№1. Non-zero polynomials $P(x)$, $Q(x)$, and $R(x)$ with real coefficients satisfy the identities

$$P(x)+Q(x)+R(x)=P(Q(x))+Q(R(x))+R(P(x))=0.$$

Prove that the degrees of the three polynomials are all even.

Solution. Let n be the largest of the degrees of the three polynomials. Denote by a, b, and c the coefficients of x^n at $P(x)$, $Q(x)$, and $R(x)$, respectively (some of those coefficients might vanish).

The coefficients of x^n at $P(x)+Q(x)+R(x)$, as well as of x^{n^2} at $P(Q(x))+Q(R(x))+R(P(x))$, both vanish. Hence,

$$a+b+c=0 \qquad \text{and} \qquad ab^n+bc^n+ca^n=0. \tag{$*$}$$

Further we make use only of the two equalities in $(*)$.

The first equality yields that at least two numbers among a, b, and c are nonzero. If the third number (say, c) vanishes, then the second equality is violated. Therefore, all three polynomials have degree n, and we need to prove n is even.

Assume the contrary, for the sake of contradiction. Without loss of generality, the numbers a and b have the same sign. Changing the sign of all three numbers a, b, and c, if necessary, we achieve $a,b>0$ (this change does not break $(*)$). Then we have $c=-(a+b)<0$ and $0<a,b<|c|$; hence bc^n and ca^n are negative, and therefore

$$|bc^n+ca^n|>|bc^n|=|c|\cdot b\cdot|c|^{n-1}>a\cdot b\cdot b^{n-1}=ab^n.$$

This contradicts the secund equality in $(*)$.

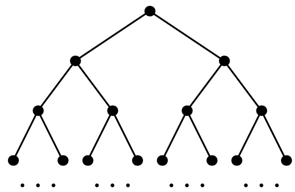
Thus, all three degrees are equal to an even number n.

Marking scheme

The points provided for differenmt parts are automatically additive!

Part 1: $\deg P=\deg Q=\deg R$.
A proof that all three degrees are equal — *2 points*
Only a proof that the two largest degrees are equal — *0 points*

Part 2; all thjjree degrees are even.
A proof that the largest degree d is even – *5 points*
A system $(*)$ is written down explicitly, with no subsequent essential advantage — *1 point instead of 5.*



№2. A ten-level 2-tree is drawn in the plane: a vertex A_1 is marked, it is connected by segments with two vertices B_1 and B_2, each of B_1 and B_2 is connected by segments with two of the four vertices C_1, C_2, C_3, C_4 (each C_i is connected with one B_j exactly); and so on, up to 512 vertices $J_1, \ldots, J_{512}$. Each of the vertices $J_1, \ldots, J_{512}$ is coloured blue or golden. Consider all permutations f of the vertices of this tree, such that (i) if X and Y are connected with a segment, then so are $f(X)$ and $f(Y)$, and (ii) if X is coloured, then $f(X)$ has the same colour. Find the maximum M such that there are at least M permutations with these properties, regardless of the colouring.

Solution. The answer is 2^{2^7}.

First we ned a suitable terminology. Similarly to 10-level 2-tree we can define a k-level 2-tree for $k \geq 1$. For convenience we suppose that all the segments between vertices are directed from a letter to the next one. The number of the letter marking a vertex we call the *level* of this vertex; thus A_1 is the only vertex of level 1, B_1 and B_2 belong to level 2 and so on). We will also call *descendants* of a vertex X all vertices which can be reached from X by directed segments.

Let T_1 and T_2 be two k-level 2-trees with coloured leaves. We call a bijection $f : T_1 \to T_2$ *isomorphism* when two conditions are satisfied: (i) if two vertices X and Y are connected by an edge in T_1, then $f(X)$ and $f(Y)$ are connected by an edge in T_2, and (ii) if X has some colour in T_1, then $f(X)$ has the same colour in T_2. When $T_1 = T_2$, we call f *automorphism* of the tree. By $\chi(k)$ we denote the minimal number of automorphism a k-level 2-tree with coloured leaves can have (the minimum is over all colourings). Our problem is to find $\chi(10)$.

We start with almost obvious

Lemma 1. Isomorphism of trees preserves the level of a vertex.

Proof. Isomorphism f cannot diminish the degree of a vertex. Indeed, neighbours of each vertex X become neighbours of $f(X)$, therefore the degree of $f(X)$ is not less than the degree of X. By pigeonhole principle it also means that the degree can not increase. It follows that the last level vertices go to the last level vertices. Therefore vertices of the previous level go to the same level, since they remain neighbours of the last-level vertices, and so on.

Now we are ready to solve the problem.

First proof of the lower bound, by induction.

Proposition 1. For each $k \geq 2$ we have $\chi(k) \geq (\chi(k-1))^2$.

