Сојузен натпревар 1991

Седмо одделение

1. На таблата се запишани сите природни броеви од 1 до 1991. Горјан избришал два броја и наместо нив ја запишал апсолутната вредност на нивната разлика. Тој постапката ја повторил толку пати се додека на таблата не останал еден број. Дали тој број може да биде 1991?

   Решение. Нека се избришани броевите a и b, каде $a>b$. Тогаш збирот на броевите на таблата се намалува за
   $$a+b-|a-b|=a+b-(a-b)=2b,$$
   т.е. за парен број. На почетокот на таблата збирот на сите запишани броеви бил
   $$1+2+3+...+1990+1991=\frac{1991\cdot 1992}{2}=1991\cdot 996.$$
   Бидејќи почениот збир е парен, а во секој чекор збирот се намалува за парен број, на таблата никогаш нема да има броеви чиј збир е непарен број, што значи дека не може да оистане бројот 1991.

2. Постои вистинска дропка поголема од $\frac{1}{3}$ со следните својства:

   а) постои природен број x таков што дропката не ја менува вредноста ако броителот се зголеми за x, а именителот се помножи со x,
   б) броителот и именителот се заемно прости броеви.
   Определи ги сите такви дропки.

   Решение. Нека бараната дропка е $\frac{a}{b}$, каде $b\neq 0$ и $NZD(a,b)=1$. Тогаш $\frac{a}{b}=\frac{a+x}{bx}$, од каде добиваме $x=\frac{a}{a-1}=1+\frac{1}{a-1}$. Бидејќи x е природен број, добиваме $a-1$, т.е. $a=2$. Според тоа, $x=2$. За дропките
   $$\frac{2}{3}=\frac{2+2}{2\cdot 3}, \frac{2}{5}=\frac{2+2}{2\cdot 5}$$
   се исполнети сите услови на задачата. Кај дропката $\frac{2}{4}$ броителот и именителот не се заемно прости броеви, а за $b\geq 6$ важи $\frac{2}{b}\leq\frac{1}{3}$.

3. Даден е полиномот $P(t)=t^4-t+\frac{1}{2}$. Докажи дека за секој реален број t важи:

   а) $P(t)\neq 0$, б) $P(t)>0$.

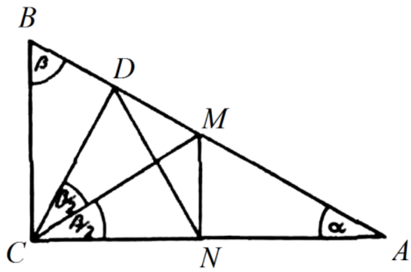
Решение. Имаме

$$P(t)=t^4-t+\tfrac{1}{2}=t^4-t^2+\tfrac{1}{4}+t^2-t+\tfrac{1}{4}=(t^2-\tfrac{1}{2})^2+(t-\tfrac{1}{2})^2.$$

Броевите $t^2-\frac{1}{2}$ и $t-\frac{1}{2}$ не може да се истовремено еднакви на 0, па затоа $P(t)>0$ за секој реален број t, што значи дека и $P(t)\neq 0$.

4. Даден е правоаголен триаголник ABC. Нека M е точка на хипотенузата AB таква што $BM=BC$ и N е точка на катетата AC таква што отсечката CN е еднаква на висината спуштена кон хипотенузата. Докажи дека $\measuredangle CNM=90^\circ$.

Решение. Нека $\measuredangle CBA=\beta$ (цртеж десно). Триаголникот BCM е рамнокрак ($BC=BM$), па затоа



$$\measuredangle BCM=\measuredangle BMC=90^\circ-\frac{\beta}{2}.$$

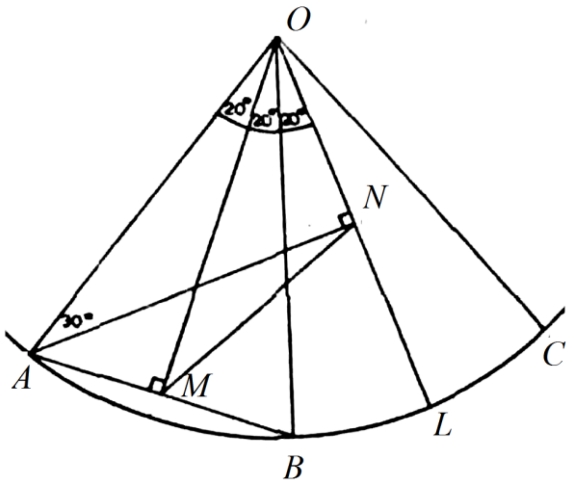
Бидејќи $\measuredangle BCD=90^\circ-\beta$, добиваме

$$\measuredangle DCM=\measuredangle BCM-\measuredangle BCD$$
$$=90^\circ-\frac{\beta}{2}-(90^\circ-\beta)=\frac{\beta}{2}.$$

