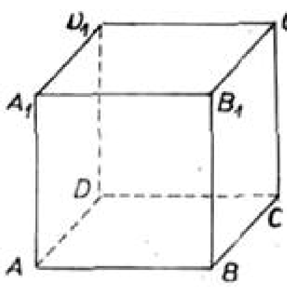
Platon Dimić (Beograd)

NEKA PITANJA U VEZI SA KOCKOM

Obično već i deca predškolskog uzrasta znaju šta je kocka, tj. umeju da kažu da li neki predmet koji im se pokaže ima ili nema oblik kocke. Kasnije, u nižim razredima osnovne škole, učenici nauče i da nacrtaju kocku. Oni je obično crtaju onako kao što je to prikazano na sl. 1, ali ne umeju da obrazlože zašto su na slici neke od duži kojima su prikazane ivice kocke kraće, a neke duže, i zašto su neki od uglova koje zaklapaju te duži pravi, a neki kosi, iako su u stvarnosti sve ivice kocke međusobno jednake, a svi uglovi na njenim stranama pravi. To će im biti objašnjeno tek znatno kasnije. Ali oni primećuju da pomenuta slika, kada je posmatraju, ostavlja na njih uglavnom isti utisak kao i žičani ili kartonski model kocke, pa se tom slikom služe, ne tražeći nikakva potpunija objašnjenja.

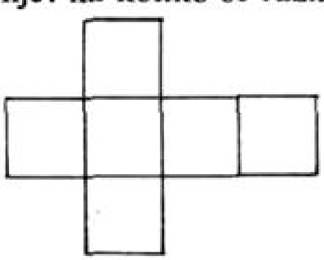


Sl 1.

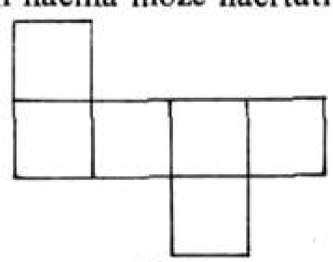
Zatim, u starijim razredima osnovne škole, učenici nauče i da definišu kocku. Za njih je ona geometrijsko telo ograničeno sa šest podudarnih kvadrata, što je pravilna definicija kocke. Oni se, istina, ne upuštaju u ispitivanje pravilnosti ove definicije (tj. ne postavljaju pitanje o tom da li se, recimo, pomoću šest podudarnih kvadrata mogu ograničti uvek samo istovetni, podudarni delovi prostora, i sl.), ali ovakvim, malo težim pitanjima, ni mi se sad, ovde, nećemo baviti.

Evo, međutim, tri zanimljiva pitanja u vezi sa kockom čije rešavanje nije suviše teško ni za učenike osnovne škole.

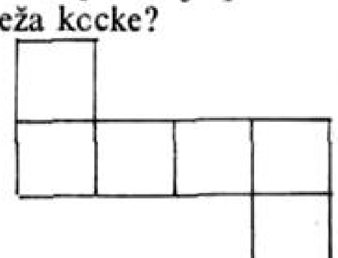
1. Tako, na primer, već i učenici osnovne škole umeju da nacrtaju »mrežu kocke«. Oni je obično crtaju onako kao što je to predstavljeno na sl. 2, ali se lako uviđa da se ona može nacrtati i drukče. Jasno je, na primer, da se i od komada kartona, izrezanog onako kao što je to pokazano na sl. 3 i sl. 4, kada se taj karton ispresavija po ivicama nacrtanih kvadrata, može sklopiti model kocke. I onda se postavlja pitanje: na koliko se različitih načina može nacrtati mreža kocke?