Proof. In a k-level tree the descendants of B_1 (including B_1) form a $k-1$-level tree T_1. This graph has at least $\chi(k-1)$ different automorphisms. The same is true for tree T_2 formed by the descendants of B_2. Let g and h be automorphisms of T_1 and T_2 respectively. Now we can define mapping f of the whole tree applying g to descendans of B_1, h to descendants of B_2 and A to itself. Obviously f is an automorphism: for $X = A$ the condition holds since B_1 and B_2 were mapped to themselves (by Lemma 1), and for X in T_1 or T_2 because g and h are automorphisms. Thus for each pair (g, h) there is an automorphism f, different pairs produce different f, and the number of pairs is at least $(\chi(k-1))^2$.

Corollary. For $k \geq 3$ we have $\chi(k) \geq 2^{2^{k-3}}$.

Proof. This inequality is proved by induction, with Proposition 1 as induction step. It remains to check it for $k = 3$. If in a 3-level 2-tree at least one of the vertices B_1, B_2 has two descendants of the same colour, there is an automorphism exchanging these two vertices and preserving the rest. If each of B_1, B_2 has obe blue and one golden descendant, there is an automorphism exchanging B_1 and B_2 and preserving colours of their descendant. In both cases the number of automorphisms (including the identical one) is at least 2.

Second proof of the lower bound, without induction.

We already know that every 3-level 2-tree with (four) coloured leaves there are at least two colour-preservin automorphisms. Now every n-level tree, $n \geq 3$, has 2^{n-3} vertices of level $n-2$, and the descendants of each of these vertices form a 3-level tree. It is enough to consider automorphisms preserving vertices of level $n-3$ (and, a fortiori, of all lesser levels). Such an automorhism can act on the descendants of each of 2^{n-3} vertices of level $n-2$ in at least 2 ways. Thus there are at least $2^{2^{n-3}}$ such automorphisms. $\square$

It remains to construct for each $k \geq 3$ a colouring of k-level tree a colouring admitting exactly $2^{2^{k-3}}$ automorphisms. As it happens sometimes, we will prove somewhat more.

Proposition 2. For each $k \geqslant 3$ there are three colourings $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ of leaves of k-level 2-tree such that the trees with these colourings are not isomorphic, and each of these colourings admits $2^{2^{k-3}}$ automorphisms exactly.

Proof. For $k = 3$ let C_1, C_2 be the descendants of B_1, and C_3, C_4 the descendants of B_2. The three colourings are the following: C_1, C_2, C_3 blue, C_4 golden; C_1, C_2, C_3 golden, C_4 blue; C_1, C_3 blue, C_2, C_4 golden. Obviously the trees with these colourings are not isomorphic and admit two automorphisms each.

The induction step. Let $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ be the desired colourings of k-level tree. Consider the following colourings of the $(k+1)$-level tree:

- $\mathcal{M}_1$ for descendants of B_1 and $\mathcal{M}_2$ for descendants of B_2;
- $\mathcal{M}_2$ for descendants of B_1 and $\mathcal{M}_3$ for descendants of B_2;
- $\mathcal{M}_3$ for descendants of B_1 and $\mathcal{M}_1$ for descendants of B_2.

It is quite obvious that these three colourings are not isomorphic and have the desired number of automorphisms.

Comment to the example. Note that in fact we solved the following problem: find a colouring of $(n-2)$-level tree in 3 colours such that only identical automorphism preserves the colours. Indeed, there are three mutually non-isomorphic colourings of 3-level tree in 2 colours having only 2 automorphisms. We want the colouring of the descendants of each vertex of level $n-2$ to be one of these colourings. The correspondence between vertices of level $n-2$ and these three colouring must be the desired colouring of $n-2$-level tree admitting only identical automorphism.

Marking scheme

1. Answer: .... **1 point**

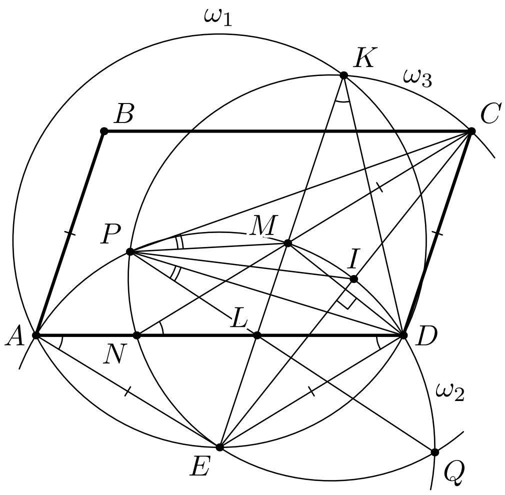
2. Lemma 1: .... **0 points**
(and points are not deducted if Lemma 1 is not proved)

3. Example and lower bound: .... **3 points each**
not additive with (1)

№3. In parallelogram $ABCD$ with acute angle A a point N is chosen on the segment AD, and a point M on the segment CN so that $AB = BM = CM$. Point K is the reflection of N in line MD. The line MK meets the segment AD at point L. Let P be the common point of the circumcircles of AMD and CNK such that A and P share the same side of the line MK. Prove that $\angle CPM = \angle DPL$.

