

Регионален натпревар 2016

I година

1АБ. Да се определат сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ така што

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \text{ и } a + b + c = 23.$$

Решение. Равенката $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$ можеме да ја запишеме во облик

$$99(c-a) + 10(d-b) = 3 \cdot 99.$$

Сега, од својствата на деливост во множеството природни броеви следува $99 | 10(d-b)$. Бидејќи $d-b$ или $b-d$ е цифра, тоа е можно ако и само ако $10(d-b) = 0$, т.е. $d = b$. Но тогаш $99(c-a) = 3 \cdot 99$, од каде добиваме $c-a = 3$, т.е. $c = a+3$. Ако пак сега замениме во $a+b+c = 23$ добиваме $a+b+a+3 = 23$, т.е. $b = 2(10-a)$. Бидејќи b е цифра, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, па според тоа $10-a \leq 4$, т.е. $a \geq 6$. Бидејќи и c е цифра од равенството $c = a+3$, добиваме дека $a = 6$. Сега е јасно дека $c = 9$ и $b = 8$.

Значи, единствениот број кој го задоволува условот од задачата е бројот $\overline{abcd} = 6898$.

2Б. На еден квиз натпреварувачот одговара на 24 прашања. Ако точно одговори на поставеното прашање тој освојува 4 поени, а во спротивно губи 1,4 поени. На колку прашања натпреварувачот не го знаел одговорот, ако на крајот од натпреварувањето тој освоил 69 поени?

Решение. Нека x е бројот на точно одговорени прашања, а y бројот на неточно одговорени прашања. Јасно $x + y = 24$, односно $y = 24 - x$. Од друга страна вкупниот број на освоени поени е $4x - 1,4y = 69$. Ако замениме $y = 24 - x$ имаме $4x - 1,4(24 - x) = 69$ од каде наоѓаме $x = 19$.

Значи, бројот на неточно одговорени прашања е $y = 24 - x = 24 - 19 = 5$.

2А. Јане прочитал пет книги. Од петте книги може да се формираат 5 множества од по четири книги. Четирите книги од секое од овие множества заедно имале 913, 973, 873, 1011 и 1002 страници. Колку страници имала секоја од петте книги?

Решение. Ако бројот на страниците на книгите се a, b, c, d, e соодветно, тогаш треба да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 913 \\ a + b + c + e = 973 \\ a + b + d + e = 873 \\ a + c + d + e = 1011 \\ b + c + d + e = 1002 \end{cases}$$

Ако ги собереме сите равенки и поделиме со 4, се добива $a+b+c+d+e=1193$.

Ако од оваа равенка се одземе секоја од петте равенки од системот, ќе се добие

$$a=182, b=191, c=320, d=220, e=280 \text{ страници.}$$

3АБ. Упрости го изразот:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{2x-6}{3x-3} \cdot \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x+3}{x-3} + \frac{x^2+4x-9}{x^2-5x+6} \right)$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} - \frac{2x-6}{3x-3} \cdot \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x+3}{x-3} + \frac{x^2+4x-9}{x^2-5x+6} \right) &= \frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x-3)}{3(x-1)} \cdot \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x+3}{x-3} + \frac{x^2+4x-9}{(x-2)(x-3)} \right) \\ &= \frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x-3)}{3(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-3) - (2x+3)(x-2) + x^2+4x-9}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x-3)}{3(x-1)} \cdot \frac{3x-6}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x+1}{x-1} - \frac{2 \cdot 3(x-2)}{3(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1. \end{aligned}$$

4А. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD и дијагонала AC таква што $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{CD}$. Ако O е пресекот на дијагоналите, докажи дека средините на отсечките AO , BC и DO се темиња на рамностран триаголник.