Sl. 2



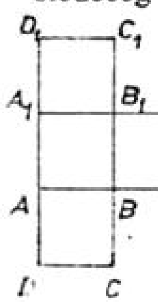
Sl. 3



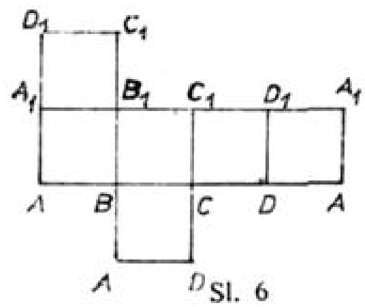
Sl. 4

Da bismo odgovorili na ovo pitanje imajmo u vidu da se mreža kocke, prema onome kako se ona obično definiše, dobija kad se zamišljeni model kocke raseče duž 7 kockinih ivica, no tako da svaka od 6 kockinih strana ostane ipak spojena bar duž po jedne od nerasečenih ivica sa ostalim stranama kocke, i zatim se sve kockine strane polože u istu ravan. I onda pođimo redom.

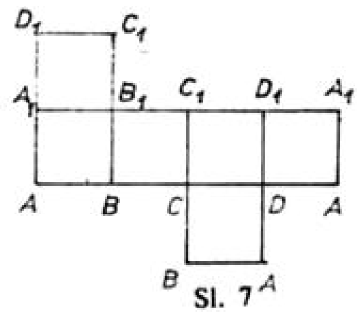
Pretpostavimo najpre da smo omotač kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ rasekli duž jedne njegove bočne ivice (npr. duž njegove ivice AA_1, sl. 1), i da smo kvadrate koji predstavljaju gornju i donju osnovu kocke ostavili neodvojene, redom, samo od po jedne od bočnih strana kocke. Ako posle toga sve strane kocke položimo u istu ravan, dobijamo ukupno $4\times4=16$ figura, ali kada ih nacrtamo, uverićemo se da su od njih samo 6 međusobno različite, tj. da se ne mogu ni putem pomeranja u istoj ravni, ni putem prevrtanja međusobno poklopiti. To su figure sledećeg oblika:



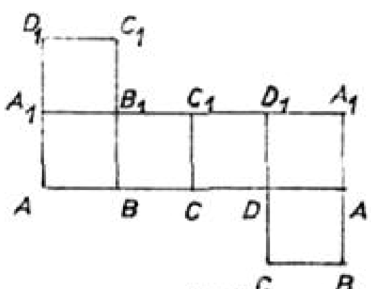
Sl. 5



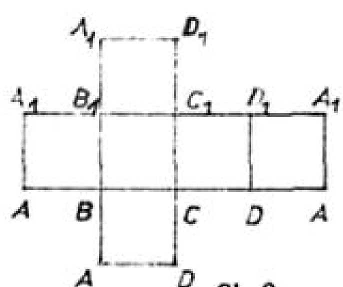
Sl. 6



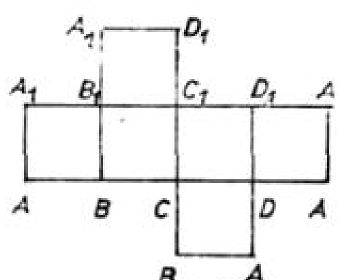
Sl. 7



Sl. 8



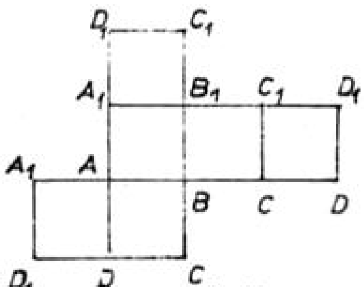
Sl. 9



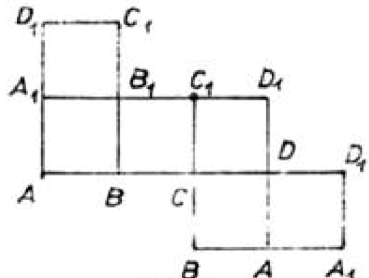
Sl. 10

Uverite se i sami da je tako.

