Друштво математичара Србије

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА

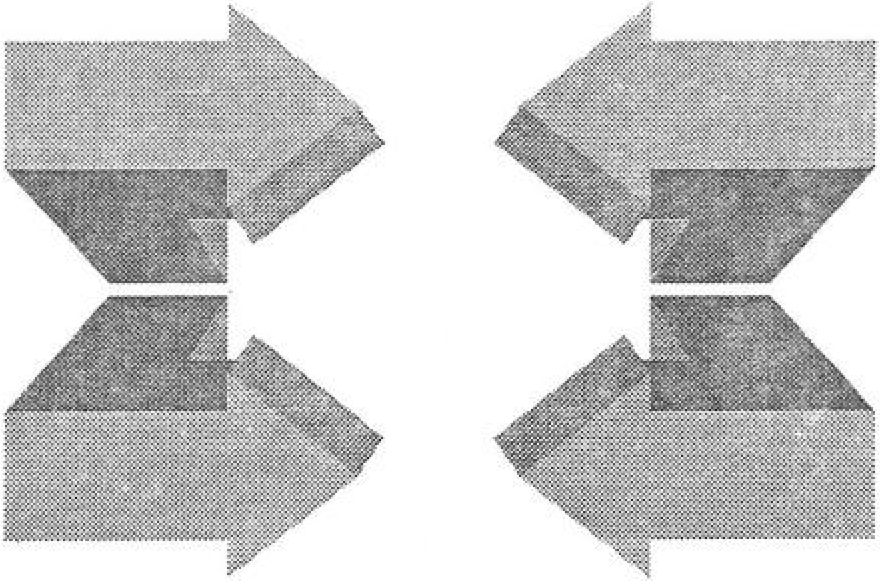
1994/95

Београд 1995

Друштво математичара Србије

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА

1994/95



Београд 1995

Републичка комисија за такмичење из математике за ученике средњих школа шк. 1994/95

1. Арсеновић др Милош, Математички факултет Београд
2. Ацкета др Драган, Природноматематички факултет у Новом Саду
3. Блажић др Новица, Математички факултет Београд
4. Вукмировић мр Јован, Математички факултет Београд
5. Дорословачки др Раде, Факултет техничких наука у Новом Саду
6. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет Београд - **председник**
7. Ивановић Предраг, професор гимназије у Јагодини
8. Јандрљић Жељко, професор
9. Јанковић др Владимир, Математички факултет у Београду
10. Младеновић др Павле, Математички факултет у Београду
11. Огњановић Срђан, професор Математичке гимназије у Београду
12. Петровић др Војислав, Природно-математички факултет у Новом Саду
13. Тановић др Предраг, Математички институт Београд
14. Тодоровић Раде, Математички факултет Београд
15. Тошић др Ратко, Природно-математички факултет у Новом Саду
16. Томић Иванка, професор гимназије у Ваљеву
17. Црвенковић др Синиша, Природно-математички факултет у Новом Саду

Општинско такмичење 04.02.1995.

Први разред

1.1. Одредити најмањи шестоцифрен број чије су цифре различите и који је дељив са 11.

1.2. Одредити најмањи природан број који при деоби са 4, 6, 8, 10, 12 даје редом остатке 2, 4, 6, 8, 10.

1.3. Ако је $a^2 + a + 1 = 0$, колико је $a^{1995} + \frac{1}{a^{1995}}$?

1.4. Свако поље квадратне табле 3x3 треба обојити једном од 9 боја и при том употребити свих 9 боја. Колико различито обојених табли можемо направити? (Две табле су различито обојене ако се кретањем у равни не могу довести до поклапања).

1.5. Разговарају два лица. Лице A каже:"Ако победимо у фудбалу, победићемо и у кошарци." Лице B каже:" Ако не победимо у кошарци, победићемо у фудбалу." Лице C на то рече: " Бар један од лица A и B не лаже." Да ли лице C говори истину?

Други разред

2.1. Нека су a, b и c реални бројеви такви да је $a \geq 1$, $b \geq 1$ и $c \geq 1$. Доказати да је

$$\frac{(ab+c)^3 - c}{(b+c)^3 - c} \leq a^3.$$

2.2. Доказати да је $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$ рационалан број.

2.3. Наћи најмању вредност $|z|$ ако је $|z + 4 - 3i| = 1$.

