XLVIII олимпијада

1. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви. За секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$ нека

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \le j \le i\} - \min\{a_j \mid i \le j \le n\}$$

и нека

$$d = \max\{d_i \mid 1 \le i \le n\}.$$

а) Докажи дека за произволни реални броеви $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ важи

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le i \le n\} \ge \tfrac{d}{2}. \qquad (1)$$

б) Докажи дека постојат реални броеви $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ такви што во (1) важи знак за равенство.

Решение. Од условот на задачата следува дека $d = a_k - a_l$ за некои $k \le l$. Бидејќи

$$(x_l - a_l) - (x_k - a_k) = (a_k - a_l) + (x_l - x_k) \ge a_k - a_l = d \text{ и } d \ge 0$$

следува

$$2\max\{|x_k - a_k|, |x_l - a_l|\} \ge |x_l - a_l| + |x_k - a_k| = |(a_k - x_k) - (a_l - x_l)| \ge d,$$

односно $\max\{|x_k - a_k|, |x_l - a_l|\} \ge \frac{d}{2}$, од каде следува а).

Јасно, низата која го задоволува б) зависи од изразите $M_i = \max\{a_j \mid 1 \le j \le i\}$ и $m_i = \min\{a_j \mid i \le j \le n\}$. Со цел да се минимизира изразот на левата страна во (1), природно е да земеме $x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$, за $i = 1, 2, ..., n$. Оваа низа го задоволува б), бидејќи

1) По конструкција низите $\{m_i\}_{i=1}^n$ и $\{M_i\}_{i=1}^n$ не опаѓаат, па затоа не опаѓа и $\{x_i\}_{i=1}^n$.
2) Ако $d_i = M_i - m_i$, тогаш

$$-\frac{d_i}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \le x_i - a_i \le x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2},$$

т.е. $|x_i - a_i| \le \frac{d_i}{2} \le \frac{d}{2}$, па како важи а) добиваме дека во (1) важи знак за равенство.

Забелешка. Можни се и други конструкции на низа која го задоволува условот б). На пример

$$x_1 = a_1 - \frac{d}{2}, \quad x_i = \max\{x_{i-1}, a_i - \frac{d}{2}\} \text{ за } 2 \le i \le n.$$

Навистина, од самата дефиниција следува дека низата $\{x_i\}_{i=1}^n$ не опаѓа и $x_i - a_i \ge -\frac{d}{2}$ за $1 \le i \le n$. Важи $x_i = x_j = a_j - \frac{d}{2}$ за некој $j \le i$ (всушност j е најмалиот индекс за кој важи $x_i = x_j$, па како

$$a_j - a_i \le \max\{a_k \mid 1 \le k \le i\} - \min\{a_k \mid 1 \le k \le i\} = d_k \le d$$

следува дека

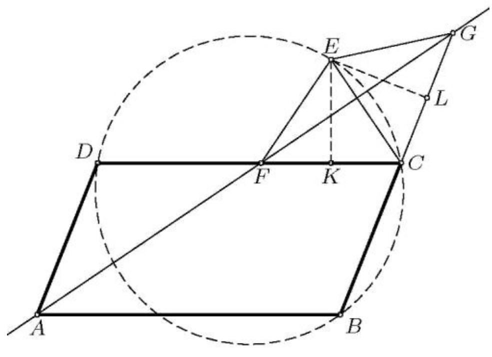
$$x_i - a_i \le a_j - \tfrac{d}{2} - a_i = a_j - a_i - \tfrac{d}{2} \le d - \tfrac{d}{2} = \tfrac{d}{2},$$

т.е. $-\frac{d}{2} \le x_i - a_i \le \frac{d}{2}$ за $1 \le i \le n$, па затоа $\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le i \le n\} \le \frac{d}{2}$. Сега, ако се има предвид решението под а) добиваме дека во (1) важи знак за равенство.

2. Нека точките A, B, C, D и E се такви што $ABCD$ е паралелограм, а $BCED$ е тетивен четириаголник. Правата l која минува низ точката A ја сече отсечката DC во нејзина внатрешна точка F и ја сече правата BC во точка G. Ако $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{EC}$, докажи дека l е симетрала на $\measuredangle DAB$.