Solution. Since $CM = AB = CD$, the triangle CMD is isosceles. Therefore, $\angle CDM + \angle DMK = = \angle CMD + \angle DMN = 180°$, and hence $MK \parallel CD$.

Let E be the reflection of C in the line MD. Then both quadrilaterals $DCME$ and $ABME$ are rhombi with equal side lengths, as $ME \parallel CD \parallel AB$ and $ME = MC = CD = AB = BM$. Now, $MK \parallel CD$ implies that the point E lies on the line KL. Taking into account that $AE = DE$, we obtain $\angle DKE = = \angle DKM = \angle DNM = \angle NDE = \angle NAE$. So the quadrilateral $AEDK$ is cyclic in some circle ω_1.



Let ω_2 and ω_3 denote the circumcircles of the triangles AMD and CNK, respectively (since $AE = = DE = ME$, the point E is the center of ω_2). By symmetry in MD, the quadrilateral $CKNE$ is an isosceles trapezoid, so the point E lies on ω_3. Let ω_2 and ω_3 meet again at Q. The point $L = AD \cap KE$ is the radical center of the circles ω_1, ω_2, and ω_3, so L lies on line PQ.

Let the ray EC meet ω_2 at I. Then the arcs IM and ID in circle ω_2 are congruent, so that I lies on the internal angle bisector of $\angle DPM$. But the point I lies also on the internal angle bisector of $\angle CPQ$, since $\angle QPI = \angle QEI/2 = \angle QEC/2 = \angle QPC/2$. Therefore, the lines PM and PD are symmetric to each other with respect to the internal angle bisector of $\angle QPC$, which yields the desired equality $\angle CPM = \angle DPL$.

Remark 1. The points M and D are isogonally conjugate with respect to the triangle CPQ, while I is the incenter of that triangle.

Remark 2. The point M is the incenter of the triangle AKD.

Marking scheme

An unfinished analytical solution (by means of Cartesian coordinates, complex numbers, vectors, trigonometric formulas, etc.): .... **0 points**

Partial score

The points listed below are to be added to each other.

Let Q denote the second meeting point of the circles (AMD) and (CNK).

1. A proof that $MK \parallel CD$: .... **1 point**
2. A proof that the quadrilateral $AEDK$ is cyclic: .... **2 points**
3. A proof that L lies on the line PQ: .... **1 point**
4. A reduction of the problem statement to the fact that L lies on PQ .... **3 points**

№4. In triangle ABC, a point M is the midpoint of AB, and a point I is the incentre. Point A_1 is the reflection of A in BI, and B_1 is the reflection of B in AI. Let N be the midpoint of A_1B_1. Prove that $IN > IM$.

First solution. Due to symmetry, we get $IA_1 = IA$ и $IB_1 = IB$. Therefore,

$$\begin{aligned}4(IN^2 - IM^2) &= \left|\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IB_1}\right|^2 - \left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right|^2 \\ &= \left(IA_1^2 + IB_1^2 + 2IA_1 \cdot IB_1 \cdot \cos\angle A_1IB_1\right) - \left(IA^2 + IB^2 + 2IA \cdot IB \cdot \cos\angle AIB\right) \\ &= 2IA \cdot IB \cdot (\cos\angle A_1IB_1 - \cos\angle AIB).\end{aligned}$$

So, to prove the required inequality $IN > IM$, it suffices to show that $\cos\angle A_1IB_1 > \cos\angle AIB$.

Notice that $\phi = \angle AIB = 90^\circ + \angle ACB/2 > 90^\circ$. By symmetry again, we have $\angle A_1IB = \angle AIB = \angle AIB_1 = \phi$. Therefore, if $\phi \le 120^\circ$, then

$$\angle A_1IB_1 = 360^\circ - (\angle A_1IB + \angle AIB + \angle AIB_1) = 360^\circ - 3\phi \in [0^\circ, \phi),$$

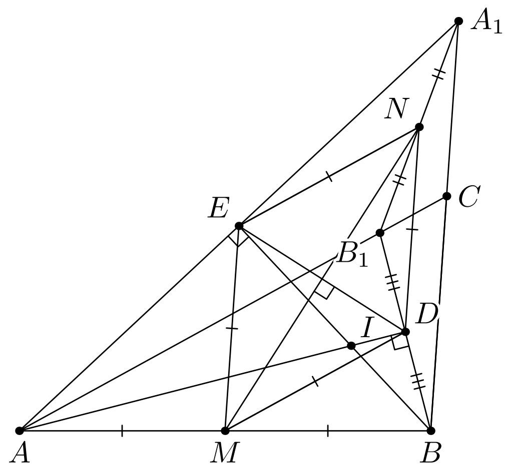
since $\phi > 90^\circ$. This yields the desired inequality.