2.4. У равни квадрата $ABCD$ дата је тачка O. Доказати да су тачке симетричне тачки O у односу на средишта страница датог квадрата такође темена квадрата.

2.5. Дат је оштроугли троугао чији су углови једнаки α, β и γ, а површина му је једнака S. Израчунати површину троугла чија су темена подножја висина датог троугла.

Трећи и четврти разред

3-4.1. Одредити прост број p за који је број $8p^2 + 1$ такође прост.

3-4.2. Одредити коефицијент уз x^{15} у полиному $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^3$.

3-4.3. Решити једначину $\sin 2x + \mathrm{tg}x = 2$.

3-4.4. Нека три круга k_1, k_2 и k_3 имају једнаке полупречнике, центре у тачкама O_1, O_2 и O_3 (редом) и нека сва три пролазе кроз тачку S. Даље, нека су S_1, S_2 и S_3 пресечне тачке кругова k_2 и k_3, k_3 и k_1 односно k_1 и k_2 различите од S. Доказати да праве O_1S_1, O_2S_2 и O_3S_3 пролазе кроз једну тачку.

3-4.5. Нека је S средиште висине DD' правилног тетраедра $ABCD$. Доказати да је угао ASB прав.

Окружно такмичење 26.02.1995.

Први разред

1.1. Доказати да број који се у декадном запису пише коришћењем једино цифара 2 и 6, није разлика квадрата два цела броја.

2.2. Дат је бесконачан скуп S парова природних бројева. Доказати да у том скупу постоје парови (a, b) и (x, y) такви да је $a \leq x$ и $b \leq y$.

1.3. Како треба изабрати предзнаке + или− испред бројева па да вредност израза $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 1995$ буде што ближа нули?

1.4. Ако свака дијагонала четвороугла $ABCD$ полови његову површину, доказати да је $ABCD$ паралелограм.

1.5. Над страницама троугла ABC на спољну страну конструисани су једнакостранични троуглови ADB, BEC и CFA. Доказати да су дужи AE, BF и CD подударне и да се секу у једној тачки.

Други разред

2.1. Доказати да постоји природан број чије су декадне цифре једино 1 и 0 дељив са 1995.

2.2. Наћи целобројна решења једначине $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

2.3. Нека су корени једначине $x^2 + ax + b + 1 = 0$, (a, b су цели бројеви) цели бројеви. Доказати да је $a^2 + b^2$ сложен број.

2.4. Решити једначину $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$.

2.5. Доказати да се три праве од којих свака пролази кроз једно теме троугла и тачку наспрамне странице која у односу на то теме полови обим троугла, секу у једној тачки.

Трећи разред

3.1. Написати број 1995 као збир максимално много сложених бројева.

3.2. Одредити минимум израза $|x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n|$, ако $x_1, x_2, \ldots x_n \in \{-1, 1\}$.

3.3. Доказати да је сенка коју коцка при паралелном осветљењу баца на произвољну раван четвороугао или шестоугао.

3.4. Решити систем

$$2^{x^2+y}+2^{x+y^2}=8$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2.$$

3.5. Нека су x, y и z реални бројеви такви да је $x+y+z=\pi$ и $\sin x:\sin y:\sin z=4:5:6$. Доказати да је $\cos x:\cos y:\cos z=12:9:2$.

Четврти разред

4.1. Написати број 1995 као збир максимално много сложених бројева.

4.2. Одредити минимум израза $|x_1+2x_2+\cdots+nx_n|$, ако $x_1,x_2,\ldots x_n\in\{-1,1\}$.

4.3. Доказати да је сенка коју коцка при паралелном осветљењу баца на произвољну раван. четвороугао или шестоугао.

4.4. Шта је веће 1994^{1995} или 1995^{1994}. Образложити одговор без употребе помоћних средстава.

4.5. Доказати да за $x\in[0,\pi/2)$ вреди $x-\sin x\leq \mathrm{tg}x-x$.

Републичко такмичење 18. марта 1995.

Крушевац – Челарево

Први разред

1.1. Дате су две концентричне кружнице k_1 и k_2 полупречника a и b. Од свих правоугаоника чија два темена припадају кружници k_1, а друга два кружници k_2, наћи онај чија је површина највећа и израчунати ту површину.

1.2. Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ $(n>1)$ природни бројеви такви да је

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Доказати да је $a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n$ сложен број.