Решение. *Прв начин.* Нека K и L се подножјата на нормалите повлечени од точката E на DC и BC, соодветно. Триаголниците EFC и ECG се рамнокраки, K и L се средини на отсечките FC и CG, соодветно, и $\triangle KCL \sim \triangle FCG$. Да означиме $\measuredangle BAF = \alpha$ и $\measuredangle DAF = \beta$. Од тетивниот четириаголник $EKCL$ и теоремата за агли со паралелни краци следува дека

$$\measuredangle LEC = \measuredangle LKC = \measuredangle GFC = \alpha \text{ и } \measuredangle CEK = \measuredangle CLK = \measuredangle CGF = \beta.$$



Во правоаголните триаголници EKC и CLE важи

$$\overline{CK} = \overline{CE}\sin\beta,\ \overline{EK} = \overline{CE}\cos\beta,$$
$$\overline{CL} = \overline{CE}\sin\alpha,\ \overline{EL} = \overline{CE}\cos\alpha.$$

Имаме, $\triangle DAF \sim \triangle CGF$, па затоа $\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{CG}} = r$. Тогаш

$$\overline{DF} = r\overline{FC} = 2r\overline{CK} \text{ и}$$
$$\overline{BC} = \overline{DA} = r\overline{CG} = 2r\overline{CL},$$

па затоа

$$\overline{BL} = \overline{BC} + \overline{CL} = (2r+1)\overline{CL} = (2r+1)\overline{CE}\sin\alpha$$

и

$$\overline{DK} = \overline{DF} + \overline{FK} = (2r+1)\overline{CK} = (2r+1)\overline{CE}\sin\beta.$$

Бидејќи четириаголникот $DBCE$ е тетивен, важи

$$\measuredangle EDK = \measuredangle EDC = \measuredangle EBC = \measuredangle EBL,$$

па важи $\operatorname{tg}\measuredangle EDK = \operatorname{tg}\measuredangle EBL$. Но, од правоаголниот триаголник EDK следува

$$\operatorname{tg}\measuredangle EDK = \frac{\overline{EK}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{CE}\cos\beta}{(2r+1)\overline{CE}\sin\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{2r+1},$$

а од правоаголниот триаголник BLE следува

$$\text{tg}\measuredangle EBL = \frac{\overline{EL}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{CE}\cos\alpha}{(2r+1)\overline{CE}\sin\alpha} = \frac{\text{ctg}\,\alpha}{2r+1},$$

па затоа мора да важи $\text{ctg}\,\beta = \text{ctg}\,\alpha$ и оттука $\beta = \alpha$, т.е. l е симетрала на $\measuredangle DAB$.

Втор начин. Нека се ознаките исти како и во првиот начин и нека O е пресекот на дијагоналите на паралелограмот $ABCD$. Точката E припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle BCD$, па затоа нормалите од E на страните на овој триаголник припаѓаат на една права (Симпсоновата права). Бидејќи Kl е средна линија на $\triangle CGF$ и бидејќи точките A, F и G лежат на една права, правата KL минува низ средината на AC, т.е. низ O. Според тоа, нормалната проекција од E на BD е точката O, па затоа важи $\measuredangle DBE = \measuredangle EDB$.
Меѓутоа, како во првиот нмачин на решавање добиваме

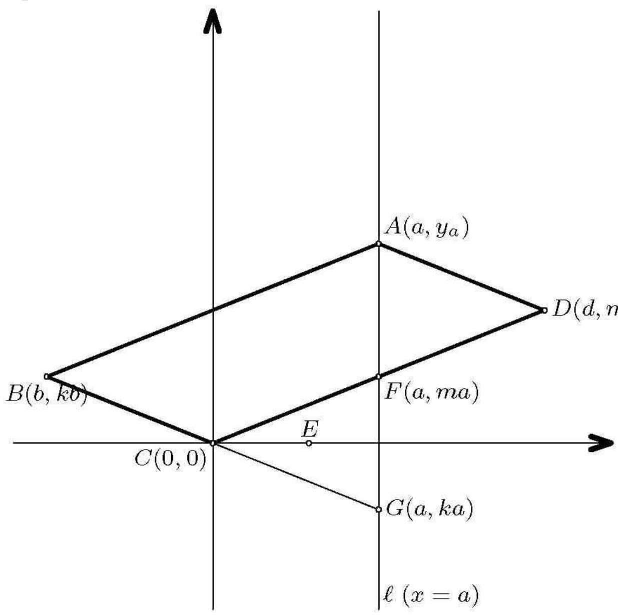
$$\measuredangle FAD = \measuredangle CGF = \measuredangle CLK = \measuredangle CEK = 90^\circ - \measuredangle ECK = 90^\circ - \measuredangle ECD = 90^\circ - \measuredangle EBD$$