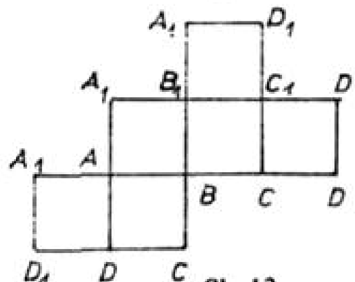
Pretpostavimo, dalje, da smo omotač kocke rasekli duž dve njegove bočne ivice (npr. duž ivica AA_1 i DD_1, sl. 1) i da smo kvadrate koji predstavljaju gornju i donju osnovu ostavili neodvojene, redom, od po jedne od tri međusobno neodvojene bočne strane kocke; sem toga da smo onu odvojenu bočnu stranu ADD_1A_1 priključili jednoj od dve osnove (npr., najpre donjoj osnovi, pa onda gornjoj osnovi) kocke. U tom slučaju, polaganjem svih strana kocke u istu ravan moglo bi se formirati ukupno $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ figura, od kojih bi se, međutim, samo neke razlikovale od onih koje smo već ranije otkrili. To bi bile figure sledećeg oblika:



Sl. 11

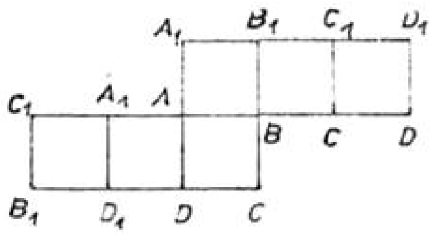


Sl. 12

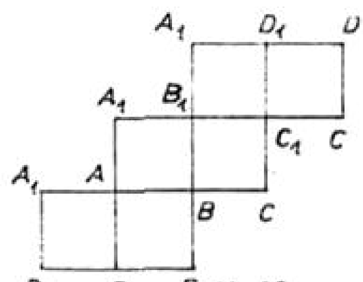


Sl. 13

Ali mi možemo jednu od osnova, na primer gornju, ostaviti nerazdvojenu od one bočne strane koja se odvaja od ostale tri i priključuje drugoj osnovi, i u tom slučaju pokazaće se da za mrežu kocke možemo dobiti i figuru oblika kakva se vidi na sl. 14.



Sl. 14



Sl. 15

Uverite se da je i ovo tačno.

Naposletku, pretpostavimo da smo omotač kocke rasekli duž tri njegove bočne ivice (npr., duž ivica AA_1, DD_1 i CC_1) tako da su od njegovih bočnih strana ostale spojene samo dve strane. Tada, pokušamo li da na bilo koji drugi način izvršimo dalje razdvajanje strana kocke u cilju dobijanja njene mreže, uverićemo se da tu mrežu možemo dobiti još samo u jednom novom obliku, i to u onom koji je prikazan na sl. 15.

Sva dalja ispitivanja pokazuju da se još koji novi oblik kockine mreže ne može dobiti.

(Nastavak u idućem broju lista.)

Platon Dimić (Beograd)

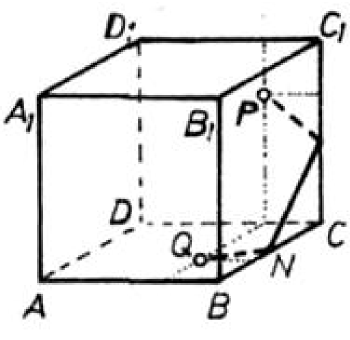
NEKA PITANJA U VEZI SA KOCKOM*

2. Na *osnovu crtanja kockine mreže može se rešiti i jedno prak*tično pitanje u vezi sa kockom, i to sledeće: odrediti najkraću liniju na površi kocke koja spaja dve tačke sa njenih dveju strana.

Činjenica je, naime, da svakoj tački na površi kockinog modela odgovara po jedna tačka na kockinoj mreži i da linije koje spajaju dve tačke na kockinoj mreži ne menjaju svoju dužinu kad se ta mreža sklopi u kockin model. Prema tome, ako se odredi najkraća od svih linija koje vezuju dve tačke na kockinoj mreži, ta ista linija će biti istovremeno i najkraća od svih linija koje vezuju dve odgovarajuće tačke na kockinom modelu; a da bi se odredila najkraća linija koja spaja dve tačke na kockinoj mreži treba uzeti u obzir sve one oblike kockine mreže za koje se ne isključuje mogućnost da se na njima pojavi i ta najkraća tražena linija, pa utvrditi u kom slučaju se ona stvarno pojavljuje.

