Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1998/99 година

ТРАГОМ ЈЕДНОГ ЗАДАТКА

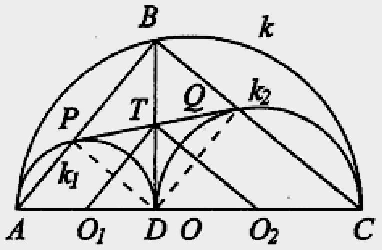
Juis Carstensen, Frederiksberg, Danmark
Alija Muminagić, Nykobing F. , Danmark

У Тангенти бр. 17 дато је рјешење задатка **М 113.** (Архимед из Сиракузе, 287. – 212. п. н. е.):

Из тачке B полукружнице над пречником AC спуштена је нормала BD на тај пречник. Над дужима AD и DC као пречницима конструисане су полукружнице које леже у унутрашњости прве. Доказати да је површина области ограничене са три полукружнице једнака површини круга над пречником BD.

Уводимо ознаке:
k_1 – полукружница $(O_1, r_1 = \frac{AD}{2})$,
k_2 – полукружница $(O_2, r_2 = \frac{DC}{2})$,
k_3 – полукружница $(O_3, r_3 = \frac{AC}{2})$.
Нека је $AB \cap k_1 = \{P\}$ и $BC \cap k_2 = \{Q\}$.

1. Доказаћемо теорему: *PQ је заједничка тангента за полукружнице k_1 и k_2.*



Доказ. Спојимо тачке P и D и Q и D (слика 1). Углови $\angle ABC$, $\angle APD$ и $\angle DQC$ су прави, па је четвороугао $PDQB$ правоугаоник, у којем су дужи BD и PQ дијагонале. Нека је $BD \cap PQ = \{T\}$; слиједи да је $TD = TP$. TD је тангента на k_1 и слиједи да је и TP тангента на k_1. Слично доказујемо да је TQ тангента на полукружницу k_2.

2.) Нађимо сада дужи PD и QD.

Примјеном Питагорине теореме на правоугли троугао ABD добијамо

$$BD^2 + AD^2 = AB^2 \Leftrightarrow 4r_1r_2 + 4r_1^2 = AB^2 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{r_1(r_1+r_2)}. \qquad (1)$$

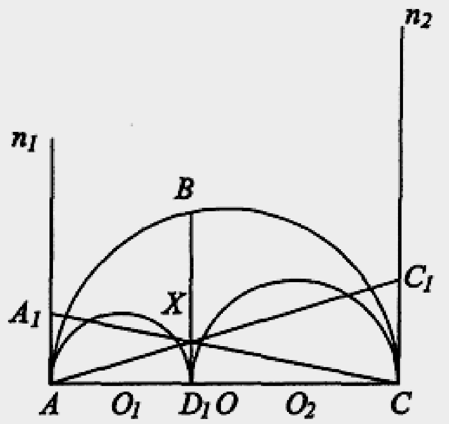
Дуж TO_1 је средња линија троугла ABD и зато је

$$TO_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{r_1(r_1+r_2)} = \sqrt{r_1(r_1+r_2)}. \qquad (2)$$

Слично добијамо
$$TO_2 = \sqrt{r_2(r_1 + r_2)}. \tag{3}$$
Из сличности троуглова ADP и ACB слиједи
$$\frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow PD = \frac{AD}{AC} \cdot BC.$$
Због $BC = 2 \cdot TO_2$ је
$$PD = \frac{2r_1}{2r_1 + 2r_2} \cdot 2 \cdot \sqrt{r_2(r_1 + r_2)} = 2r_1\sqrt{\frac{r_2}{r_1 + r_2}} \tag{4}$$
и на исти начин
$$QD = 2r_2\sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}}. \tag{5}$$
3. Даље, конструишимо у тачкама A и C нормале n_1 и n_2 на пречник AC и на њима одредимо тачке A_1 и C_1 такве да је $AA_1 = r_1$ и $CC_1 = r_2$.

Спојимо тачке A и C_1 и C и A_1 и нека је $AC_1 \cap CA_1 = \{X\}$. Доказаћемо да $X \in BD$.

Доказ. Нормалну пројекцију тачке X на AC означимо са D_1 и нека је $XD_1 = k$ (види сл. 2).