и

$$\measuredangle BAF = \measuredangle CFG = \measuredangle CKL = \measuredangle CEL = 90^\circ - \measuredangle LCE = 90^\circ - \measuredangle EDB,$$

т.е. $\measuredangle DAF = \measuredangle BAF$, што и требаше да докажеме.

Трет начин. Нека конфигурацијата е сместена во координатна рамнина, така што точката C е координатниот почеток, а правата l е паралелна со $y-$ оската, види цртеж.



Нека $B(b,kb), D(d,md)$ и $A(a,y_a)$. Според тоа, $F(a,ma)$ и $G(a,ka)$. Од $\overline{EF} = \overline{EG}$ следува $E(x_e, \frac{k+m}{2}a)$, а од $\overline{EF} = \overline{EC}$ следува

$$x_e^2 + (\tfrac{k+m}{2}a)^2 = (x_e - a)^2 + (ma - \tfrac{k+m}{2}a)^2,$$

од каде наоѓаме $x_e=\frac{1-km}{2}$.

Четириаголникот $BCED$ е тетивен, па затоа $\measuredangle CBE=\measuredangle CDE$. Нека k_{XY} е коефициент на правецот на правата XY. Бидејќи

$$\operatorname{tg}\measuredangle CBE=\frac{k_{BE}-k_{BC}}{1+k_{BE}k_{BC}}=\frac{\frac{\frac{k+m}{2}a-kb}{\frac{1-km}{2}a-b}-k}{1+k\cdot\frac{\frac{k+m}{2}a-kb}{\frac{1-km}{2}a-b}}=\frac{\frac{k+m}{2}a-kb-k(\frac{1-km}{2}a-b)}{\frac{1-km}{2}a-b+k(\frac{k+m}{2}a-kb)}=\frac{\frac{am}{2}(1+k^2)}{(\frac{a}{2}-b)(1+k^2)}=\frac{am}{a-2b}$$

и аналогно $\operatorname{tg}\measuredangle CDE=-\frac{ak}{a-2b}$ ($ABCD$ е паралелограм, па затоа $a-b=d$), следува $k=-m$. Тоа значи дека $\triangle CFG$ е рамнокрак, од каде како и во првиот начин на решавање следува тврдењето на задачата.

Четврт начин. Нека дадената конфигурација е сместена во комплексна рамнина со центар во E и радиус EC на единичната кружница и нека на точките означени со некои големи букви на латиницата соодветствуваат афикси означени со истите мали букви. Според условот на задачата важи $e=0$ и $|c|=|f|=|g|=1$. Како и при првиот начин на решавање имаме $\measuredangle CFG=\measuredangle BAF$ и $\measuredangle CGF=\measuredangle FAD$, па затоа доволно е да се докаже дека $\triangle CGF$ е рамнокрак, т.е. дека

$$\begin{aligned}\overline{CE}=\overline{CF}\quad&\Leftrightarrow\quad |c-g|=|c-f|\quad\Leftrightarrow\quad (c-g)(\overline{c}-\overline{g})=(c-f)(\overline{c}-\overline{f})\\&\Leftrightarrow\quad \overline{c}(g-f)=c(\overline{f}-\overline{g})=-c\,\frac{g-f}{fg}\\&\Leftrightarrow\quad c^2=fg,\end{aligned}$$

(c,f,g се различни броеви од единичната кружница). Ќе ја користиме следнава лема (види во [18]).