Решение. Од сличноста на триаголниците ABO и CDO следува $\overline{CO} : \overline{AO} = \overline{CD} : \overline{AB}$, а од тоа

$$(\overline{CO} + \overline{AO}) : \overline{AO} = (\overline{CD} + \overline{AB}) : \overline{AB}$$

односно

$$\overline{AC} : \overline{AO} = \overline{AC} : \overline{AO},$$

па затоа $\overline{AO} = \overline{AB}$. Значи, триаголникот ABO е рамностран, аналогно и $\triangle CDO$ е рамностран. Тоа значи дека $BP \perp AO$ (P е средина на $\overline{AO}$), односно триаголникот BSP е правоаголен, со хипотенуза BC . Но, бидејќи PQ е тежишна линија над хипотенузата BC , следува

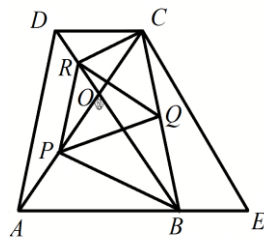
$$\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{BC}. \quad (1)$$

Аналогно, од правоаголниот триаголник BCR имаме

$$\overline{RQ} = \frac{1}{2} \overline{BC} \quad (2)$$

Понатаму, во триаголникот ADO , PR е средна линија, па важи

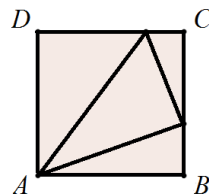
$$\overline{PM} = \frac{1}{2} \overline{AD}. \quad (3)$$



Конечно, ако се земе предвид условот на задачата $\overline{AO} = \overline{AB}$ и (1), (2) и (3) заклучуваме дека триаголникот PQR е рамностран, со страна еднаква на половината од кракот $\overline{AD}$.

4Б. Даден е квадрат $ABCD$. Точките X и Y лежат на страните BC и CD , соодветно. Должината на отсечките XY, AX и AY се 3, 4 и 5 соодветно. Пресметај ја должината на страната на квадратот.

Решение. Нека должината на страната на квадратот е a . Триаголникот AXY е правоаголен (страните се 3, 4 и 5) со прав агол кај темето X . Бидејќи $\angle CXY = \angle XAB$ (агли со нормални краци) следува дека $\triangle CXY$ е сличен со $\triangle BAX$. Добиваме дека страните им се пропорционални, односно $\frac{CX}{BA} = \frac{XY}{AX}$ или $\frac{CX}{a} = \frac{3}{4}$. Непосредно добиваме дека $\frac{BX}{a} = \frac{a}{4}$.



Од Питагоровата теорема за $\triangle ABX$ добиваме $a^2 + (\frac{a}{4})^2 = 4^2$, од каде $a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$.

II година

1А. Реши ја ирационалната равенка

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5.$$

Решение. За $x \neq -5$ имаме:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5 & \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}=5\sqrt{x^2+x+6}-5\sqrt{x^2-x-4} \\ & \Leftrightarrow 6\sqrt{x^2-x-4}=4\sqrt{x^2+x+6} \\ & \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-x-4}=2\sqrt{x^2+x+6}. \end{aligned}$$

Квадрирајќи ја последната равенка добиваме

$$9(x^2-x-4)=4(x^2+x+6) \Leftrightarrow 5x^2-13x-60=0 \Leftrightarrow x_1=5, x_2=-\frac{12}{5}.$$

Со проверка се утврдува дека двете решенија припаѓаат на дефиниционата вредност и се решенија и на почетната равенка.

1Б. Докажи дека ако m и n се реални броеви со еднакви знаци, тогаш бројот

$$B=(m^3+m^2n-mn^2-n^3)^2-(m^3-m^2n-mn^2+n^3)^2$$

е ненегативен.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} B &= (m^3+m^2n-mn^2-n^3+m^3-m^2n-mn^2+n^3)(m^3+m^2n-mn^2-n^3-(m^3-m^2n-mn^2+n^3)) \\ &= (2m^3-2mn^2)(2m^2n-2n^3)=4(m^3-mn^2)(m^2n-n^3) \\ &= 4mn(m^2-n^2)(m^2-n^2)=4mn(m^2-n^2)^2. \end{aligned}$$

Следува дека бројот B е ненегативен, бидејќи mn е ненегативен број кога m и n се со еднакви знаци.

