S_1 + S_2 = \frac{1}{2} DE \cdot PQ = S$, gde je S površina trougla DEP.



Površina trougla DEF je $S + S_2$, a površina trougla DEG je $S + S_1$, pa je zbir površina ova dva trougla: $S + S_2 + S + S_1 = 2S + (S_1 + S_2) = 3S$. Treba, dakle, dokazati da je $3S \leqslant P$, gde je P površina trougla ABC.

Trougao DEP ima $\sphericalangle DPE = 120^\circ$. Neka je k krug opisan oko trougla DPE i tačka P_1 središte luka DEP. Tada je i $\sphericalangle DP_1E = 120^\circ$, a normala P_1Q_1 na DE je veća ili jednaka sa PQ. Zbog toga je površina S trougla DEP manja ili jednaka površini trougla DEP_1. Međutim, površina trougla DEP_1 je jednaka trećini površine jednakostraničnog trougla stranice DE, pa je $3S \leqslant P_1$, gde je P_1 površina tog jednakostraničnog trougla.

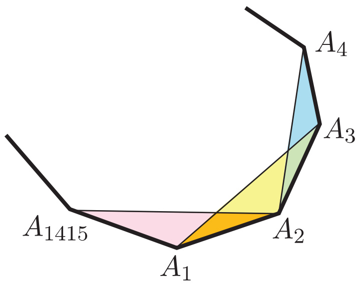
Znači, tvrđenje zadatka će biti dokazano ako utvrdimo da je $DE < BC$. Dokaz neće izgubiti ništa na opštosti ako pretpostavimo da su tačke D i E bliže (ili jednako udaljene) tačkama B i C nego tački A. Tada je $\sphericalangle CED$ tup, pa je $CD > DE$. Takođe je i $\sphericalangle BDC$ tup, pa je $BC > CD$. Sledi da je $BC > DE$, čime je dokaz završen.

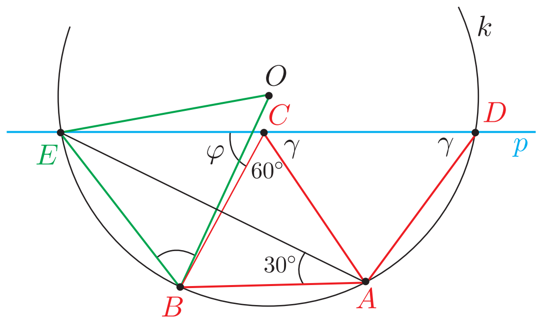
Znak jednakosti važi ako je $BC = DE$, a to će biti kad se tačke D i E poklapaju sa B i C.

III4. Neka je $A_1A_2A_3\ldots A_{1415}$ dati mnogougao. Uočimo 1415 trouglova određenih sa po tri uzastopna temena mnogougla: $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$,..., $A_{1415}A_1A_2$. Pretpostavimo da su površine svih ovih trouglova $\geqslant 1$.

Za bilo koji trougao sa stranicama a i b važi: $2P = ah_a \leqslant ab$, odnosno $a \cdot b \geqslant 2P$, jer je $h_a \leqslant b$. Primenimo ovu nejednakost na svih 1415 trouglova, imajući na umu da su njihove površine $\geqslant 1$: $A_1A_2 \cdot A_2A_3 \geqslant 2$, $A_2A_3 \cdot A_3A_4 \geqslant 2, \ldots, A_{1415}A_1 \cdot$

$A_1A_2 \geqslant 2$. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine je $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, pa je: $A_1A_2 + A_2A_3 \geqslant 2\sqrt{A_1A_2 \cdot A_2A_3} \geqslant 2\sqrt{2}$. Slično je: $A_2A_3 + A_3A_4 \geqslant 2\sqrt{2}, \ldots, A_{1415}A_1 + A_1A_2 \geqslant 2\sqrt{2}$. Sabiranjem svih ovih nejednakosti dobijemo: $2O \geqslant 1415 \cdot 2\sqrt{2}$, gde je O obim datog mnogougla. Odavde je $O \geqslant 1415\sqrt{2}$. Uzimajući približnu vrednost $\sqrt{2} = 1,412$, odavde sledi da je $O \geqslant 2001,093 > 2001$, što je kontradikcija. (Uslov je $O = 2001$.) Dakle, bar jedan od 1415 trouglova ima površinu manju od 1.





IV1. Kvadriranjem prvog uslova dobijamo: $(a + b + c + d)^2 = 400$, odakle je: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 400$, pa primenom drugog uslova dobijamo: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \cdot 150 = 400$, odakle je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$. Transformišimo zbir kvadrata: $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$. Dobićemo: $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 3 \cdot 100 - 2 \cdot 150 = 0$. Dakle, polazni zbir kvadrata jednak je nuli, a to je moguće samo ako su svi sabirci nule. (Znamo da je svaki kvadrat realnog broje $\geqslant 0$.) Odatle sledi: $a = b = c = d$. Kako je $a + b + c + d = 20$, biće $a = b = c = d = 5$.