Otherwise, if $\phi > 120^\circ$, then

$$\angle A_1IB_1 = (\angle A_1IB + \angle AIB + \angle AIB_1) - 360^\circ = 3\phi - 360^\circ \in (0^\circ, \phi),$$

since $\phi < 180^\circ$; this again yields the desired inequality.

Second solution. Notice that the angle AIB is obtuse, since $\angle AIB = 90^\circ + \angle ACB/2$. Clearly, A_1 lies on the line BC, while B_1 lies on the line AC. Let D and E denote the midpoints of the base sides BB_1 and AA_1 in the isosceles triangles BAB_1 and ABA_1, respectively. Then $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$, which means that AE and BD are altitudes in the obtuse triangle AIB. Hence, the points I and M share the same side of the line DE. Moreover, the points A, B, D, and E lie on a circle centered at M.



The properties of a midline yield $DN = BA_1/2 = BA/2 = DM$, so that $DN = DM = AB/2$. Similarly, we obtain $EN = EM = AB/2$. Consequently, the quadrilateral $MDNE$ is a rhombus, in which the line DE is the perpendicular bisector of the diagonal MN. Since I and M share the same side of that line, we have $IM < IN$. (Indeed, the semiplane of the perpendicular bisector DE containing M is the locus of the points which are closer to M than to N. Since I lies in that halfplane, we have $IM < IN$.)

№5. A polynomial $f(x)$ with real coefficients of degree greater than 1 is given. Prove that there are infinitely many positive integers which cannot be represented in the form

$$f(n+1)+f(n+2)+\cdots+f(n+k)$$

where n and k are positive integers.

Solution.

Let the leading term of $f(x)$ be ax^m. If $a<0$, the number of integer x with positive $f(x)$ is finite, therefore sum $f(n+1)+\cdots+f(n+k)$ is bounded and has finitely many positive values. Thus we can confine ourselves to the case $a>0$. In this case $f(x)$ takes finitely many negative values for positive integer x, and there is some d such that $f(x+1)+f(x+2)+\cdots+f(x+d)$ is always positive.

Lemma. If $P(x)$ is a polynomial of degree m with positive leading coefficient, then $P(x)>bx^m$ for some positive b and all x greater than some C.

Indeed, if r is the leading coefficient of P, for each $b<r$ the polynomial $P(x)-bx^m$ has positive leading coefficient and is positive for lare enough x.

Polynomials $f(\frac{x}{2}-1)$ and $f(x)$ have the same degree m, therefore there exists $b>0$ such that $f(x)>$ $>bx^m$, and $f(\frac{x}{2}-1)>bx^m$ for $x>C$.

Let us consider large enough M and evaluate the number of pairs (n,k) such that $f(n+1)+\cdots+$ $+f(n+k)\leq M$.

If $n>\sqrt{\frac{M}{b}}$ (we take M large enough for the right-hand side to be greater than C), each term in the sum is greater than $bn^m\geq bn^2>M$, thus the sum is greater than M.

If $k>\sqrt[3]{\frac{2M}{b}}$ (we take M large enough for the right-hand side to be greater than $2d$), at least $k/2$ among the numbers $n+1,\ldots,n+k$ are no less than $k/2-1$, therefore, the respective terms are greater than $bk^m\geq bk^2$, and their sum is greater than $\frac{k}{2}\times bk^2=\frac{bk^3}{2}>M$. The rest of the sum is positive (since $k>2d$), and the entire sum is again greater than M.

Hende the number of pairs (n,k) of positive integers such that $f(n+1)+\cdots+f(n+k)\leq M$ does not exceed $\sqrt[3]{\frac{2}{b}}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}\cdot M^{5/6}$, which is less than $M/2$ for large enough M. We see that there are at least $M/2$ positive integers without desired representation, and M can be arbitrarily large.

№6. Do there exist two bounded sequences $a_1, a_2, \ldots$ and $b_1, b_2, \ldots$ such that for each positive integers n and $m > n$ at least one of the two inequalities $|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $|b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}$ holds?

Solution. Suppose such sequences (a_n) and (b_n) exist. For each pair (x, y) of real numbers we consider the corresponding point (x, y) in the coordinate plane. Let P_n for each n denote the point (a_n, b_n). The condition in the problem requires that the square $\{(x, y) : \ |x - a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \ |y - b_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\}$ does not contain P_m for $m \neq n$.

For each point A_n we construct its *private square* $\{(x, y) : \ |x - a_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \ |y - b_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}\}$. The condition implies that private squares of points A_n and A_m are disjoint when $m \neq n$.

Let $|a_n| < C$, $|b_n| < C$ for all n. Then all private squares of points A_n lie in the square $\{(x, y) : \ |x| \leq C + \frac{1}{2}, \ |y| \leq C + \frac{1}{2}\}$ with area $(2C + 1)^2$. However private squares do not intersect, and the private square of P_n has area $\frac{1}{n}$. The series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ diverges; in particular, it contains some finite number of terms with sum greater than $(2C + 1)^2$, which is impossible if the respetive private square lie inside a square with area $(2C + 1)^2$ and do not intersect. This contradiction shows that the desired sequences (a_n) and (b_n) do not exist.