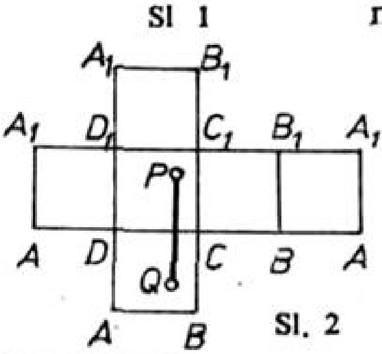
To ćemo prikazati na sledeća dva primera.

Primer 1. — Na kocki sa ivicom dužine a (sl. 1) leže tačke P i Q. Tačka P leži na strani CC_1D_1D tako da je udaljena kako od ivice CC_1, tako i od ivice C_1D_1 za $a/4$, a tačka Q leži na strani $ABCD$ tako da je udaljena kako od ivice AB, tako i od ivice BC za $a/4$. Odrediti najkraću liniju na površi kocke koja spaja ove dve tačke.

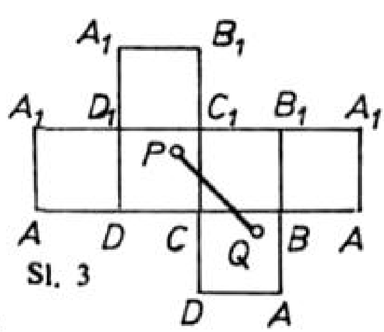


Sl 1

S obzirom na položaje tačaka P i Q na datoj kocki, lako se uviđa da najkraća linija koja ih spaja mora ležati ili na njenim stranama CC_1D_1D i $ABCD$ ili na stranama CC_1D_1D, BCC_1B_1 i $ABCD$. Stoga ćemo nacrtati njenu mrežu sa tačkama P i Q na sledeća dva načina:



Sl. 2



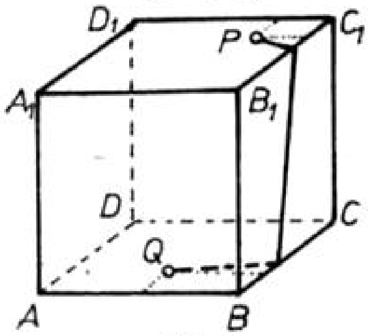
Sl. 3

---

* Nastavak članka objavljenog u ML XIII, 3

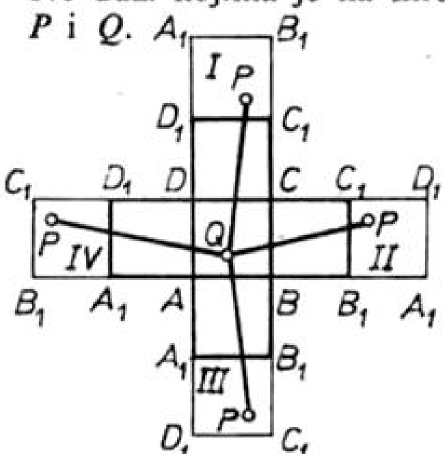
Na osnovu položaja tačaka P i Q na sl. 1 i sl. 2, a koristeći se i Pitagorinim pravilom, lako se utvrđuje da je u ovom slučaju $PQ=1,5\,a$, a u drugom slučaju $PQ=a\sqrt{2}\approx 1,4142\,a$. Prema tome, najkraći udaljenost tačaka P i Q na površi kocke predstavlja izlomljena linija $PMNQ$, označena na sl. 1.

Primer 2. — Na kocki sa ivicom a (sl. 4) leže tačke P i Q. Tačka P leži na strani $A_1B_1C_1D_1$ i udaljena je kako od ivice B_1C_1, tako i od ivice AB za $\frac{a}{4}$, a tačka Q leži na strani $ABCD$ i udaljena je od ivice AB za $\frac{a}{4}$, a od ivice BC za $\frac{a}{2}$. Odrediti najkraću liniju na površi kocke koja spaja ove dve tačke.