Лема. Ако точката $Z\neq X,Y$ припаѓа на правата определена со точките X и Y ($X\neq Y$) од единичната кружница, тогаш $x+y=z+xy\overline{z}$. □

Од лемата, применета на $D\in FC, B\in GC$ и $A\in FG$ следува

$$c+f=d+cf\overline{d}\ , \tag{1}$$

$$c+g=b+cg\overline{b}\ , \tag{2}$$

$$f+g=a+fg\overline{a}\ . \tag{3}$$

Од (1) следува $\overline{d-c}=\overline{f(1-c\overline{d})}=\overline{f}(1-\overline{c}d)=-\frac{1}{cf}(d-c)$ и аналогно од (2) следува $\overline{b-c}=-\frac{1}{cg}(b-c)$. Четириаголникот $BCED$ е тетивен, па затоа $\measuredangle BED=\measuredangle BCD$, односно $\frac{\frac{0-b}{0-\overline{b}}}{\frac{0-d}{0-\overline{d}}}=\frac{\frac{c-b}{\overline{c-b}}}{\frac{c-d}{\overline{c-d}}}=\frac{-cg}{-cf}$, односно

$$\frac{b}{\overline{b}}=\frac{d}{\overline{d}}\cdot\frac{g}{f}\ . \tag{4}$$

Од (1), (2) и (4) следува $\frac{c+f-d}{c}=d\overline{f}=\frac{gd\overline{b}}{b}$, т.е. $b(c+f)=d(b+cg\overline{b})$, па затоа $\frac{b}{d}=\frac{c+g}{c+f}$, од каде наоѓаме $\frac{\overline{b}}{\overline{d}}=\frac{\overline{c+g}}{\overline{c+f}}=\frac{f}{g}\cdot\frac{c+g}{c+f}$, т.е.

$$cf\overline{d}-fg\overline{b}=cg\overline{b}-fg\overline{d}\,. \tag{5}$$

Ако ги собереме (1) и (2) и ја одземеме (3), користејќи $a=b+d-c$ (четириаголникот $ABCD$ е паралелограм), добиваме

$$2c=b+d-(b+d-c)+cf\overline{d}+cg\overline{b}-fg\overline{(b+d-c)},$$

па ако се искористи и (5) добиваме

$$c-fg\overline{c}=cf\overline{d}-fg\overline{b}+cg\overline{b}-fg\overline{d}=2(cf\overline{d}-fg\overline{b})$$

$$=2\overline{b}\cdot cf\,\frac{\overline{d}}{\overline{b}-fg}=2\overline{b}(cf\cdot\frac{g}{f}\cdot\frac{c+f}{c+g}-fg)=\frac{2g\overline{b}}{c+g}(c^2-fg),$$

од каде следува $(\frac{2cg\overline{b}}{c+g}-1)(c^2-fg)=0$, па за да се докаже тврдењето на задачата доволно е уште да се докаже дека првиот множител на левата страна во последното равенство е различен од нула. Меѓутоа, ако $\frac{2cg\overline{b}}{c+g}-1=0$, тогаш од (2) следува $c+g=2cg\overline{b}=2(c+g-b)$, т.е. $b=\frac{c+g}{2}$, што не е можно.

3. На математички натпревар некои ученици се пријатели; ако *A* е пријател со *B*, тогаш и *B* е пријател со *A*. Група ученици се нарекува дружина ако секои два ученика во таа групи се пријатели. (Специјално, секоја група со помалку од два ученика е дружина.) Бројот на учениците во една дружина се нарекува големина на дружината.

На овој натпревар максималната големина на дружина е парен број. Докажи дека учениците може да се распоредат во две соби, така што максималната големина на дружине во едната соба е еднаква на максималната големина на дружина во другата соба.

Решение. На почетокот да ги сместиме сите ученици на една дружина со максимална големина $2n$ во соба *X*. Овие ученици да ги наречеме *П*–ученици. Останатите ученици ги сместуваме во соба *Y*. Нека се $d(X)$ и $d(Y)$ максималните големини на дружините во собите *X* и *Y* во дадениот момент, соодветно. Со префрлање на еден ученик од собата *X* во собата *Y* големината $d(X)$ се намалува за 1, а $d(Y)$ не се не менува или се зголемува за 1, па затоа разликата $d(X)-d(Y)$ се намалува за 1 или 2. Со повторување на оваа постапка можеме да постигнеме оваа разлика да биде 0 (со што тврдењето на задачата е докажано) или -1 (т.е. $d(Y)=d(X)+1$).