1.3. У троуглу ABC дата је тачка P, таква да је

$$\angle BPC=\angle BAC+60^0, \angle CPA=\angle CBA+60^0,\ \angle APB=\angle ACB+60^0.$$

Нека су A_1,B_1,C_1 друге пресечне тачке правих AP,BP и CP, редом са кругом описаним око троугла ABC. Доказати да је троугао $A_1B_1C_1$ једнакостраничан.

1.4. Ученици једна школе су два пута ишли у позориште. Сваки ученик је био бар на једној представи. Међу ученицима који су били на првој представи било је 60% дечака, а међу ученицима који су били на другој представи било је 75% дечака. Доказати да у тој школи број дечака није мањи од броја девојчица.

Други разред

2.1. У равни је дат правоугли координатни систем. Да ли постоји правилан 1995-то угао чија темена имају целобројне координате?

2.2. Нека је p прост број и n природан број, такав да је број n^2+n+3 дељив са p. Доказати да постоји природан број k такав да је број k^2+k+25 дељив са p.

2.3. У квадрату $ABCD$ дата је тачка P, таква да је $AP:BP:CP = 1:2:3$. Одредити угао $\angle APB$.

2.4. Дато је пет бројева. Од њих се прави нових пет бројева следећим поступком: међу њима се изаберу четири броја и сваки од њих се замени разликом полузбира изабраних бројева и тог броја; пети број остаје непромењен. Да ли се понављањем овог поступка од полазних бројева 1, 2, 3, 4, 5 могу добити бројеви

$$a)\ 10,\ -11,\ 12,\ -13,\ 14; \quad b)\ 13,\ -14,\ 15,\ -16,\ 17.$$

Трећи разред

3.1. У троуглу јединичне површине дато је 7 тачака од којих никоје три нису на једној правој. Доказати да су неке три од датих тачака темена троугла чија површина није већа од $1/4$.

3.2. У правоугаоник је уписан четвороугао тако да се на свакој страници правоугаоника налази по једно теме тог четвороугла. Доказати да обим уписаног четвороугла није мањи од збира дијагонала правоугаоника.

3.3. Дат је скуп X који се састоји од n елемената. Сваком подскупу скупа X придружена је једна од датих p боја. Одредити највећу вредност броја p, тако да за свако придруживање боја подскуповима, постоје скупови $A \subset X$ и $B \subset X$, такви да је сваком од скупова $A, B, A\cap B, A\cup B$ придружена иста боја.

3.4. Ако је d највећи од позитивних реалних бројева a, b, c, d, доказати да је

$$a(d-b)+b(d-c)+c(d-a) \le d^2.$$

Четврти разред

4.1. У троуглу јединичне површине дато је 7 тачака од којих никоје три нису на једној правој. Доказати да су неке три од датих тачака темена троугла чија површина није већа од $1/4$.

4.2. У правоугаоник је уписан четвороугао тако да се на свакој страници правоугаоника налази по једно теме тог четвороугла. Доказати да обим уписаног четвороугла није мањи од збира дијагонала правоугаоника.

4.3. Дат је скуп X који се састоји од n елемената. Сваком подскупу скупа X придружена је једна од датих p боја. Одредити највећу вредност броја p, тако да за свако придруживање боја подскуповима, постоје скупови $A \subset X$ и $B \subset X$, такви да је сваком од скупова $A, B, A \cap B, A \cup B$ придружена иста боја.

4.4. Низ бројева (a_n) задат је са: $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ и

$$a_{n+3} = \frac{1 + a_{n+2}a_{n+1}}{a_n} \quad \text{за } n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Доказати да су сви чланови низа (a_n) природни бројеви.

Решења задатака са општинског такмичења:

Први разред

1.1. Тражени број је 102465. Најмањи шестоцифрени број са различитим цифрама је 102345, али он није дељив са 11, јер је за то потребно и довољно да разлика збира цифара на парним местима и непарним местима буде дељива са 11. Потражимо први већи број који задовољава услове. Таквог нема међу бројевима 1023**, јер би на месту звездица биле исте цифре. Међу бројевима облика 1024** први који задовољава услове је 102465.

1.2. Ако је тражени број n, онда је $n+2$ најмањи број дељив са 4, 6, 8, 10 и 12, дакле најмањи заједнички садржалац ових бројева. Стога је $n = 118$.

1.3. Како је $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1) = 0$ и 1995 дељиво са 3, израз је једнак 2.