№1. Ненулевые многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с вещественными коэффициентами удовлетворяют тождествам
$$P(x)+Q(x)+R(x)=P(Q(x))+Q(R(x))+R(P(x))=0.$$
Докажите, что степени всех трёх многочленов чётны.

Решение. Пусть n — наибольшая из степеней данных трёх многочленов. Пусть a, b и c — коэффициенты при x^n в многочленах $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ соответственно (некоторые из этих чисел могут быть нулями).

Коэффициенты при x^n в многочлене $P(x)+Q(x)+R(x)$ и при x^{n^2} в многочлене $P(Q(x))+Q(R(x))+$ $+R(P(x))$ равны нулю, то есть

$$a+b+c=0 \qquad \text{и} \qquad ab^n+bc^n+ca^n=0. \tag{$*$}$$

Далее мы будем пользоваться только этими равенствами.

Из первого равенства вытекает, что хотя бы два из чисел a, b, c ненулевые. Если третье (скажем, c) равно нулю, то второе равенство выше неверно. Поэтому все три многочлена имеют степень n, и надо доказать, что n чётно.

Предположим противное. Без ограничения общности, числа a и b одного знака. Домножая, если надо, все три числа на -1 (что не меняет равенств $(*)$), будем считать, что $a,b>0$ и $c=-(a+b)<0$. Тогда $0<a,b<|c|$, и числа bc^n и ca^n отрицательны. Но в этом случае

$$|bc^n+ca^n|>|bc^n|=|c|\cdot b\cdot|c|^{n-1}>a\cdot b\cdot b^{n-1}=ab^n,$$

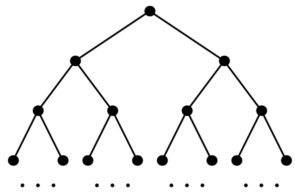
что противоречит второму равенству в $(*)$.

Итак, все три степени равны чётному числу n.

Критерии. *Баллы за разные части складываются!*

Часть 1: $\deg P=\deg Q=\deg R$.
Доказано, что все три степени многочленов равны — *2 балла.*
Доказано лишь, что две наибольших степени равны — *0 баллов.*

Часть 2; все степени чётны.
Доказано лишь, что наибольшая из степеней многочленов P, Q, R чётна — *5 баллов.*
Выписана лишь система $(*)$ без дальнейших содержательных продвижений — *1 балл вместо 5.*



№2. На плоскости нарисовано 10-этажное 2-дерево: отмечена вершина A_1, она соединена отрезками с двумя вершинами B_1 и B_2, каждая из которых соединена отрезками с двумя из четырех вершин C_1, C_2, C_3, C_4 (каждая из вершин C_i соединена ровно с одной вершиной B_j); и так далее вплоть до 512 вершин $J_1, \ldots, J_{512}$. Каждая вершина $J_1, \ldots, J_{512}$ покрашена в один из двух цветов: голубой или золотой. Рассматриваются всевозможные перестановки f множества вершин нарисованного дерева, такие что (i) если вершины X и Y были соединены отрезком, то вершины $f(X)$ и $f(Y)$ также соединены отрезком, и (ii) если вершина X была покрашена в какой-то цвет, то вершина $f(X)$ покрашена в тот же цвет. Для какого максимального M заведомо найдутся хотя бы M различных рассматриваемых перестановок?

Ответ: 2^{2^7}.

Решение. Для начала, введем удобную терминологию. Заметим, что аналогично определению 10-этажного 2-дерева (с покрашенными в два цвета листьями), данному в условии задачи, можно определить k-этажное 2-дерево для $1 \leqslant k$. Для удобства мы будем считать, что все отрезки между вершинами дерева ориентированы от меньшей буквы к большей. Номер буквы, которой помечена вершина дерева, будем называть *этажом* данной вершины (так, A_1 – единственная вершина первого этажа, B_1, B_2 – вершины второго, и т.д.), также будем говорить о множестве вершин, *доступных из вершины* X – вершинах, в которые можно прийти из X, идя по стрелкам.

Пусть на плоскости нарисованы два k-этажных 2-дерева с покрашенными листьями. Биекцию f из множества вершин первого дерева в множество вершин второго дерева будем называть *изоморфизмом* деревьев, если выполняются два условия: во-первых, если вершины X и Y были соединены отрезком в первом дереве, то вершины $f(X)$ и $f(Y)$ соединены отрезком во втором дереве, во-вторых, и если вершина X была покрашена в какой-то цвет в первом дереве, то вершина $f(X)$ покрашена в тот же цвет во втором дереве. В частном случае, когда в качестве первого и второго дерева взято одно и то же дерево, биекцию f будем называть *автоморфизмом* дерева. Через $\chi(k)$ обозначим минимальное количество автоморфизмов у k-этажного 2-дерева с покрашенными листьями (где минимум берется по всем возможным покраскам). На введенном языке в задаче требуется найти $\chi(10)$.