Во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека $d(X)=l$ и $d(Y)=l+1$. Ги разликуваме следниве случаи:

1) Ако во собата *Y* постои *П*–ученик кој не припаѓа на некоја од дружините во *Y* со големина $l+1$, тогаш по неговото префрлање во собата X останува $d(Y)=l+1$, а $d(X)$ се зголемува за 1, со што се постигнува $d(X)=d(Y)$.
2) Нека претпоставиме дека секој од $2n-l$ *П*–ученици во *Y* припаѓа на сите дружини во *Y* со големина $l+1$. Тогаш произволна дружина со големина $l+1$ во собата *Y* содржи $2n-l$ *П*–ученици и $0\le l+1-(2n-l)=2(n-l)+1$ ученици кои не се *П*–ученици (да ги наречеме не-*П*–ученици). Бидејќи $2(n-l)+1\neq 0$, во секоја дружина со големина $l+1$ во *Y* постои не-*П*–ученик.

   Сега да избереме некоја дружина во *Y* со големина $l+1$ и да префрлиме еден не-*П*–ученик од неа во *X*. Оваа постапка ја повторуваме се додека постојат дружини со големина $l+1$ во *Y* (нив ги има конечно многу). Бидејќи $d(Y)$ при секој ваков потез не се менува или се намалува за 1, во еден момент ќе важи $d(Y)=l$. Доволно е да докажеме дека по оваа постапка останува $d(X)=l$.

   Навистина, ако претпоставиме дека во *X* се формирала дружина со големина $l+1$, тогаш сите ученици на таа дружине ги познаваат сите $2n-l$ *П*–ученици во Y (бидејќи сите се или *П*–ученици, или се префрлени од *Y* каде биле во дружина со овие $2n-l$ ученици), па нивната унија со овие $2n-l$ ученици формира дружина со големина $(l+1)+(2n-l)=2n+1>2n$, што не е можно.

Конечно, од претходните разгледувања следува точноста на тврдењето на задачата.

4. Симетралата на $\measuredangle BCA$ на $\triangle ABC$ ја сече по вторпат опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката R, а симетралите на страните BC и AC ги сече во точките P и Q, соодветно. Нека K и L се средините на страните BC и AC, соодветно. Докажи дека плоштините на триаголниците RPK и RQL се еднакви.

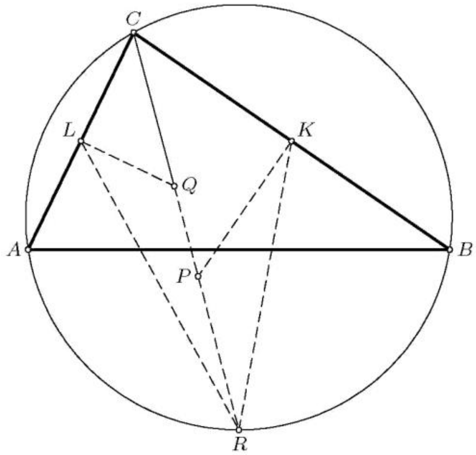
Решение. *Прв начин*. Нека α,β,γ се соодветните агли на $\triangle ABC$, a,b,c се соодветните страни и r е радиусот на опишаната кружница. Од $\measuredangle QCL=\frac{\gamma}{2}$ следува

$$\measuredangle RQL=90^\circ+\tfrac{\gamma}{2},\quad \overline{LQ}=\overline{CL}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}=r\sin\beta\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2} \text{ и } \overline{CQ}=\frac{\overline{CL}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Бидејќи

$$\measuredangle CAR=\measuredangle CAB+\measuredangle BAR=\measuredangle CAB+\measuredangle BCA=\alpha+\tfrac{\gamma}{2},$$

следува



$$\overline{QR}=\overline{CR}-\overline{CQ}$$
$$=2r\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})-\frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{r}{\cos\frac{\gamma}{2}}(2\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})\cos\tfrac{\gamma}{2}-\sin\beta)$$
$$=\frac{r}{\cos\frac{\gamma}{2}}(\sin(\alpha+\gamma)+\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$=\frac{r\sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

па затоа

$$P_{\triangle RQL}=\frac{\overline{LQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin\measuredangle RQL}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{r\sin\beta\cdot\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot r\sin\alpha\cdot\sin(90^\circ+\frac{\gamma}{2})}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{r^2\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{2}\sin\alpha\sin\beta$$

.