2АБ. Разликата на нулите на квадратниот трином $x^2 + px + q$ е a . Определи го квадратниот трином така што збирот $p + q$ има најмала вредност.

Решение. Нека x_1, x_2 се нулите на квадратниот трином $x^2 + px + q$, т.е. се корените на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$. Од условот на задачата следува $x_1 - x_2 = a$. Според Виетовите формули имаме $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$. Значи, изразот $p + q$ може да се запише во облик $p + q = x_1 x_2 - (x_1 + x_2)$. Понатаму, од равенството $x_1 - x_2 = a$ имаме $x_2 = x_1 - a$, па ако замениме во претходното равенство добиваме

$$p + q = x_1(x_1 - a) - x_1 - (x_1 - a) = x_1^2 - (a + 2)x_1 + a = (x_1 - \frac{a+2}{2})^2 + a - \frac{(a+2)^2}{4}.$$

Последниот израз е најмал ако и само ако $x_1 = \frac{a+2}{2}$ и притоа важи $x_2 = \frac{2-a}{2}$. Отука имаме $p = -2$ и $q = 1 - \frac{a^2}{4}$. Бараниот трином е

$$y = x^2 - 2x + 1 - \frac{a^2}{4}.$$

3АБ. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}.$$

Решение. Очигледно $x \neq 0$, бидејќи во спротивно од втората рабeka добиваме $y^2 = -3$ што во множеството реални броеви не е можно. Воведуваме смена $y = tx$ со која системот го добива обликот

$$\begin{cases} x^2(2 - 3t + t^2) = 3 \\ x^2(1 + 2t - 2t^2) = 6 \end{cases} \quad (1)$$

Ако првата равенка на системот ја поделиме со втората равенка, ја добиваме равенката $\frac{2-3t+t^2}{1+2t-2t^2} = \frac{1}{2}$, која е определена за $t \neq \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Последната равенка е ја запишуваме во обликот $4t^2 - 8t + 3 = 0$ и нејзини решенија се $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{3}{2}$. Двете решенија ќе ги разгледаме како одделни случаи.

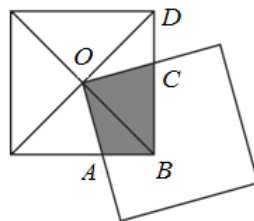
Случај 1. $t_1 = \frac{1}{2}$. Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2 = 4$, па според тоа $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Соодветно $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$. Лесно се проверува дека паровите $(x_1, y_1) = (2, 1)$ и $(x_2, y_2) = (-2, -1)$ се решенија на системот.

Случај 2. $t_2 = \frac{3}{2}$. Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2 = -12$, па според тоа, во овој случај системот нема решение.

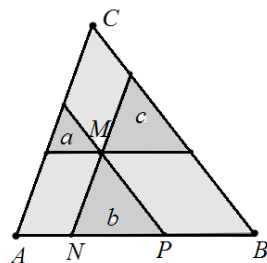
Конечно, единствени решенија на системот се $(x_1, y_1) = (2, 1)$ и $(x_2, y_2) = (-2, -1)$.

4А. Дадени се два квадрати со страна 1, така што едно теме на едниот квадрат е центар на другиот квадрат. Која е најмалата можна вредност на плоштината на пресечниот дел?

Решение. Да го разгледаме цртежот десно. Аглите $\angle COD$ и $\angle AOB$ се еднакви како агли со нормални краци, $\angle OBA = \angle ODC = 45^\circ$ и $\overline{OD} = \overline{OB}$, па затоа следува дека $\triangle AOB \cong \triangle COD$. Значи, бараната плоштина е еднаква на плоштината на триаголникот BOD , т.е. таа е еднаква на четвртина од плоштината на квадратот, односно на $\frac{1}{4}$. Бидејќи плоштината на пресечниот дел е константна, таа е и најмалата можна вредност.



4Б. Нека M е внатрешна точка на триаголникот ABC . Низ M се повлечени прави паралелни на страните на триаголникот. Нека плоштините на штрафираниите делови се означени со a , b и c (види цртеж). Докажи дека плоштината P на триаголникот ABC е $P = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$.