Sl. 4

Kako tačke P i Q leže na dvema suprotnim stranama kocke, tj. na njenoj gornjoj i donjoj osnovi, to bi sad trebalo nacrtati sve one oblike kockine mreže na kojima postoji mogućnost da se te dve tačke, preko jedne ili više kockinih bočnih strana, spoje po jednom duži; ali do rešenja zadatka možemo doći u ovom slučaju i putem skraćenog postupka na sledeći način: ako najpre nacrtamo samo »krst« sastavljen od kvadrata koji čine, na primer, donja osnova kocke i njene četiri bočne strane, pa docrtamo, redom, pored svake bočne strane kvadrat koji predstavlja gornju osnovu, onako kao što je to učinjeno na sl. 5. Na osnovu tog crteža moći će se sa iste slike odrediti sve duži kojima je na mreži nacrtane kocke moguće povezati tačke P i Q.



Sl. 5

Vidimo, naime, da je u prvom i trećem od navedenih slučajeva, na osnovu Pitagorinog pravila,

$$PQ=\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+(2a)^2}=\frac{a}{4}\sqrt{65}\,;$$

da je u trećem slučaju

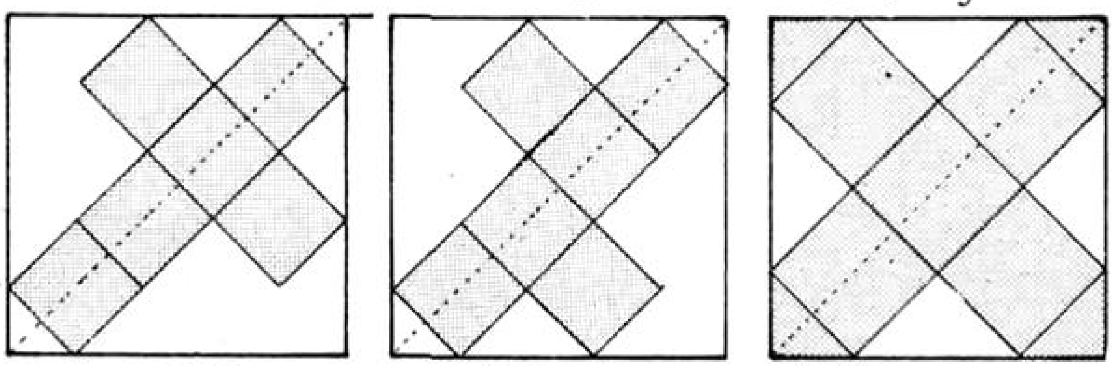
$$PQ=\sqrt{\left(\frac{7a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{4}\sqrt{53}\,;$$

i da je u četvrtom slučaju $PQ=\sqrt{\left(\frac{9a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{4}\sqrt{85}$. Zato u ovom slučaju najkraći put između tačaka P i Q na kockinoj površi izgleda onako kao što je predstavljen izlomljenom linijom $PRSQ$ an sl. 4.

3. Naposletku, da rešimo i ovo pitanje: kako se može iz komada kartona kvadratnog oblika iseći mreža što veće kocke.

Za rešavanje ovog zadatka od značaja je da li se zahteva da tražena mreža kocke bude sastavljena samo od potpunih kvadrata (onako kako se ona obično crta kada se ne postavljaju nikakva ograničenja u pogledu *veličine kartona iz kog se iseca*), *ili* ta mreža može da bude sastavljena i iz figura koje tek zajednički, kada se mreža sklopi, predstavljaju kvadrate.