1.4. За сваку пермутацију од девет боја можемо обојити поља редом по врстама таблице. При том се сваки обојени квадрат понавља четири пута (колико има ротација у равни које га преводе у самог себе). Зато је тражени број $9!/4$.

1.5. Обележимо исказе p: победићемо у фудбалу; q: победићемо у кошарци. Лице A је рекло: $p \Rightarrow q$ а лице B: $\neg q \Rightarrow p$. Како је исказ $(p \Rightarrow q) \vee (\neg q \Rightarrow p)$ таутологија, лице C говори истину.

Други разред

2.1. Из услова $a \geq 1$, $g \geq 1$ и $c \geq 1$ добијамо да је $a^3b^3 + 3a^2b^2c + 3abc^2 \leq a^3b^3 + 3a^3b^2c + 3a^3bc^2$ и $c^3 - c \leq a^3c^3 - a^3c$, па сабирањем ових неједнакости добијамо да је $a^3b^3+3a^2b^2c+3abc^2+c^3-c \leq a^3b^3+3a^3b^2c+3a^3bc^2+a^3c^3-a^3c$. Из последње неједнакости следи $(ab+c)^3 - c \leq a^3[(b+c)^3 - c]$, одакле дељењем са $(b+c)^3 - c$ добијамо наведену неједнакост.

2.2. Елементарним трансформацијама добијамо:

$$\begin{aligned}(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} &= \sqrt{4+\sqrt{15}}(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}}\sqrt{4-\sqrt{15}}\\ &= \sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = 2.\end{aligned}$$

2.3. Приметимо да скуп свих тачака чији су афикси комплексни бројеви за које важи $|z+4-3i| = 1$ јесте круг са центром у тачки $(-4,3)$ и полупречника 1. Растојање центра тог круга од тачке $(0,0)$ једнако је 5, па следи да је тразени минимум $|z|$ једнак 4.

2.4. Средишта страница квадрата су темена новог квадрата. Тачке симетричне тачки O у односу на поменута средишта су хомотетичне тим средиштима при хомотетији са центром O и коефицијентом 2. Одатле следи тврђење задатка.

2.5. Нека су A_1, B_1, C_1 подножја висина оштроуглог троугла ABC са угловима α, β, γ и одговарајућим страницама a, b, c. Тада је $AC_1 = b\cos\alpha$, $AB_1 = c\cos\alpha$. На основу тога добијамо да је

$$P_{AC_1B_1} = \frac{1}{2}AC_1 \cdot AB_1 \sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha\cos^2\alpha = S\cos^2\alpha.$$

Аналогно добијамо да је $P_{BA_1C_1} = S\cos^2\beta$ и $P_{CB_1A_1} = S\cos^2\gamma$. Према томе, $P_{A_1B_1C_1} = P_{ABC} - P_{AC_1B_1} - P_{BA_1C_1} - P_{CB_1A_1} = S(1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)$.

Трећи и четврти разред

3-4.1. Ако број p није дељив са 3, број $p^2-1=(p-1)(p+1)$ јесте дељив са 3, па је и број $8p^2+1 = 8(p^2-1)+9$ такође дељив са 3. Ако је $p=3$, онда је $8p^2+1=73$, а то је прост број. Дакле, тразени број је $p=3$.

3-4.2. Тражени коефицијент једнак је броју целобројних решења система $u+v+w=15$, $0 \le u,v,w \le 10$. Ставимо да је $u+v=s$. Тада је $w=15-s$. Дакле, s је цео број који задовољава услов $5 \le s \le 15$. Разматрајмо систем $u+v=s$, $0\le u,v \le 10$.
1° Нека је $5 \le s \le 10$. У овом случају v је произвољан цео број који задовољава услов $0 \le v \le s$, а u је дато са $u=s-v$. Дакле, у овом случају систем има $s+1$ решење.
2° Нека је $11 \le s \le 15$. У овом случају v је произвољан цео број који задовољава услов $s-10 \le v \le 10$, а u је дато са $u=s-v$. Дакле, у овом случају систем има $21-s$ решења. Укупан број решења полазног система је $(6+7+\cdots+11)+(10+9+\cdots+6)=91$.