Заради симетрија, со замена на елементите кои соодветствуваат на темињата A и B се добива $P_{\triangle RKP}=\frac{r^2\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{2}\sin\alpha\sin\beta$, од каде следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Правите KP и QL се сечат во центарот O на опишаната кружница на $\triangle ABC$. Тогаш $\overline{OP}=\overline{OQ}$. Навистина, ако $\overline{AB}=\overline{AC}$, тогаш $O\equiv P \equiv Q$. Ако, на пример, $\overline{AB}>\overline{AC}$, тогаш

$$\measuredangle OQP=\measuredangle CQL=90^\circ-\tfrac{\gamma}{2}=\measuredangle CPK=\measuredangle QPO,$$

па затоа $\overline{OP}=\overline{OQ}$. Исто така $\measuredangle RQL=\measuredangle RPK=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$, па затоа

$$P_{\triangle RQL}=\tfrac{1}{2}\overline{RQ}\cdot\overline{QL}\sin(90^\circ+\tfrac{\gamma}{2})=\tfrac{1}{2}\overline{RQ}\cdot\overline{QC}\sin\tfrac{\gamma}{2}\sin(90^\circ+\tfrac{\gamma}{2}).$$

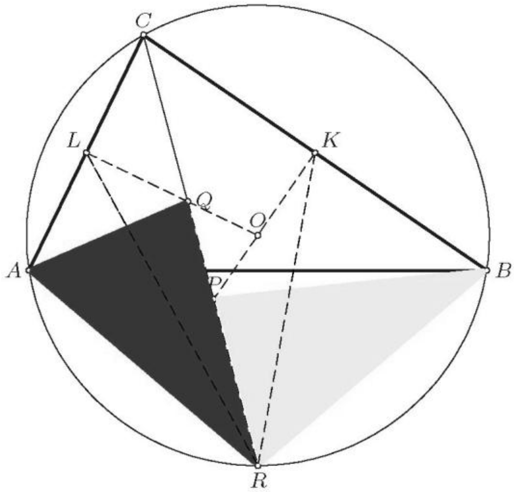
Аналогно, $P_{\triangle RPK}=\frac{1}{2}\overline{RP}\cdot\overline{PC}\sin\frac{\gamma}{2}\sin(90^\circ+\frac{\gamma}{2})$, па останува да докажеме дека $\overline{RQ}\cdot\overline{QC}=\overline{RP}\cdot\overline{PC}$, т.е. дека степените на точките P и Q во однос на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ се еднакви. Имаме,

$$\overline{RQ}\cdot\overline{QC}=r^2-\overline{OQ}^2=r^2-\overline{OP}^2=\overline{RP}\cdot\overline{PC}.$$

Трет начин. Нека ознаките се како во вториот начин на решавање. Ако $\overline{AB}=\overline{AC}$, тогаш $O\equiv P\equiv Q$, а ако на пример $\overline{AB}>\overline{AC}$, тогаш како и во вториот начин добиваме $\overline{OP}=\overline{OQ}$, т.е. $\triangle OPQ$ е рамнокрак

Триаголниците RQL и RQA имаат заедничка страна, а според Талесовата теорема висините спуштени на таа страна се однесуваат како $\frac{\overline{CL}}{\overline{CA}}=\frac{1}{2}$, па затоа

$$P_{\triangle RQA}=2P_{\triangle RQL}.$$



Аналогно се добива

$$P_{\triangle RBP}=2P_{\triangle RKP},$$

па затоа е доволно да докажеме дека

$$P_{\triangle RQA}=P_{\triangle RBP}.$$

Последното равенство е точно, бидејќи со ротација ρ околу точката O за агол γ триаголникот RQA се пресликува во триаголникот RBP ($\overline{OA}=\overline{OR}$, $\measuredangle ROA=2\measuredangle RCA=\gamma$ и $\measuredangle ROB=2\measuredangle RCB=\gamma$, па затоа $\rho(A)=R$ и $\rho(R)=B$, во $\triangle OPQ$ имаме $\overline{OP}=\overline{OQ}$ и $\measuredangle POQ=180^\circ-2(90^\circ-\frac{\gamma}{2})=\gamma$, па е $\rho(Q)=P$).