Начнем с почти очевидной леммы:

Лемма 1. *Изоморфизм деревьев сохраняет этаж вершины.*

Доказательство. Изоморфизм f не уменьшает степень вершины. В самом деле, для любой вершины X все ее соседи переходят в соседей вершины $f(X)$, значит у $f(X)$ соседей не меньше, чем было у X. Тогда по принципу Дирихле степень не может и увеличиваться. Значит, вершины последнего этажа переходят в вершины последнего этажа, поскольку только эти вершины имеют степень 1. Значит, вершины предпоследнего этажа переходят в вершины предпоследнего, поскольку должны остаться соседями соответствующих вершин с последнего этажа. И так далее.

Теперь мы готовы приступить к собственно решению задачи.

Первое доказательство оценку снизу, по индукции.

Предложение 1. *При любом $k \geqslant 2$ выполняется $\chi(k) \geqslant (\chi(k-1))^2$.*

Доказательство. Для k-этажного дерева подграф на вершинах, доступных из B_1 (включая саму B_1) является $k-1$-этажным деревом. Значит, есть хотя бы $\chi(k-1)$ различных автоморфизмов этого подграфа. Выберем один из них, обозначим его g. Аналогично для подграфа на вершинах, доступных из B_2 выберем автоморфизм h, это тоже можно сделать хотя бы $\chi(k-1)$ способами. Теперь рассмотрим следующее отображение вершин k-этажного дерева: вершины поддерева B_1 отобразим с помощью g, вершины поддерева B_2 – с помощью h, A отобразим в себя. Очевидно, мы получили автоморфизм: для $X = A$ условие выполняется, потому что B_1 и B_2 перешли в себя (по лемме о сохранении этажа), для X в одном из двух $k-1$-этажных поддеревьев условие выполняется, потому что g и h были автоморфизмами. Итак, упорядоченной паре (g, h) мы сопоставили автоморфизм f, притом разным парам соответствуют разные f, а таких пар минимум $(\chi(k-1))^2$.

Следствие 1. *Для $k \geqslant 3$ выполняется $\chi(k) \geqslant 2^{2^{k-3}}$.*

Доказательство. Докажем явным образом для $k = 3$, для больших значений k Предложение 1 дает в точности шаг индукции. Рассмотрим 3-этажное 2-дерево. Если для хотя бы одной из вершин B_1, B_2 две соединенные с ней вершины C покрашены в один цвет – то существует автоморфизм, переставляющий их и оставляющий все остальные вершины на месте, то есть автоморфизмов минимум 2 (еще один тождественный). Если для обеих вершин B_1, B_2 среди соединенных с ними вершин C есть одна голубая и одна золотая – есть автоморфизм, меняющий местами B_1 и B_2, и из подчиненным им вершин C переводящий голубую в голубую, а золотую в золотую – итого опять же минимум есть два автоморфизма с учетом тождественного.

Второе доказательство оценку снизу, без индукции.

Заметим, что для любого 3-этажного дерева, вершины которого покрашены в два цвета (напомним, у 3-этажного дерева 4 висячие вершины) существует хотя бы два автоморфизма, сохраняющие раскраску. Тогда заметим, что у n-этажного дерева при $n \geqslant 3$ есть 2^{n-3} вершин $n-2$-го уровня, из каждой из который доступно по стрелкам 3-этажное дерево. Тогда достаточно рассмотреть автоморфизмы, оставляющие на месте все вершины уровня $n-3$ и меньших, и как-то переставляющие вершины каждого из этих 3-этажных деревьев. Поскольку для каждого из таких деревьев есть хотя бы два автоморфизма, а таких поддеревьев 2^{n-3} – всего построено минимум $2^{2^{n-3}}$ автоморфизмов. $\square$

Осталось по индукции построить для каждого $k \geqslant 3$ покраску листьев k-этажного дерева, для которой у дерева будет ровно $2^{2^{k-3}}$ автоморфизмов. Здесь есть одна хитрость: как это иногда бывает, чтобы утверждение хорошо доказывалось по индукции его надо усилить.

Предложение 2. *При любом $k \geqslant 3$ найдутся три покраски $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ листьев k-этажного дерева, таких что деревья с этими покрасками попарно не изоморфны, и каждое имеет ровно $2^{2^{k-3}}$ автоморфизмов.*

Доказательство. База для $k = 3$. Будем считать, что B_1 соединена с C_1, C_2, соответственно B_2 – с C_3, C_4. Покраски C_1, C_2, C_3 – голубые, C_4 – золотая; C_1, C_2, C_3 – золотые, C_4 – голубая; наконец C_1, C_3 – голубые, C_2, C_4 – золотые. Очевидно, что деревья попарно неизоморфны, и автоморфизмов ровно 2.