3-4.3. Нека је $\mathrm{tg}x = t$. Тада је $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Прво решимо једначину $\dfrac{2t}{1+t^2}+t = 2$ у скупу реалних бројева. Ова једначина је еквивалентна са

$$t^3-2t^2+3t-2=0,$$

тј. са $(t-1)(t^2-t+2)=0$. Последња једначина има тачно једно реално решење $t=1$. Полазна једначина је еквивалентна једначини $\mathrm{tg}x=1$, а решења ове последње једначине дата су са $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

3-4.4. Четвороуглови $O_2S_3O_1S$ и $SO_1S_2O_3$ су ромбови, дакле паралелограми. Следи да су дужи O_2S_3, SO_1 и O_3S_2 паралелне, једнаке и истосмерне. Одавде закључујемо да је четвороугао $O_2S_3S_2O_3$ паралелограм. Дужи O_2S_2 и O_3S_3 су дијагонале паралелограма па им се зато средишта поклапају. На сличан начин може да се докаже да се средишта дужи O_1S_1 и O_2S_2 поклапају. Дакле, средишта дужи O_1S_1, O_2S_2 и O_3S_3 се поклапају. Следи да се праве O_1S_1, O_2S_2 и O_3S_3 секу у једној тачки.

3-4.5. Применом Питагорине теореме добијамо да је $DD'^2 = AD^2 - AD'^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{2}{3}a^2$, $AS^2 = AD'^2 - SD'^2 = AD'^2 + \dfrac{1}{4}DD'^2 = \dfrac{a^2}{3}+\dfrac{a^2}{6} = \dfrac{a^2}{2}$. На сличан начин се добија да је $BS^2 = \frac{a^2}{2}$. Следи да је $AS^2 + BS^2 = AB^2 (= a^2)$, а одавде да је угао ASB прав.

Решења задатака са окружног такмичења:

Први разред

1.1. Број писан једино цифрама 6 и 2 је дељив са 2 али није са 4, док је разлика квадрата, ако је паран број, дељива и са 4.

1.2. Нека је A минимум првих координата а B минимум других координата тачака из S и нека су (A, Y) и (X, B) две тачке из S. Како у скупу $T = \{(x,y) | 1 \leq x \leq X,\ 1 \leq y \leq Y\}$ има коначно много целобројних тачака, постоји тачка (x, y) из S која му не припада. За њу важи $A \leq x$, $Y \leq y$ или $X \leq x$ $B \leq y$.

1.3. Како је $k - (k+1) - (k+2) + (k+3) = 0$ за $k = 4, 5, \ldots, 1992$ и $1 + 2 - 3 = 0$ предзнаци се могу изабрати да вредност израза буде нула.

1.4. Довољно је доказати да се дијагонале полове. Нека је O пресек дијагонала. Како су површине троуглова ACD и ACB једнаке, висине из темена D и B су једнаке. Из једнакости површина ACD и BCD следи једнакост површина троуглова AOD и BOC. Како су им висине из темена D односно B једнаке, вреди $AO = CO$. Слично се показује да је $BO = DO$.

1.5. Троуглови AEC и BFC су подударни јер је $AC = CF, CE = CB$, $\angle ACE = \angle BCF = \angle C + 60^0$. Стога је $AE = BF$. Ови троуглови ротацијом око C за 60^0 прелазе један у другог. Стога се и одговарајуће праве AE и FB секу у некој тачки O под углом од 60^0, дакле $\angle AOF = \angle BOE = 60^0$. Како се дуж AF види из тачке O под углом од 60^0, четвороугао $AOCF$ је тетиван, па је и $\angle COF = \angle CAF = 60^0$. Стога је $\angle AOC = 120^0$. Слично се доказује да је $\angle BOC = 120^0$. Угао $\angle AOB$ је допуна збира ових углова до пуног угла, па износи такође 120^0. Аналогно се доказаје да се дужи DC и BF секу у некој тачки $O^{'}$ из које се дуж AB види под углом 120^0. Како су O и $O^{'}$ са исте стране праве AB, морају се O и $O^{'}$ поклапати. Тиме је доказ завршен.

Други разред

2.1. Међу бројевима $1,\ 11,\ 111, \ldots, \overbrace{1\cdots1}^{1995 \text{ puta}}$ или је неки дељив са 1995 или, на основу Дирихлеовог принципа, два имају исти остатак при деоби са 1995. Разлика та два броја је онда број који задовољава тврђење задатка.