5. Нека a и b се природни броеви. Докажи, дека ако $4ab-1$ е делител на $(4a^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

Решение. Ќе го докажеме следново поопшто тврдење:

Нека $k>1$ е природен број. Ако ако $kab-1$ е делител на $(ka^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

За паротприродни броеви (a,b) ќе велиме дека е *добар* ако $kab-1\,|\,(ka^2-1)^2$. Од

$$(ka^2-1)^2\equiv(ka^2-kab)^2=k^2a^2(a-b)^2\ (\mathrm{mod}\,kab-1)\ \text{ и }\ \mathrm{NZD}(k^2a^2,kab-1)=1$$

следува дека $kab-1\,|\,(ka^2-1)^2$ ако и само ако $kab-1\,|\,(a-b)^2$. Според тоа, парот (a,b) е добар ако и само ако парот (b,a) е добар. Последното значи, дека ако $a\neq b$, тогаш можеме да претпосатвиме дека $b>a$.

Нека a е најмалиот природен број за кој постои $b>a, b\in\mathbb{N}$ таков што парот (a,b) е добар. Тогаш

$$\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}\equiv-\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}(kab-1)=-(ka^2-1)^2\equiv-1\,(\mathrm{mod}\,ka),$$

па затоа постои $c\in\mathbb{N}$ таков што

$$(ka^2-1)^2=(kab-1)(kac-1),$$

што значи дека парот (a,c) е добар. Меѓутоа,

$$kac-1=\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}<ka^2-1,$$

па затоа $a>c$, што противречи на изборот на парот (a,b). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

6. Нека n е природен број и нека

$$S=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\{0,1,...,n\},\ x+y+z>1\}$$

е множество точки кое се состои од $(n+1)^3-1$ точка на тридимензионалниот простор. Определи го најмалиот можен број рамнини чија унија ги содржи сите точки на множеството S, но не ја содржи точката $(0,0,0)$.

Решение. *Прв начин.* Унијата на $3n$ рамнини $x=i,\ y=i,\ z=i$ за $1\le i\le n$ го содржи множеството S и не ја содржи точката $(0,0,0)$. Нека претпоставиме дека постои фамилија $\{a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0\,|\,1\le i\le N\}$ од $N<3n$ рамнини кои го содржат S и не ја содржат $(0,0,0)$. Го разгледуваме полиномот

$$P(x,y,z)=\prod_{i=1}^{N}(a_ix+b_iy+c_iz+d_i).$$

Лема 1. Постојат броеви δ_i, $i=1,2,...,n$ такви што

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=-1 \text{ и } \sum_{i=1}^{n}\delta_i i^m=0,\text{ за } 0<m<n.$$

Доказ. Горниот систем е систем од n линеарни равенки со n непознати. Детерминантата на системот е Вандермондовата детерминанта(за броевите $1,2,...,n$) која е различна од нула, од каде следува тврдењето на лемата. ■

Од лема 1 (ако се усвои $0^0=1$) следува дека постојат $\delta_0=1,\delta_i$, $i=1,2,...,n$ такви што

$$\sum_{i=0}^{n}\delta_i i^m=0 \text{ за } 0\le m<n.$$

Нека $\deg P=N<3n$ и

$$S_1=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\delta_i\delta_j\delta_k P(i,j,k).$$

Бидејќи во претходната сума $\delta_0^3P(0,0,0)$ е единствен член различен од 0, следува дека $S_1=P(0,0,0)\neq 0$. Од друга страна, ако

$$P(x,y,z)=\sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N}p_{\alpha,\beta,\gamma}x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma},$$

следува

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\delta_i\delta_j\delta_k \sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N} p_{\alpha,\beta,\gamma} i^{\alpha} j^{\beta} k^{\gamma} \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N} p_{\alpha,\beta,\gamma} (\sum_{i=0}^{n}\delta_i i^{\alpha})(\sum_{j=0}^{n}\delta_j j^{\beta})(\sum_{k=0}^{n}\delta_k k^{\gamma}) \end{aligned} \qquad (1)$$

Да го разгледаме собирокот кој соодветствува на тројката (α,β,γ) во (1). Бидејќи $\alpha+\beta+\gamma \le N < 3n$, барем еден од α,β,γ мора да е помал од n. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е α и тогаш важи $\sum_{i=}^{n}\delta_i i^{\alpha} = 0$. Според тоа, секој собирок во (1) е 0, па затоа $S_1 = 0$, што е противречност

Од добиената противречност следува дека се потребни најмалку $3n$ рамнини, што значи дека врз основа на горниот пример, бараниот број рамнини е $3n$.