Решение. Очигледно триаголниците со плоштини a , b и c се слични со триаголникот ABC . Од сличноста на триаголниците следува

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}, \quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{AB}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}.$$

Со собирање на горните равенства добиваме

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{AN} + \overline{NP} + \overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1,$$

од каде следува

$$\sqrt{P} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}, \quad \text{т.е.} \quad P = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2.$$

III година

1А. 2Б. Определи ги $\log_a b$, $\log_{ab} b$, $\log_{ab^2} b$ и $\log_{ab^3} b$, ако

$$\log_a b - \log_{ab} b = \log_{ab^2} b - \log_{ab^3} b.$$

Решение. За $b=1$, равенството е точно за било кое a , затоа што сите логаритми се еднакви на нула. За $b > 0, b \neq 1$, дадениот услов може да го запишеме во обликот

$$\frac{1}{\log_b a} - \frac{1}{\log_b a + 1} = \frac{1}{\log_b a + 2} - \frac{1}{\log_b a + 3}.$$

Нека $\log_b a = x$. Тогаш од последното равенство следува

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3},$$

од каде наоѓаме $x = -\frac{3}{2}$. Значи, бараните вредности се

$$\log_a b = -\frac{2}{3}, \log_{ab} b = -2, \log_{ab^2} b = 2, \log_{ab^3} b = \frac{2}{3}.$$

1Б. Решај ја равенката

$$4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x.$$

Решение. Имаме $4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x \Leftrightarrow 2^{2x} + 3^{2x} = 2 \cdot 2^x \cdot 3^x$. Последната равенка ќе ја поделиме со $2^x \cdot 3^x$ и добиваме $(\frac{2}{3})^x + (\frac{3}{2})^x = 2$. Сега воведуваме смена $(\frac{2}{3})^x = t$ и добиваме $t + \frac{1}{t} = 2$, каде $t \neq 0$. Понатаму добиваме $t^2 - 2t + 1 = 0$, односно $(t-1)^2 = 0$. Значи, $t = 1$, од каде за x добиваме $(\frac{2}{3})^x = 1 = (\frac{2}{3})^0$, односно $x = 0$.

2А. 4Б. За триаголникот ABC важи: $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 8$, $\beta = 120^\circ$. Правата низ темето A што е нормална на страната AB и правата низ темето C што е нормална на BC се сечат во точка D . Пресметај ја должината на отсечката CD .

Решение. Од условите во задачата следува дека $\angle ADC = 60^\circ$. Нека правата CM е нормална со AB , $M \in AB$ и нека правата CN е нормална со AD , $N \in AD$. Тогаш,

$$\angle NCD = 30^\circ, \angle CBM = 60^\circ \text{ и } \angle MCB = 30^\circ.$$

Оттука,

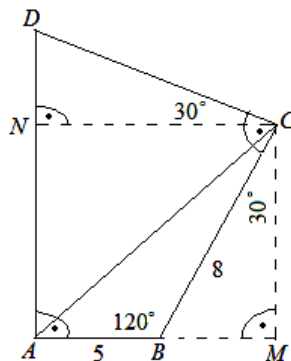
$$\overline{BM} = \overline{BC} \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

и затоа

$$\overline{NC} = \overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = 5 + 4 = 9.$$

Конечно, од правоаголниот триаголник NCD имаме

$$\overline{CD} = \frac{\overline{NC}}{\cos 30^\circ} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}.$$



3А. Докажи дека во секој триаголник важи $a^2 = (b-c)^2 + 4P \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, каде a, b, c се должините на страните на триаголникот, α е аголот помеѓу страните b и c и P е плоштината на триаголникот.

Решение. Од косинусна теорема имаме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos \alpha) = (b-c)^2 + 4P \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Да забележиме дека

$$\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

од каде се добива бараното равенство.

3Б. Докажи дека во секој триаголник важи

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} = \frac{1}{r^2},$$

каде a, b, c се должините на страните на триаголникот, s е неговиот полупериметар и r е радиусот на впишаната кружница.