2.2. Дискриминанта једначине $x^2-(y+1)x+y^2-y=0$ је $D=-3y^2+6y+1\geq 0$. Стога је $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\leq y\leq\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. Једине целобројне вредности које ово задовољавају су 0,1 и 2. Одговарајуће вредности за x добијамо решавањем квадратне једначине. Сва целобројна решења су

$$(1,0),(0,0),(2,1),(0,1),(1,2),(2,2).$$

2.3. Ако су x_1 и x_2 корени дате једначине, на основу Виетових правила је $x_1x_2=b+1$ и $x_1+x_2=-a$. Стога је

$$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1).$$

Како је $x_1^2+1\geq 2$ и $x_2^2+1\geq 2$, тврђење је доказано.

2.4. Једначина се може написати у облику

$$\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2.$$

Како је лева страна једначине већа или једнака од $\sqrt{4}+\sqrt{9}=5$ а десна страна мања или једнака 5, једнакост је могућа једино за $x=-1$.

2.5. Нека су A',B',C' тачке које у односу на темена A,B,C троугла ABC полове његов обим $2s$. На основу Чевине теореме, дужи AA', BB', CC' се секу у једној тачки ако и само ако је

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

Последње је тачно, јер је $BA'=s-c$, $A'C=s-b$, $CB'=s-a$, $B'A=s-c$, $AC'=s-b$, $C'B=s-a$.

Трећи разред

3.1. Ни један сабирак траженог збира не сме бити збир два сложена броја. Отуда сабирци могу бити једино 4, 6 и 9. Како је 1995 непаран, у збиру се појављује бар једна деветка а због $9+9=6+6+6$ и само једна. Како $1995-9$ није дељиво са 4, међу сабирцима се појављује бар једна шестица. Како је $1995-9-6=1980$ дељиво са 4, остали сабирци су четворке.

3.2. Приметимо да је, за свако природно k,

$$k-(k+1)-(k+2)+(k+3)=0. \tag{1}$$

Ако је n облика $4k$ минимум је стога једнак нули. Ако је $n=4k+3$ минимум је такође нула, због $1+2-3=0$ и применом (1) на свака четири узастопна сабирка после прва три. У случајевима $n=4k+1$ и $n=4k+2$ минимум је једнак 1, јер је израз $|x_1+2x_2+\cdots+nx_n|$ непаран број за сваки избор непознатих, а због (1) се вредност 1 може достићи. У првом случају бира се $x_1 = 1$ а онда за свака четири узастопна сабирка користимо (1). У другом случају бирамо $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ а на остале сабирке груписане по четири применимо избор непознатих сагласно (1).

3.3. Сенка мора бити централно симетрична фигура, те зато није троугао, петоугао ни седмоугао. Не може бити ни дуж, јер би тада коцка припадала равни. Докажимо да сенка није осмоугао тј. да бар једно теме коцке није осветљено. Ивице које полазе из истог темена коцке као вектори чине базу простора. Избором темена O могуће је постићи да се вектор (зрак) осветљавања $\overrightarrow{s}$ изражава као непозитивна комбинација вектора ивица $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, и $\overrightarrow{c}$ које полазе из O. Докажимо да је теме O неосветљено. Посматрајмо тачке M такве да је $\overrightarrow{OM} = t(-\overrightarrow{s})$, $t > 0$. За довољно мало t оне припадају коцки, јер тачке коцке имају векторе положаја $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$ са $0 \leq x, y, z \leq 1$. Отуда тачка O није осветљена.

3.4. Применом неједнакости аритметичке и геометријске средине имамо

$$2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} \geq 2\sqrt{2^{x^2+x+y^2+y}},$$

па из прве једнакости система добијамо

$$x^2 + x + y^2 + y \leq 4. \tag{1}$$

Како је $2(x+y) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$, из друге једнакости система следи

$$x + y \geq 2. \tag{2}$$

Из $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$ и (2) следи

$$x^2 + y^2 \geq 2. \tag{3}$$

Из (1),(2) и (3) следи $x + y = 2$ и $x^2 + y^2 = 2$ и коначно $x = y = 1$.

3.5. Из идентитета $\sin^2 y + \sin^2(x+y) - \sin^2 x = 2\sin y \cos x \sin(x+y)$ који се лако изводи из адиционих формула, добијамо

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sin^2 y + \sin^2 z - \sin^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 z - \sin^2 y}\frac{\sin x}{\sin y},$$

одакле, коришћењем датих пропорција, следи $\cos x : \cos y = 12 : 9$. Слично се изводи и преостало.
(Идеју за полазни идентитет добијамо анализом специјалног случаја задатка када су x, y, z углови троугла везом косинусне и синусне теореме.)