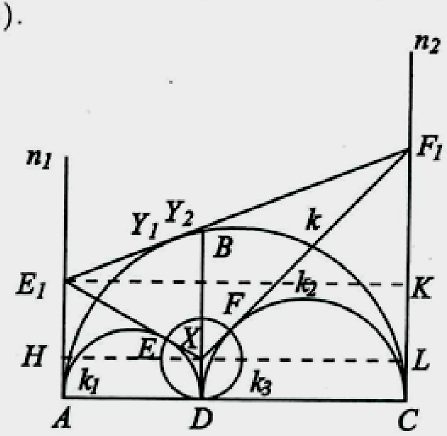


Имамо да је троугао ACA_1 сличан троуглу D_1CX и слиједи
$$\frac{AA_1}{XD_1} = \frac{AC}{D_1C}, \text{ односно,} \frac{r_1}{k} = \frac{2r_1 + 2r_2}{D_1C} \Leftrightarrow k = \frac{r_1 \cdot D_1C}{2r_1 + 2r_2}. \tag{6}$$
Из сличности троуглова ACC_1 и AD_1X слиједи
$$\frac{CC_1}{XD_1} = \frac{AC}{AD_1}, \text{ односно,} \frac{r_2}{k} = \frac{2r_1 + 2r_2}{AD_1} \Leftrightarrow k = \frac{r_2 \cdot AD_1}{2r_1 + 2r_2}. \tag{7}$$
Из (6) и (7) произилази
$$r_1 \cdot D_1C = r_2 \cdot AD_1 \Leftrightarrow r_1 \cdot D_1C = r_2(AC - D_1C) \Leftrightarrow (r_1 + r_2) \cdot D_1C = r_2 \cdot AC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r \cdot D_1C - r_2 \cdot 2r \Leftrightarrow D_1C = 2r_2. \tag{8}$$
Из (8) закључујемо да је $D_1 \equiv D$ и тако је $X \in BD$.

Због (8) из (6) добијамо

$$k = \frac{r_1 \cdot D_1C}{2r_1 + 2r_2} = \frac{r_1 \cdot 2r_2}{2r_1 + 2r_2} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}. \tag{9}$$

4. Конструишимо сада кружницу $k_3(X, XD = k)$. Нека је $k_3 \cap k_1 = \{E\}$ и $k_3 \cap k_2 = \{F\}$ (види сл. 3).



Будући да је $XD = XE = XF$ и XD тангента за k_1 и k_2, то су и XE и XF такође тангенте за k_1 и k_2. Продужимо XE до пресјека са n_1 и XF до пресјека са n_2 и пресјечне тачке означимо са E_1 и F_1. Из тачака E_1 и F_1 конструишемо тангенте на k и додирне тачке означимо са Y_1 и Y_2.

Доказаћемо да је $Y_1 \equiv Y_2$.

Доказ. Имамо да је $E_1A = E_1Y_1$ и $E_1A = E_1E$. Нормалне пројекције тачке X на нормале n_1 и n_2 означимо са X и L. Примјетимо да је

$$E_1H = E_1A - HA = E_1A - k, E_1X = E_1E + EX = E_1A + k, HX = AD = 2r_1. \tag{10}$$

Примјеном Питагорине теореме на правоугли троугао E_1HX и водећи рачуна о (10) добијамо

$$(E_1A - k)^2 + Yr_1^2 = (E_1A + k)^2 \Leftrightarrow E_1A = \frac{r_1^2}{k}$$

и због (9) је

$$E_1A = \frac{r_1^2}{\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_2}. \tag{11}$$

Слично, примјеном Питагорине теореме на правоугли троугао F_1XL добијамо да је

$$F_1C = \frac{r_2(r_1 + r_2)}{r_1}. \tag{12}$$

Одредимо сада збир $F_1C + E_1A$. Имамо, због (11) и (12),

$$F_1C + E_1A = \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_2} + \frac{r_2(r_1 + r_2)}{r_1} = \frac{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)}{r_1 \cdot r_2} = F_1Y_2 + E_1Y_1. \tag{13}$$

Сада ћемо израчунати E_1F_1.. Питагорина теорема за правоугли троугао E_1KF_1 даје

$$E_1F_1^2 = E_1K_2 + KF_1^2 = AC^2 + (F_1C - E_1A)^2 = (2r_1 + 2r_2)^2 + (F_1C - E_1A)^2. \tag{14}$$

Због (11) и (12) је

$$F_1C - E_1A = \frac{r_2(r_1+r_2)}{r_1} - \frac{r_1(r_1+r_2)}{r_2} = \frac{(r_1+r_2)(r_2^2-r_1^2)}{r_1 \cdot r_2}. \tag{15}$$

Стављајући (15) у (14) добијамо

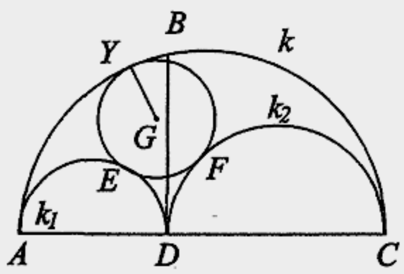
$$E_1F_1^2 = (2r_1+2r_2)^2 + [\frac{(r_1+r_2)(r_2^2 r_1^2)}{r_1 \cdot r_2}]^2 = \frac{(r_1+r_2)^2(r_1^2+r_2^2)^2}{r_1^2 r_2^2} \Leftrightarrow$$

$$E_1F_1 = \frac{(r_1+r_2)(r_1^2+r_2^2)}{r_1 r_2}. \tag{16}$$

Из (13) и (16) закључујемо да је $F_1Y_2 + E_1Y_1 = E_1F_1$, тј. $Y_1 \equiv Y_2$.

Пробајте ријешити и овај задатак:

Нађи полупречник кружнице $k_3(G, GY)$ (види сл. 4).



Литература

1. The Mathematics Teacher, April 1973, March 1984.

2. Praxis der Mathematik, 1985.

3. Arbelos, Volume 6, 1988 (The Mathematial Association of America).