Бидејќи $\measuredangle ACD=90^\circ-\alpha=\beta$, добиваме $\measuredangle NMC=\beta-\frac{\beta}{2}=\frac{\beta}{2}$. Триаголниците CMD и CMN се складни (CM е заедничка страна, $\measuredangle DCM=\measuredangle MCN=\frac{\beta}{2}$ и според условот $CD=CN$), па од оваа складност следува $\measuredangle CNM=\measuredangle ADM=90^\circ$

5. Нека AB и BC се соседни страни на правилен деветаголник, точката L е средина на лакот BC, точката M е средина на отсечката AB и точката N е средина на отсечката OL, каде O е центарот на кружницата опишана околу деветаголникот. Докажи дека $\measuredangle OMN=30^\circ$.

Решение. Бидејќи AB и BC се страни на правилен деветаголник, важи $\measuredangle AOB=\measuredangle BOC=40^\circ$ (види цртеж). Бидејќи $\measuredangle BOL=\measuredangle LOC=20^\circ$, добиваме $\measuredangle AOL=60^\circ$, што значи дека триаголникот AOL е рамностран. Понатаму, точката N е средина на ON, па затоа AN е висина на триаголникот AOL и $\measuredangle ANO=90^\circ$. Но, важи и $\measuredangle AMO=90^\circ$, па затоа четириаголникот $AMNO$ е тетивен, а центарот на опишаната кружница е среднита на отсечката AO. Конечно, користејќи го фактот дека периферисските агли на ист лак се еднакви, добиваме $\measuredangle OMN = \measuredangle OAN = 30^\circ$.



Осмо одделение

1. На колку начини бројот 1991 може да се запише како збир на последователни природни броеви?

Решение. Нека
$$n+(n+1)+...+(n+k)=1991.$$
Тогаш
$$(k+1)n+\frac{k(k+1)}{2}=1991, \text{ т.е. } (k+1)(2n+k)=2\cdot 11\cdot 181.$$
Сега, бидејќи $(k+1)(2n+k)=2\cdot 11\cdot 181>k^2$, добиваме $k<64$, па затоа $k+1\in\{2,11,22\}$.

а) Ако $k+1=2$, тогаш $k=1$ и $995+996=1991$.

б) Ако $k+1=11$, тогаш $k=10$, па $2n+10=362$, т.е. $n=176$. Освен тоа важи $176+177+..._186=1991$.

в) Ако $k+1=22$, тогаш $k=21$, $2n+21=181$ и $n=80$. Освен тоа, $80+81+...+101=1991$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бројот 1991 може на три начини да се запише како збир на последователни природни броеви.

2. Ако

$$a^2 = 1\underbrace{00...00}_{1990}5 \cdot \underbrace{11...11}_{1991} + 1,$$

определи го бројот a.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
a^2 &= 1\underbrace{00...00}_{1990}5 \cdot \underbrace{11...11}_{1991} + 1 \\
&= (1\underbrace{00...00}_{1991} + 5) \cdot \tfrac{1}{9} \cdot \underbrace{99...99}_{1991} + 1 \\
&= \tfrac{1}{9}(10^{1991} + 5)(10^{1991} - 1) + 1 \\
&= \tfrac{1}{9}((10^{1991})^2 + 5 \cdot 10^{1991} - 10^{1991} - 5 + 9) \\
&= \tfrac{1}{9}((10^{1991})^2 + 4 \cdot 10^{1991} + 4) \\
&= \tfrac{1}{9}(10^{1991} + 2)^2 \\
&= (\tfrac{10^{1991}+2}{3})^2.
\end{aligned}$$

Според тоа, $a = \frac{10^{1991}+2}{3}$ или $a = -\frac{10^{1991}+2}{3}$. Да забележиме дека

$$\tfrac{10^{1991}+2}{3} = \tfrac{1}{3} \cdot 1\underbrace{00...00}_{1990}2 = \underbrace{33...33}_{1990}4$$

3. Во едно езеро се влива поток кој секој ден во езерото внесува исто количество вода. 183 коњи денес може да ја испијат целата вода, т.е. за 24 часа би го испразниле изерото, а 37 коњи, почнувајќи од денес, целата вода може да ја испијат за 5 дена. За колку дена, почнувајќи од денес, еден коњ може да ја испие целата вода?