IV2. Neka je O centar datog kruga i $p = CD$ prava, koja seče k u tački E, kao na slici. Po uslovu je $AD = AB$, pa kako je ABC jednakostranični trougao i $AC = AB$, sledi da je $AD = AC$. Dakle, trougao ACD je jednakokraki, sa jednakim uglovima naspram AD i AC, tj. $\sphericalangle ACD = \gamma = \sphericalangle ADC$. Sa slike je jasno da je $\varphi + \gamma = 120°$, odnosno $\sphericalangle BCE = \varphi = 120° - \gamma$.

Četvorougao $ABED$ je tetivni, pa je $\sphericalangle ABE + \gamma = 180°$. Kako je $\sphericalangle ABC = 60°$, biće $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC + 60°$. Prema tome, biće $\sphericalangle EBC + 60° + \gamma = 180°$, odakle je $\sphericalangle EBC = 120° - \gamma$. Sada vidimo da je $\sphericalangle BCE = 120° - \gamma = \sphericalangle EBC$, pa je i trougao BCE jednakokraki i $CE = BE$. Odranije je $AB = AC$, što znači da je AE simetrala duži BC i simetrala ugla $\sphericalangle BAC = 60°$. ($AE$ je dijagonala deltoida $ABEC$.) Sledi da je $\sphericalangle BAE = 30°$, a to je periferijski ugao nad tetivom BE. Onda je odgovarajući centralni ugao $\sphericalangle BOE = 60°$, pa je trougao BEO jednakostranični sa stranicom $OB = BE = 1$. Kako je $CE = BE$, sledi da je tražena duž $CE = 1$.

IV3. Levu stranu date jednakosti dovedemo na NZS, pa je:

$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = \frac{p(r+1)-4q}{q(r+1)} = 1$. Odavde sledi da je $pr + p - 4q = qr + q$. Ovu jednakost rešićemo po r. Iz $pr - qr = 5q - p$, odnosno iz $r(p-q) = 5q - p$, dobijemo $r = \frac{5q-p}{p-q} = \frac{4q+q-p}{p-q} = \frac{4q-(p-q)}{p-q} = \frac{4q}{p-q} - \frac{p-q}{p-q} = \frac{4q}{p-q} - 1$. Broj r je prost, pa je prirodni i zbog toga mora biti $4q$ deljivo sa $(p-q)$. Sledi da je $p-q=1$, ili $p-q=2$, ili $p-q=4$. (Nije moguće da bude $p-q=q$, jer odatle dobijamo $p=2q$, što bi značilo da p nije prost broj. Iz istih razloga ne može biti $p-q=2q$, ni $p-q=4q$, jer bi onda bilo $p=3q$ ili $p=5q$, što je nemoguće.)

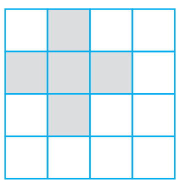
Ispitaćemo tri moguća slučaja.

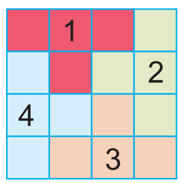
a) Neka je $p-q=1$. Tada je $p=q+1$, što je moguće samo ako je $q=2$ i $p=3$. Tada je $r = \frac{4\cdot 2}{1} - 1 = 7$, pa jedno rešenje je $p=3$, $q=2$, $r=7$.

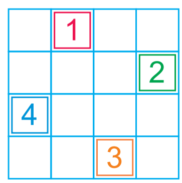
b) Ako je $p-q=2$, onda je $p=q+2$ i $r = \frac{4q}{2} - 1 = 2q-1$. Jedno rešenje dobijamo za $q=3$. Tada je $p=5$ i $r=5$. Ako je $q \neq 3$, onda je $q=3k+1$ ili $q=3k-1$. Za $q=3k+1$ bilo bi $p=q+2=3k+3=3(k+1)$, tj. broj p ne bi bio prost. Za $q=3k-1$ bilo bi $r=2q-1=6k-3=3(2k-1)$, pa q ne bi bio prost broj.

c) Ako je $p-q=4$, onda je $p=q+4$ i $r = \frac{4q}{4} - 1 = q-1$. Iz $r=q-1$ je $r+1=q$, što je moguće samo za $r=2$ i $q=3$. Tada je $p=q+4=7$, pa imamo treće rešenje: $p=7$, $q=3$, $r=2$.

IV4. Očigledno je da jednim potezom možemo promeniti boju za najviše pet polja, kao što se vidi na slici levo.