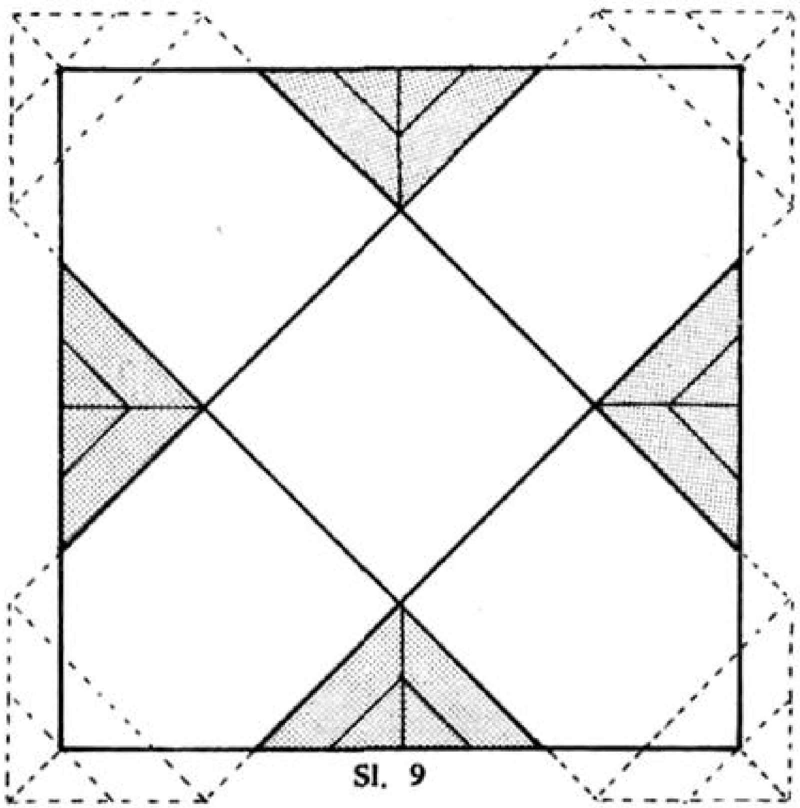
U prvom slučaju lako se uviđa da se mreža moguće najveće kocke dobija ako se ona iseče iz datog kvadrata onako kao što je to prikazano na sl. 6 i sl. 7. U oba ova slučaja dijagonala datog kvadrata stranice a iznosi koliko 5 ivica a_1 nađene kocke, to je u oba ova slučaja $a_1=\frac{a\sqrt{2}}{5}$.



Sl. 6 Sl. 7 Sl. 8

Međutim, u slučaju da se tražena mreža ne mora sastojati iz samih kvadrata, iz datog kvadrata može se dobiti i mreža veće kocke. To pokazuje sl. 8, iz koje se vidi da se šesti kvadrat tražene mreže sklapa od 4 trougla, koji preostaju u uglovima datog kvadrata, izvan nacrtanog »krsta« od 5 kvadrata. Mreža kocke biće i u ovom slučaju sastavljena iz međusobno povezanih delova, a dužina kockine ivice biće u ovom slučaju $a_1=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ali ni ovo nije još najveća mreža kocke koja se može iseći iz datog kvadrata. Jer, ako se dopusti da mreža kocke može biti sastavljena i od međusobno nepovezanih delova, koji se pri sklapanju mreže dolepljuju jedan do drugog, onda se ona može iz datog kvadrata iseći tako da ne bude uopšte otpadaka, te da se tako dobije mreža zaista najveće kocke. A kako to može da bude izvedeno prikazano je na sl. 9, tako da čitalac može sam da utvrdi kolika će biti ivica dobijene kocke.



Sl. 9

Zadaci

1. Odrediti najkraći put na površi kocke (sl. 1) između: a) tačke A i tačke C_1; tačke L koja polovi ivicu AD i tačke M koja polovi ivicu CC_1; i c) dve proizvoljno izabrane tačke na površi kocke.

2. Ono što je izloženo u vezi sa određivanjem najkraćeg puta između dve tačke na površi kocke primenite i na određivanje najkraćeg puta između dve tačke na površi kvadra i odredite: a) najkraći put između dve tačke koje se nalaze na krajevima jedne njegove dijagonale; b) između tačaka koje polove dve njegove ivice koje se mimoilaze; i c) između dve proizvoljno izabrane tačke na površi kvadra.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија