

Neke nove nejednakosti za trokut

Šefket Arslanagić*

Sažetak

U ovom radu dokazujemo osam novih nejednakosti za trokut. Te nejednakosti se temelje na jednoj dvostrukoj algebarskoj nejednakosti koju dokazujemo u teoremu 1. U dokazima koristimo više raznih jednakosti koje se odnose na elemente trokuta. Neke od tih jednakosti su dobro poznate.

Ključne riječi: trokut, algebarska nejednakost, nejednakosti za trokut, stranice, kutovi, visine, poluopseg, polumjer trokutu upisane i opisane kružnice, polumjeri trokutu pripisanih kružnica, površina trokuta

Some new inequalities for triangle

Abstract

In this paper we prove eight new inequalities for a triangle. These inequalities are based on a double algebraic inequality that we prove in Theorem 1. In the proofs we use a variety of equalities related to elements of a triangle. Some of these equalities are well known.

Keywords: triangle, algebraic inequality, inequalities for triangle, sides, angles, altitudes, semi-perimeter, radii of incircle, circumcircle and excircles, area of triangle

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku,
email: asefket@pmf.unsa.ba

1 Uvod

Najprije ćemo dokazati sljedeći teorem:

Teorem 1.1. *Ako su x, y i $z > 0$, tada važi nejednakost:*

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad (1)$$

Dokaz. Lijeva nejednakost je nakon kvadriranja ekvivalentna sljedećoj nejednakosti:

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &\geq 3(xy + yz + zx) \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

što je točno, pa je i nejednakost (2) točna.

Da bi dokazali desnu stranu nejednakosti (1) koristit ćemo dobro poznatu nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja:

$$\begin{aligned} \frac{xy + yz + zx}{3} &\geq \sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} &\geq \sqrt{\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} &\geq \sqrt[3]{xyz} \end{aligned}$$

Jednakosti u (1) vrijede ako i samo ako je $x = y = z$. □

2 Poznate jednakosti za trokut

Ovdje ćemo dati veći broj dobro poznatih (i neke manje poznatih) jednakosti koje se odnose na trokut.

Za trokut ABC sa stranicama a, b i c , unutarnjim kutovima α, β i γ te visinama h_a, h_b i h_c , vrijedi sljedeći niz jednakosti, gdje je $a + b + c = 2s$, r polumjer trokutu upisane kružnice, R polumjer trokutu opisane kružnice,

r_a, r_b i r_c polumjeri trokutu pripisanih kružnica, a P je površina trokuta.

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$r = \frac{P}{s},$$

$$R = \frac{abc}{4P},$$

$$r_a = \frac{P}{s-a}, r_b = \frac{P}{s-b}, r_c = \frac{P}{s-c},$$

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

$$r_ar_br_c = s^2r,$$

$$r_ar_b + r_br_c + r_ar_c = s^2,$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) = sr^2,$$

$$(s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) = 4(4R+r),$$

$$ab + bc + ac = s^2 + r^2 + 4Rr,$$

$$h_a + h_b + h_c = \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{2R},$$

$$h_ah_bh_c = \frac{2r^2s^2}{R},$$

$$h_ah_b + h_bh_c + h_ah_c = \frac{2s^2r}{R},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{4R+r}{s},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1,$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{4R+r}{r},$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr,$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{2R-r}{2R},$$

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{r^2}{16R^2} \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{s^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2} \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{4R + r}{2R} \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{s^2}{16R^2} \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{s^2 + (4R + r)^2}{16R^2}\end{aligned}$$

Dokaz skoro svih ovih jednakosti mogu se naći u [1], [3] i [4].

3 Nove nejednakosti za trokut

Uzimajući u teoremu 1 da je

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \{ &(a, b, c), (s - a, s - b, s - c), (h_a, h_b, h_c), (r_a, r_b, r_c), \\ &(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}), (\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}), \\ &(\sin^2 \frac{\alpha}{2}, \sin^2 \frac{\beta}{2}, \sin^2 \frac{\gamma}{2}), (\cos^2 \frac{\alpha}{2}, \cos^2 \frac{\beta}{2}, \cos^2 \frac{\gamma}{2})\}\end{aligned}$$

te uvažavajući spomenute jednakosti dobivamo sljedeće nejednakosti:

Nejednakost 1.

$$\frac{2s}{3} \geq \sqrt{\frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{3}} \geq \sqrt[3]{4Rrs}. \quad (3)$$

Nejednakost 2.

$$\frac{s}{3} \geq \sqrt{\frac{r(4R + r)}{3}} \geq \sqrt[3]{sr^2}. \quad (4)$$

Nejednakost 3.

$$\frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{6R} \geq \sqrt{\frac{2s^2r}{3R}} \geq \sqrt[3]{\frac{2s^2r^2}{R}}. \quad (5)$$

Nejednakost 4.

$$\frac{4R + r}{3} \geq \frac{s}{\sqrt{3}} \geq \sqrt[3]{s^2r}. \quad (6)$$

Nejednakost 5.

$$\frac{4R+r}{3s} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \sqrt[3]{\frac{r}{s}}. \quad (7)$$

Nejednakost 6.

$$\frac{s}{3r} \geq \sqrt{\frac{4R+r}{3r}} \geq \sqrt[3]{\frac{s}{r}}. \quad (8)$$

Nejednakost 7.

$$\frac{2R-r}{6R} \geq \sqrt{\frac{s^2+r^2-8Rr}{48R^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{r^2}{16R^2}}. \quad (9)$$

Nejednakost 8.

$$\frac{4R+r}{6R} \geq \sqrt{\frac{s^2+(4R+r)^2}{48R^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{s^2}{16R^2}}. \quad (10)$$

U svim ovim nejednakostima, jednakosti vrijede ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trokut.

4 Zaključak

Nadam se da će ovaj rad biti zanimljiv i koristan čitaocima koji pokazuju veći interes za matematiku. Neke od dokazanih nejednakosti će ih možda inspirirati da i sami pokušaju na sličan način pronaći neke nove nejednakosti. Dakle, ovom radu ne manjka ideja što je možda i najvažnije. S druge strane, obilje jednakosti u vezi trokuta ponuđenih u ovom radu, svakako će čitaocima upotpuniti znanja iz ove oblasti matematike. Čitaoce upućujemo da posvete jedan dio pažnje i ponuđenoj literaturi.

Literatura

- [1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene, Bosanska riječ*, Sarajevo, 2005.
- [2] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.
- [3] N. Minculete, *Eqalitati si ineqalitati geometrice in trianghi*, Editura Eurocarpatica, Sfântu Gheorge, 2003.

- [4] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London, 1989.
- [5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.