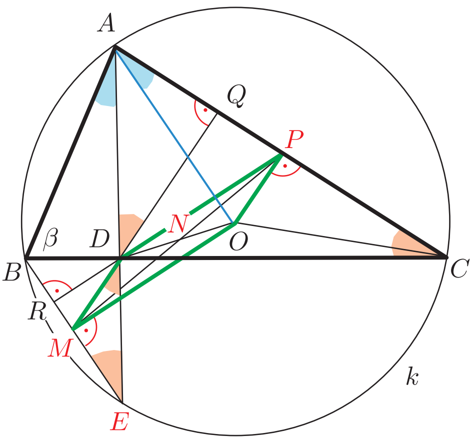


Ako četiri puta primenimo operaciju zamene boje, uzimajući za centralna polja ona koja su na srednjoj slici označena brojevima 1, 2, 3, 4, jasno je da će sva polja promeniti boju iz bele u crnu. (Na slici smo umesto crne boje koristili druge boje, da bi se jasno videlo kako za $n=4$ bela boja nestaje sa svih polja table.) Ako potom opisanu operaciju zamene boja primenimo dva puta uzastopno na isto polje, prvo ćemo dobiti bela polja, a u sledećem potezu vratiti crnu boju. Dakle, za $n = 4, 6, 8, \ldots$, tj. za svako parno n veće od 2, možemo udesiti da sva polja budu crna.

Dokažimo da za neparno n ne možemo dobiti sva crna polja. Uočimo ponovo polja 1, 2, 3, 4, koja smo posebno označili na trećoj slici, Na početku ova četiri polja su bela. Lako se možemo uveriti, ako primenimo operaciju promene boje na bilo koje polje table, tada će samo jedno od ova četiri polja promeniti boju i uvek će jedno od njih da se promeni. U početku imamo 4 označena polja, dakle, paran broj, a svakom primenom pravila promeni se tačno jedno polje. Tako je broj belih polja od ovih četiri, naizmenično paran i neparan. Pritom, neparan broj će, očigledno biti za $n = 1$, $n = 3$, $n = 5$ itd, za neparno n. Otuda sledi da će za neparan broj n uvek biti bar 1 belo polje (ili 3, ili 5...). Dakle, nije moguće neparnim brojem operacija dobiti sva crna polja na tabli.

Rešenje glasi: Možemo udesiti da sva polja budu crna ako pravilo zamene boja primenimo za parno n, koje je veće od 2, tj. za $n \in \{4, 6, 8, \dots\}$.

V1. Ako je $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ celi broj, onda je (a^3b-1) deljivo sa $(a+1)$. Kako je $a^3b-1 = a^3b-b+b-1 = b(a^3+1)-(b+1)$ i (a^3+1) je deljivo sa $(a+1)$, zaključujemo da i $(b+1)$ mora biti deljivo sa $(a+1)$. Slično, ako je $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ celi broj, iz $b^3a+1 = a(b^3-1)+(a+1)$, zaključujemo da mora biti $(a+1)$ deljivo sa $(b-1)$, Kako je $(b+1)$ deljivo sa $(a+1)$, a $(a+1)$ deljivo sa $(b-1)$, mora biti i $(b+1)$ deljivo sa $(b-1)$. Onda je i $(b+1)-(b-1) = 2$ deljivo sa $(b-1)$. To je moguće ako je $b = 2$, ili $b = 3$. Kako je $(b+1)$ deljivo sa $(a+1)$,imamo dva slučaja: 3 je deljivo sa $(a+1)$, pa je $a = 2$, ili 4 je deljivo sa $(a+1)$, pa je $a = 1$ ili $a = 3$. Proverom utvrdimo da su rešenja zadatka $(a,\ b) \in \{(2,\ 2), (1,\ 3), (3,\ 3)\}$.



V2. Prava OP je simetrala tetive AC, pa je $\sphericalangle APO = 90^\circ$. Zatim, $\sphericalangle AOC = 2\beta$ (centralni i periferijski uglovi), pa je $\sphericalangle AOP = \beta$. Sledi da je $\sphericalangle CAO + \beta = 90^\circ$, pa je i $\sphericalangle BAD + \beta = 90^\circ$. Dakle, $\sphericalangle ADB = 90^\circ$.