Решение. Нека x е количеството вода кое во почетниот момент се наоѓа во езерото, y е количеството вода кое за еден ден потокот го внесува во езерото и z е количеството вода кое за еден ден го пие еден коњ. Тогаш

$$183z = x + y,\ 5 \cdot 37z = x + 5y.$$

Од овие равенки добиваме

$$185z - 183z = (x+5y) - (x+y), \text{ т.е. } 2z = 4y.$$

Понатаму,

$$z = 2y \text{ и } x = 183z - y = 365y.$$

Да го означиме со n бројот на деновите за кои еден коњ ќе ја испие целата вода. Тогаш $x+ny=nz$, од каде добиваме

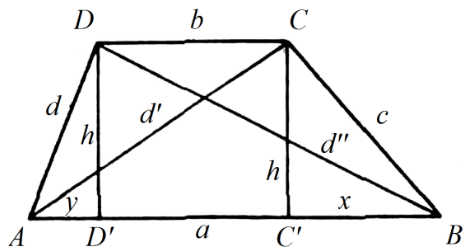
$$n=\frac{x}{z-y}=\frac{365y}{2y-y}=365 \text{ дена.}$$

4. Докажи дека збирот на квадратите на дијагоналите на произволен трапез е еднаков на збирот на квадратите на краците зголемен за двојниот производ на основите.

Решение. Од правоаголните триаголници ACC' и BDD' следува

$$d'^2=(a-x)^2+h^2=(a-x)^2+c^2-x^2=a^2-2ax+c^2,$$

$$d''^2=(a-y)^2+h^2=(a-y)^2+d^2-y^2=a^2-2ay+d^2,$$



(види цртеж). Ако ги собереме овие две равенства добиваме

$$d'^2+d''^2=a^2-2ax+c^2+a^2+2ay+d^2 2a^2-2ax-2ay+c^2+d^2$$

$$=2a(a-x-y)+c^2+d^2=2ab+c^2+d^2.$$

5. Нека P е произволна точка од основата на правилна четиристрана пирамида. Нормалата во точката P на рамнината на основата ги сече рамнините на бочните ѕидови во точките M_1, M_2, M_3, M_4. Докажи дека збирот

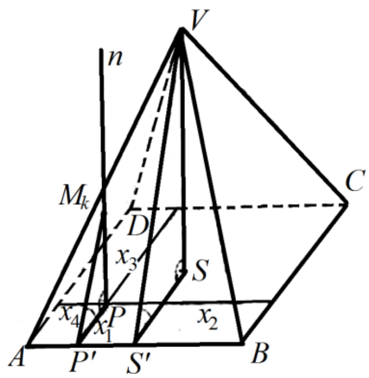
$$PM_1+PM_2+PM_3+PM_4$$

е четири пати поголем од висината на пирамидата.

Решение. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се растојанијата од точката P до рабовите на основата и φ е аголот меѓу бочните страни и основата на пирамидата. Тогаш

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2a$$

(види цртеж). Нека M_1, M_2, M_3, M_4 се пресечните точки на правата n, која



минува низ точката P и е нормална на рамнината на основата, со соодветните бочни ѕидови на пирамидата. Триаголниците $SS'V$ и $PP'M_k$, $k=1,2,3,4$ се слични (двата се правоаголни: $\measuredangle S=\measuredangle P=90^\circ$ и $\measuredangle PP'M_k=\measuredangle SS'V=\varphi$). Од сличноста добиваме

$$SS':SV=PP':PM_k \text{, т.е. } \tfrac{a}{2}:H=x_k:PM_k .$$

Според тоа, $PM_k=\frac{2x_kH}{a}$ и затоа

$$PM_1+PM_2+PM_3+PM_4=\tfrac{2H}{a}(x_1+x_2+x_3+x_4)=\tfrac{2H}{a}\cdot 2a=4H .$$