Забелешка. Без користење на Вандермондовата детерминанта може да се докаже дека броевите $\delta_0 = 1, \delta_i = (-1)^i \binom{n}{i}, i = 1,2,...,n$ ги задоволуваат условите потребни во горното решение. Тоа следува од следната лема.

Лема 2. За секои природни броеви $0 \le m < n$ и произволен полином P, $\deg P = m$ важи

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} P(i) = 0 .$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ полиномот P е константа, па затоа го задоволува даденото равенство, бидејќи важи $P(0) - P(1) = 0$.

Нека тврдењето е точно за $n-1$ и нека $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Јасно Q е полином и важи $\deg Q = \deg P - 1 = m - 1 < n - 1$, па затоа важи

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}Q(i) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(P(i)-P(i+1)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i) - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}P(i) \\ &= P(0) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i})P(i) + (-1)^n P(n) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}P(i), \end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи и за n. ■

Втор начин. Нека важи се исто како во првиот пасус на првиот начин на решавање.

Лема 3. Нека $P^*(x_1,x_2,...,x_k)$ е полином кој се анулира во сите точки на множеството

$$\{(x_1,x_2,...,x_k)\,|\,x_1,x_2,...,x_k\in\{0,1,...,n\},\ x_1+x_2+...+x_k>0\}$$

и $P^*(0,0,...,0)\neq 0$. Тогаш $\deg P^*\geq kn$.

Доказ. Со индукција по k. За $k=1$, P^* е ненулти полином со n нули, па затоа $\deg P^*\geq n$. Нека тврдењето важи за полином со $k-1$ променлива.

Нека $R(x_1,x_2,...,x_k)$ е остатокот од делењето на полиномот $P^*(x_1,x_2,...,x_k)$ со $Q(x_k)=x_k(x_k-1)...(x_k-n)$. Бидејќи $0,1,2,...,n$ се нули на полиномот Q, добиваме дека P^* и R примаат исти вредности на множеството $\{0,1,...,n\}^k$, па затоа за полиномот R се исполнети условите на лема 2 и $\deg_{x_k} R\leq n$. Нека

$$R(x_1,...,x_k)=R_n(x_1,...,x_{k-1})x_k^n+R_{n-1}(x_1,...,x_{k-1})x_k^{n-1}+...+R_0(x_1,...,x_{k-1}).$$

1) Нека $a_1,a_2,...,a_{k-1}\in\{0,1,...,n\}$ не се сите еднакви на нула. Степенот на полиномот $T(x_k)=R(a_1,a_2,...,a_{k-1},x_k)$ е помал или еднаков на n и тој се анулира за $x_k\in\{0,1,...,n\}$, па затоа мора да е $T\equiv 0$, од каде што следува $R_n(a_1,...,a_{k-1})=0$.
2) Слично, $T(x_k)=R(0,0,...,0,x_k)$ е полином со степен помал или еднаков на n, има n нули $1,2,...,n$ и важи $T(0)=R(0,0,...,0)\neq 0$, па затоа $\deg T=n$, од каде што следува дека $R_n\not\equiv 0$, како и дека $R_n(0,0,...,0)\neq 0$.

Од претходно изнесеното следува дека полиномот $R_n(x_1,...,x_{k-1})$ ја задоволува индуктивната претпоставка, па затоа

$$\deg P^*\geq \deg R\geq \deg R_n+n\geq (k-1)n+n=kn.\ \blacksquare$$

Сега тврдењето на задачата следува од лема 3 применета на полиномот P, бидејќи $P(0,0,0)\neq 0$ и $P(i,j,k)=0$ за $(i,j,k)\in S$, па е $\deg P\geq 3n$.