Dokazaćemo da je četvorougao $DMOP$ paralelogram. Neka je Q presečna tačka prave MD sa stranicom AC i R presečna tačka prave DP sa duži BE. U pravouglom trouglu BDE duž MD je hipotenuzina težišna linija, pa je $MD = MB = ME$. Trougao MDE je jednakokraki, pa je $\sphericalangle MDE = \sphericalangle MED$, a $\sphericalangle MED = \sphericalangle ACB$ (nad tetivom AB). Uočimo i jednake unakrsne uglove: $\sphericalangle MDE = \sphericalangle ADQ$ i $\sphericalangle BDM = \sphericalangle CDQ$. Na slici se jasno vidi da je $\sphericalangle CDQ + \sphericalangle ADQ - 90^\circ$, pa je $\sphericalangle CDQ + \sphericalangle DCQ = 90^\circ$ (jer je $\sphericalangle ADQ = \sphericalangle MDE = \sphericalangle DEB = \sphericalangle ACD$). Onda je trougao CDQ pravougli, $\sphericalangle CQD = 90^\circ$, pa je MQ normalna na AC. Kako je OP normalno na AC, sledi da je MD paralelno sa OP. Slično se dokaže i da je PR normalno na BE. Zbog $PC = PD$ je $\sphericalangle PDC = \sphericalangle PCD = \sphericalangle BED$ i $\sphericalangle BDR = \sphericalangle CDP$, kao unakrsni. Kako je u pravouglom trouglu BDE ugao DBE komplementan sa $\sphericalangle BED$, biće i $\sphericalangle BDR + \sphericalangle DBE = 90^\circ$, pa je $\sphericalangle BRD = 90^\circ$.) Dakle, PR je normalno na BE. Kako je i OM normalno na BE, biće DP paralelno sa OM. Prema tome četvorougao $DMOP$ ima dva para paralelnih stranica, pa je on paralelogram. Zbog toga mu se dijagonale polove i tačka N je zajedničko središte duži DO i MP, što znači da tačka N leži na pravoj MP.

V3. Iz uslova $ab \geqslant 1$ sledi da je $b \geqslant \frac{1}{a}$. Koristeći se poznatom varijantom Košijeve nejednakosti, $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ za pozitivno a, dolazimo do nejednakosti: $a + b \geqslant a + \frac{1}{a} \geqslant 2$. Onda je $a + 2b + \frac{2}{a+1} = b + (a + b) + \frac{2}{a+1} \geqslant b + 2 + \frac{2}{a+1} = \frac{b+1}{2} + \frac{b+1}{2} + 1 + \frac{2}{a+1} \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}}$, gde smo na kraju primetili nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za četiri broja. Slično se dobija da je $b + 2a + \frac{2}{b+1} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{(a+1)^2}{2(b+1)}}$. Sad pomnožimo ove dve nejednakosti: $\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \cdot \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16 \cdot \sqrt[4]{\frac{(a+1)(b+1)}{4}}$ Primenimo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine na binome potkorene veličine: $\frac{(a+1)(b+1)}{4} \geqslant \frac{2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b}}{4} = \sqrt{ab} \geqslant \sqrt{1} = 1$. Sledi traženi zaključak: $\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \cdot \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16$.

V4. a) **Da.** Neka je Ana izabrala brojeve $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Kako se svaki broj 4 puta pojavljuje u zbirovima po dva, Bane može da sabere svih 10 njemu poznatih zbirova i da deleći dobijeni rezultat sa 4 dobije vrednost $a+b+c+d+e$. Ako se zatim, od te vrednosti oduzme najveći $(d+e)$ i najmanji $(a+b)$ od poznatih zbirova po dva broja, dobiće c. Dalje oduzimajući c od drugog po veličini zbira $c+e$, dobiće e, a oduzimajući e od najvećeg zbira $d + e$ dobiće d. Na sličan način Bane može da dobije brojeve a i b.

b) **Da.** Slično kao pod (a), ako je Ana izabrala brojeve $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e \leqslant f$, onda Bane može da sabere svih 15 njemu poznatih zbirova, pa ako rezultat podeli sa 5 dobiće ukupan zbir $a + b + c + d + e + f$ svih 6 brojeva. Ako od tog rezultata oduzme najveći $(e + f)$ i najmanji $(a + b)$ zbir, dobiće koliki je zbir $c + d$. Ako od ukupnog zbira $a + b + c + d + e + f$ oduzme najmanji zbir $a + b$, kao i drugi po veličini zbir $d + f$, dobiće vrednost zbira $c + e$. Slično može da odredi koliki je zbir $b + d$. Na osnovu toga može da nađe zbirove $a + f$ i $b + e$.

Sada Bane zna sledeće zbirove: $a+b$, $a+c$, $a+f$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$, $d+f$, $e+f$. Od preostalih 6 zbirova ($a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+f$, $c+f$ i $d+e$), najmanji su $a+d$, $a+e$ i $b+c$. Ako njih sabere i od rezultata oduzme poznate zbirove $c+d$ i $b+e$ dobiće dvostruku vrednost broja a. Dalje se jednostavno određuju ostali brojevi.

c) **Ne**. Slično kao u primeru u postavci zadatka, možemo izabrati polazne skupove brojeva $\{1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20\}$ i $\{2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19\}$, koji daju iste skupove od 28 zbirova po dva.