Переход индукции. Пусть три покраски $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ для k-этажного дерева построены. Рассмотрим следующие покраски листьев $k+1$-этажного:

- листья, доступные из B_1 покрасим с помощью $\mathcal{M}_1$, доступные из B_2 – с помощью $\mathcal{M}_2$;
- листья, доступные из B_1 покрасим с помощью $\mathcal{M}_2$, доступные из B_2 – с помощью $\mathcal{M}_3$;
- листья, доступные из B_1 покрасим с помощью $\mathcal{M}_1$, доступные из B_2 – с помощью $\mathcal{M}_3$.

Очевидна как попарная неизоморфность, так и нужное количество автоморфизмов.

Комментарий к построению примера в духе второго доказательства оценки. Заметим, что фактически мы решали следующую задачу: построить такую раскраску висячих вершин $n-2$-этажного дерева в три цвета, чтобы только тождественный автоморфизм сохранял покраску. В самом деле: есть три взаимно-неизоморфных покраски 3-этажного дерева в два цвета, таких что покраска имеет лишь два автоморфизма. Тогда мы хотим, чтобы в покраске n-этажного дерева покраска каждого 3-этажного поддерева, доступного из какой-то вершины $n-2$-го уровня, была одной из этих трех покрасок. Тип этой покраски припишем соответствующей вершине $n-2$-го уровня – получили покраску вершин $n-2$-этажного дерева в 3 цвета. Мы всего лишь хотим от этой покраски, чтобы она не имела автоморфизмов кроме тождественного.

Схема оценки.

1. Ответ: .... **1 балл**

2. Лемма 1: .... **0 баллов**

(за отсутствие доказательства леммы 1 баллы не снимаются)

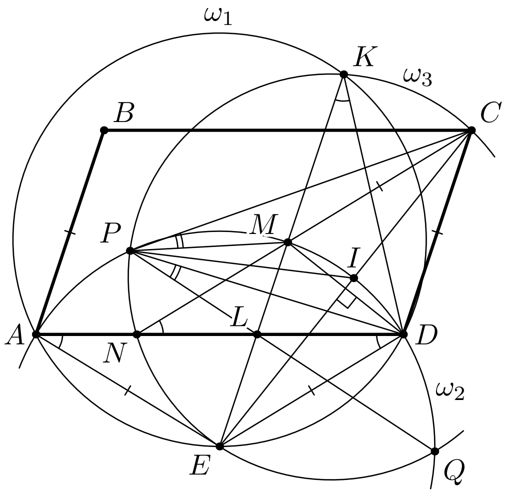
3. Пример и оценка: .... **по 3 балла**

(ни то, ни другое не суммируется с (1))

№3. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A на отрезке AD отмечена точка N, а на отрезке CN — точка M так, что $AB = BM = CM$. Точка K симметрична точке N относительно прямой MD. Прямая MK пересекает отрезок AD в точке L. Пусть P — общая точка описанных окружностей треугольников AMD и CNK, причем точки A и P лежат по одну сторону от прямой MK. Докажите, что $\angle CPM = \angle DPL$.

Решение. Так как $CM = AB = CD$, треугольник CMD равнобедренный. Поэтому $\angle CDM + \angle DMK = \angle CMD + \angle DMN = 180°$, то есть $MK \parallel CD$.

Пусть точка E симметрична точке C относительно прямой MD. Тогда четырехугольники $DCME$ и $ABME$ — ромбы с равными сторонами, так как $ME \parallel CD \parallel AB$ и $ME = MC = CD = AB = BM$. Поскольку $MK \parallel CD$, получаем, что E лежит на прямой KL. Учитывая, что $AE = DE$, имеем $\angle DKE = \angle DKM = \angle DNM = \angle NDE = \angle NAE$. Поэтому четырехугольник $AEDK$ вписан в некоторую окружность ω_1.



Обозначим через ω_2 и ω_3 описанные окружности треугольников AMD и CNK соответственно (поскольку $AE = DE = ME$, точка E является центром ω_2). Из симметрии относительно MD получаем. что $CKNE$ — равнобокая трапеция, поэтому точка E лежит на ω_3. Пусть ω_2 и ω_3 во второй раз пересеклись в точке Q. Точка $L = AD \cap KE$ — радикальный центр окружностей ω_1, ω_2 и ω_3, поэтому L лежит на прямой PQ.

Пусть луч EC пересекает ω_2 в точке I. Тогда дуги IM и ID в окружности ω_2 равны, то есть I лежит на биссектрисе угла DPM. Но I также лежит на биссектрисе угла CPQ, так как $\angle QPI = \angle QEI/2 = \angle QEC/2 = \angle QPC/2$. Следовательно, прямые PM и PD симметричны относительно биссектрисы угла QPC, откуда и следует $\angle CPM = \angle DPL$.

Замечание 1. В треугольнике CPQ точки M и D изогонально сопряжены, а точка I является центром вписанной окружности.

Замечание 2. Точка M является точкой пересечения биссектрис треугольника AKD.

Схема оценки.

Недоведенное счетное решение (в координатах, в комплексных числах, в векторах, тригонометрическое, и т.д.): .... **0 баллов**

Частичные баллы.