Решение. Да забележиме дека

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} = \frac{3s-a-b-c}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Од Херонова формула $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, а од друга страна $P = sr$. Горното равенство го добива обликот

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} = \frac{s^2}{P^2} = \frac{s^2}{r^2 s^2} = \frac{1}{r^2},$$

што и требаше да се докаже.

4А. Определи ги $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ за кои важат равенствата

$$\cos x = 2 \cos^3 y, \sin x = 2 \sin^3 y.$$

Решение. Заради $\sin y, \cos y \neq 0$ добиваме дека $\frac{\sin x}{\sin y} = 2 \sin^2 y$ и $\frac{\cos x}{\cos y} = 2 \cos^2 y$ од каде следува $\frac{\sin x}{\sin y} + \frac{\cos x}{\cos y} = 2$, $\sin(x+y) = \sin 2y$, па затоа $2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+3y}{2} = 0$. Заради $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, добиваме дека $\frac{x-y}{2} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ и за да $\sin \frac{x-y}{2} = 0$ мора да е $x = y$. Со замена во почетните услови, добиваме $\sin x = 2 \sin^3 x$ или дека $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $x = y = \frac{\pi}{4}$. Од друга страна, заради $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, добиваме дека $\frac{x+3y}{2} \in (0, \pi)$ и за да $\cos \frac{x+3y}{2} = 0$ мора да е $x+3y = \pi$. Со замена во почетните услови, добиваме $\sin 3y = \sin(\pi - 3y) = \sin x = 2 \sin^3 y$ од каде $3 \sin y - 4 \sin^3 y = 2 \sin^3 y$, т.е. $\sin y = 2 \sin^3 y$, односно дека $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $y = \frac{\pi}{4}$ и затоа $x = \pi - 3y = \frac{\pi}{4}$.

IV година

1А. Определи го најголемиот член на низата $a_n = \frac{2016^n}{n!}, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Од

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2016}{n+1},$$

следува дека низата расте до 2015-от член кој е еднаков со 2016-от, а потоа опаѓа. Значи, најголеми членови на низата се a_{2015} и a_{2016} .

1Б. Функцијата $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е определена со

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2-2x+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пресметај

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016).$$

Решение. Дадената функција ја трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2-2x+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2})(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})} = \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x+1 - (x-1)} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}). \end{aligned}$$

Значи $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$. Сега имаме

$$2f(1) = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0}$$

$$2f(2) = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1}$$

$$2f(3) = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

.....

$$2f(2014) = \sqrt[3]{2015} - \sqrt[3]{2013}$$

$$2f(2015) = \sqrt[3]{2016} - \sqrt[3]{2014}$$

$$2f(2016) = \sqrt[3]{2017} - \sqrt[3]{2015}$$

Собирајќи ги горните равенства, добиваме

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{2017} + \sqrt[3]{2016} - 1).$$

2АБ. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \dots + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 3.$$

Решение. Бидејќи $x \neq 0$, ако равенката ја помножиме со x таа го добива обликот

$$(x-1) + (x-2) + (x-3) + \dots + 3 + 2 + 1 = 3x.$$

Левата страна на последната равенка е аритметичка прогресија, која е опаѓачка, со прв член $a_1 = x-1$, разлика $d = -1$, $a_n = 1$ и $S_n = 3x$. Бидејќи

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{1 - x + 1}{-1} + 1 = x - 1,$$

Добиваме

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{x-1+1}{2} \cdot (x-1) = \frac{x(x-1)}{2}, \text{ т.е. } x^2 = 7x.$$

Бидејќи $x \neq 0$, решение на последната равенка е $x = 7$.

3А, 4Б. Низата броеви $a_1, a_2, \dots$ е зададена со

$$a_1 = 1, a_2 = 143 \text{ и } a_{n+1} = 5 \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}, \text{ за } n \geq 2.$$

Докажи дека сите членови на низата се цели броеви.