Четврти разред

4.1. Види решење задатка 1. за трећи разред.

4.2. Види решење задатка 2. за трећи разред.

4.3. Види решење задатка 3. за трећи разред.

4.4. Докажимо генерално да је $n^{n+1} > n+1^n$ за $n > 3$, што је еквивалентно са $n > (1+1/n)^n$ и тачно због $n > 3 > e > (1+1/n)^n$.

4.5. Посматрамо функцију $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$ на интервалу $[0, \pi/2)$. Како је $f' = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq 0$, функција не опада па је $f(x) \geq f(0) = 0$.

Решења задатака са републичког такмичења:

Први разред:

1.1. Нека је $ABCD$ правоугаоник чија темена A и B припадају кружници k_1 а темена C и D кружници k_2. Лако је видети да уколико центар O кружница не припада правоугаонику $ABCD$, постоји правоугаоник веће површине са теменима на k_1 и k_2. Стога надаље разматрамо случај када центар O припада правоугаонику $ABCD$. Како је $P(ABCD) = 4P(AOD)$, највећи по површини је онај правоугаоник код кога је троугао AOD највеће површине, дакле када је угао AOD прав. Тада је $P(ABCD) = 2ab$.

1.2. Нека је

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

при чему су a и b узајамно прости природни бројеви. Тада је

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{(a+b)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}{b}.$$

Како су $a+b$ и b узајамно прости бројеви и на левој страни природан број, постоји природан број k такав да је $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = kb$. Како је $b_1 \geq b, b_2 \geq b, \ldots, b_n \geq b$, то је $k \geq n > 1$. Стога је

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = (a+b)k$$

сложен број.

1.3. Како је

$$\angle BPC = \angle BPA_1 + \angle A_1PC = \angle PAB + \angle PBA + \angle PAC + \angle PCA,$$

биће

$$\alpha + 60^0 = \alpha + \angle PBA + \angle PCA.$$

односно

$$60^0 = \angle PBA + \angle PCA.$$

Како је

$$\angle PBA = \angle B_1BA = \angle B_1A_1A$$

и

$$\angle PCA = \angle C_1CA = \angle C_1A_1A$$

(као периферијски углови над истим луком), биће

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1A_1A + \angle C_1A_1A = 60^0.$$

Слично се доказује да је $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1C_1 = 60^0$.

1.4. Означимо са x_0, y_0 број дечака односно девојчица који су били на обе представе, а са x_i, y_i број дечака односно девојчица који су били само на представи i, $(i = 1, 2)$. Према условима задатка је

$$(x_0 + x_1) : (y_0 + y_1) = 60 : 40 \quad , \quad (x_0 + x_2) : (y_0 + y_2) = 75 : 25.$$

Отуда следи $2(x_0+x_1) = 3(y_0+y_1)$ и $x_0+x_2 = 3(y_0+y_2)$, па је $3x_0+2x_1+x_2 = 6y_0 + 3y_1 + 3y_2$. Како је $3(x_0 + x_1 + x_2) \geq 3x_0 + 2x_1 + x_2$ и $6y_0 + 3y_1 + 3y_2 \geq 3(y_0 + y_1 + y_2)$, биће $x_0 + x_1 + x_2 \geq y_0 + y_1 + y_2$, што је и требало доказати.

Други разред:

2.1. Не постоји. У супротном би постојао и правилан петоугао $ABCDE$ са целобројним координатама темена. Пресеци дијагонала тог петоугла су такође темена правилног петоугла са целобројном координатама темена (свако од њих је четврто теме паралелограма чија су три темена темена полазног петоугла). Поступак би се могао неограничено продужити, дајући све мање и мање правилне петоугле са целобројним координатама темена, што је немогуће.

2.2. Ако је $p = 3$, може се узети $k = 1$. Ако је $p > 3$, такав број је $k = 3n + 1$, јер је $k^2 + k + 25 = 9(n^2 + n + 1)$.

2.3. Ротацијом равни око B која пресликацва A у C, тачка P прелази у Q. При том је $PB = QB$ и $\angle PQB = 45^0$. Како је $PC^2 = 9PA^2 = CQ^2 + PB^2 + BQ^2 = CQ^2 + PQ^2$, троугао PQC је правоугли и $\angle PQC = 90^0$. Стога је $\angle APB = \angle BQC = 135^0$.

2.4. Нека су a, b, c, d произвољна четири броја и $2s = a + b + c + d$ Тада је

$$(s-a) + (s-b) + (s-c) + (s-d) = a + b + c + d$$

и

$$(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + (s-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Зато, при наведеним операцијама, збир свих пет бројева као и збир њихових квадрата остаје непромењен, па је и под а) и под б) одговор негативан.

Трећи разред:

3.1. Помоћу две средње линије разложимо троугао на два троугла површине $1/4$ и паралелограм површине $1/2$. По Дирихлеовом принципу, од датих 7 тачака три припадају једном од ова три скупа. Оне су темена троугла чија површина није већа од $1/4$. Овде имамо у виду чињеницу да површина троугла није већа од половине површине паралелограма који га прекрива.

3.2. Обележимо правоугаоник са $ABCD$ и уписани четвороугао са $MNPQ$, $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$, $Q \in DA$. Пресликајмо $ABCD$ симетријом у односу на страницу BC у правоугаоник $A'BCD'$, овај потом симетријом у односу на CD' у $A''B''CD'$ и овај симетријом у односу на $D'A''$ у $A''B'''C'''D'$. Нека су са X', X'', X''' означене слике произвољне тачке X редом при првој симетрији, композицији прве и друге и композицији прве друге и треће симетрије. Обим уписаног четвороугла је једнак дужини изломљене линије $MNP'Q''M'''$ која није мања од растојања MM''', а оно је једнако збиру дијагонала правоугаоника $ABCD$.

3.3. Највећа вредност броја p је n. Докажимо да за свако пресликавање подскупова скупа X у скуп од највише n боја, постоје подскупови A, B којима је придружена иста боја која је придружена и њиховом пресеку и унији. Посматрајмо подскупове $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\dots$, $\{1,2,\dots,n\}$. Према Дирихлеовом принципу постоје два међу њима којима је придружена иста боја. Та је боја придружена и њиховом пресеку и унији (који се своде на те скупове).
Докажимо да за $n+1$ боју, постоји бојење подскупова такво да не постоје подскупови A, B такви да су сви скупови AB, $A \cap B$, $A \cup B$ офарбани истом бојом. Нека су боје означене бројевима $0, 1, 2, \dots, n$. Тражено пресликавање је одређено правилом да се подкупу $A \subset X$ додели број елемената у A.

3.4. Треба доказати да је $d^2 - (a+b+c)d + ab + ac + bc \geq 0$. Ово следи из

$$d[d^2 - (a+b+c)d + ab + ac + bc] - abc = (d-a)(d-b)(d-c) \geq 0$$

и позитивности бројева a, b, c, d.

Четврти разред

4.1. Видети решење задатка 1. за трећи разред.

4.2. Видети решење задатка 2. за трећи разред.

4.3. Видети решење задатка 3. за трећи разред.

4.4. Чланови низа (a_n) су очигледно позитивни бројеви. Одузимањем левих и десних страна једнакости

$$
\begin{aligned}
a_{n+3}a_n &= 1 + a_{n+2}a_{n+1}\\
a_{n+4}a_{n+1} &= 1 + a_{n+3}a_{n+2}
\end{aligned}
$$

добијамо $a_{n+4}a_{n+1} - a_{n+3}a_n = a_{n+3}a_{n+2} - a_{n+2}a_{n+1}$ што је еквивалентно са

$$\frac{a_{n+4} + a_{n+2}}{a_{n+3}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}.$$

Одатле налазимо да је

$$\frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \begin{cases} 2, & \text{ако је} n \text{ парно} \\ 3, & \text{ако је } n \text{ непарно} \end{cases}$$

Дакле $a_{n+2} = x_n a_{n+1} - a_n$, при чему $x_n \in \{2, 3\}$. Одавде се индукцијом добија да су сви чланови низа (a_n) цели бројеви.

РАСПОРЕД ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ШКОЛСКУ 1995/96. ГОДИНУ

Општинско такмичење . . . . 03.02.1996.

Окружно такмичење . . . . 17.02.1996.

Републичко такмичење . . . . 17.03.1996.

Савезно такмичење . . . . 14.04.1996.

САДРЖАЈ