Решение. *Прв начин.* Да забележиме дека

$$a_3 = 5 \frac{a_1 + a_2}{2} = 5 \cdot \frac{144}{2} = 5 \cdot 72 = 360.$$

За $n \geq 4$ имаме

$$a_n = 5 \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \text{ и } a_{n-1} = 5 \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2}}{n-2}.$$

Со алгебарски трансформации добиваме

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} = \frac{n-2}{5} a_{n-1},$$

т.е.

$$a_n = \frac{5}{n-1} \left(\frac{n-2}{5} a_{n-1} + a_{n-1} \right),$$

па затоа

$$a_n = \frac{5}{n-1} \cdot \frac{n+3}{5} a_{n-1} = \frac{n+3}{n-1} a_{n-1}.$$

Според тоа,

$$a_n = \frac{(n+3)(n+2)\dots 7}{(n-1)(n-2)\dots 3} a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n \in \mathbb{N}.$$

Втор начин. Ако воведеме ознака $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, тогаш $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Значи, доволно е да докажеме дека S_n е цел број. Од самата дефиниција е јасно дека

$$S_1 = 1, S_2 = 144, \text{ а од } a_n = 5 \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$$

добиваме

$$S_{n+1} - S_n = \frac{5}{n} S_n, \text{ т.е. } S_{n+1} = \frac{n+5}{n} S_n.$$

Значи, за $n \geq 2$ добиваме

$$S_{n+1} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)\dots 7}{n(n-1)(n-2)\dots 2} S_2 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 144 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}.$$

Но, броевите $n+5, n+4, n+3, n+2, n+1$ се пет последователни природни броеви па еден од нив е делив со 5. Значи, $S_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, што требаше и да се докаже.

4А. Најди го бројот на сите подмножества од три различни елементи од множеството $\{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2000}\}$ така што тие елементи се последователни членови на растечка геометричка прогресија.

Решение. Нека трите броеви од множеството се $2^a, 2^b, 2^c, 1 \leq a < b < c \leq 2000$.

За да овие броеви формираат растечка геометричка прогресија потребно е $\frac{2^b}{2^a} = \frac{2^c}{2^b}$

, односно $2^{b-a} = 2^{c-b}$, $b-a = c-b$, т.е. $c = 2b - a$. Од овде заклучуваме дека за

$1 \leq a < b$, можеме да најдеме c , така да трите избрани броеви формираат растечка геометриска прогресија со дополнителните услови:

$$b < c \leq 2000, \quad b < 2b - a \leq 2000, \quad 0 < b - a < 2000 - b.$$

Но $b > a$, па затоа $b - a > 0$, и горните услови се еквивалентни со $b - a \leq 2000 - b$, односно $a \geq 2b - 2000$, од каде $2b \leq 2000$, па $b \leq 1000$. Значи, за секои a, b , за кои $1 \leq a < b \leq 1000$, можеме да најдеме c такво да $1 \leq a < b < c \leq 2000$ и $2^a, 2^b, 2^c$ формираат растечка геометриска прогресија. За секој избор на b , каде $2 \leq b \leq 1000$ имаме $b - 1$ избори на a , па така вкупниот број на избори на a и b е

$$\sum_{b=2}^{1000} (b-1) = \sum_{b=1}^{999} (b-1) = \frac{999 \cdot 1000}{2} = 499500.$$

Значи бројот на такви триелементни подмножества е 499500.

4Б. Броевите $3x, 4y, 5z$ формираат геометриска прогресија, а броевите $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ формираат аритметичка прогресија. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$.

Решение. Ако $3x, 4y, 5z$ формираат геометриска прогресија, тогаш

$$(4y)^2 = 3x \cdot 5z, \text{ т.е. } 16y^2 = 15xz.$$

Ако $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ формираат аритметичка прогресија, тогаш

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{x+z}{xz},$$

што е еквивалентно на $x + z = \frac{2xz}{y}$. Од првото равенство имаме дека $xz = \frac{16}{15}y^2$, па

со замена во второто равенство добиваме $x + z = \frac{32}{15}y$. Уште повеќе имаме