Приведённые ниже баллы могут складываться друг с другом.

Через Q обозначается вторая точка пересечения окружностей (AMD) и (CNK).

1. Доказано, что $MK \parallel CD$: .... **1 балл**
2. Доказано, что $AEDK$ — вписанный четырехугольник: .... **2 балла**
3. Доказано, что L лежит на прямой PQ: .... **1 балл**
4. Утверждение задачи выведено из того факта, что L лежит на PQ .... **3 балла**

№4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB, а I — центр вписанной окружности. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BI, а точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AI. Пусть N — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что $IN > IM$.

Первое решение. Из симметрии получаем $IA_1 = IA$ и $IB_1 = IB$. Поэтому

$$\begin{aligned}4(IN^2 - IM^2) &= \left|\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IB_1}\right|^2 - \left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right|^2 \\ &= \left(IA_1^2 + IB_1^2 + 2IA_1 \cdot IB_1 \cdot \cos\angle A_1IB_1\right) - \left(IA^2 + IB^2 + 2IA \cdot IB \cdot \cos\angle AIB\right) \\ &= 2IA \cdot IB \cdot (\cos\angle A_1IB_1 - \cos\angle AIB).\end{aligned}$$

Значит, для решения задачи достаточно доказать неравенство $\cos\angle A_1IB_1 > \cos\angle AIB$.

Заметим, что $\phi = \angle AIB = 90° + \angle ACB/2 > 90°$. Из симметрии имеем $\angle A_1IB = \angle AIB = \angle AIB_1 = \phi$. Поэтому, если $\phi \le 120°$, то

$$\angle A_1IB_1 = 360° - (\angle A_1IB + \angle AIB + \angle AIB_1) = 360° - 3\phi \in [0°, \phi),$$

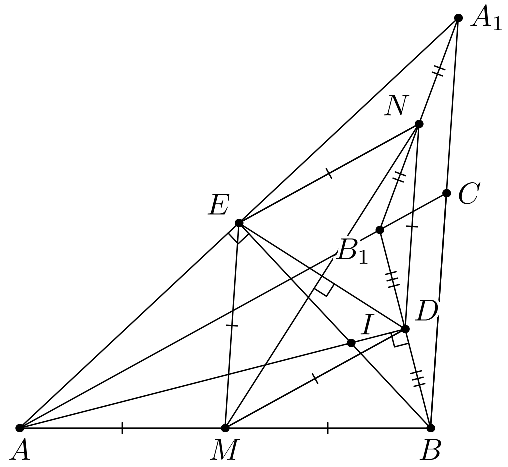
поскольку $\phi > 90°$. Отсюда следует требуемое неравенство.

Если же $\phi > 120°$, то

$$\angle A_1IB_1 = (\angle A_1IB + \angle AIB + \angle AIB_1) - 360° = 3\phi - 360° \in (0°, \phi),$$

поскольку $\phi < 180°$; отсюда опять же-таки следует требуемое.

Второе решение. Заметим, что угол AIB тупой, так как $\angle AIB = 90° + \angle ACB/2$. Понятно, что A_1 лежит на прямой BC, а B_1 — на прямой AC. Пусть D и E — середины оснований BB_1 и AA_1 равнобедренных треугольников BAB_1 и ABA_1 соответственно. Тогда $\angle ADB = \angle AEB = 90°$, то есть AE и BD — высоты тупоугольного треугольника AIB. Поэтому точки I и M лежат по одну сторону от прямой DE. Кроме того, точки A, B, D и E лежат на окружности с центром M.



Из свойства средней линии треугольника имеем $DN = BA_1/2 = BA/2 = DM$, то есть $DN = DM = AB/2$. Аналогично получим $EN = EM = AB/2$. Следовательно, $MDNE$ — ромб, в котором прямая DE является серединным перпендикуляром отрезка MN. Поскольку I и M лежат по одну сторону от прямой DE, получаем $IM < IN$. Последнее не сложно доказать. Полуплоскость относительно серединного перпендикуляра DE, в которой лежит M — это геометрическое место точек, которые ближе к M, чем к N. Поскольку I лежит в этой полуплоскости, то $IM < IN$.

№5. Дан многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами степени выше 1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

$$f(n+1)+\dots+f(n+k)$$

с натуральными n и k.

Решение. Пусть старший член многочлена $f(x)$ равен ax^m. При $a<0$ среди значений $f(x)$ в целых точках лишь конечное число положительных, следовательно, сумма $f(n+1)+\dots+f(n+k)$ ограничена и принимает только конечное число натуральных значений. Поэтому мы ограничимся случаем $a>0$. В этом случае $f(x)$ принимает при натуральных x лишь конечное число отрицательных значений, и существует d такое, что $f(x+1)+f(x+2)+\dots+f(x+d)$ всегда больше 0.

Лемма. Если $P(x)$ – многочлен степени m с положительным старшим коэффициентом, то $P(x) > bx^m$ при некотором положительном b и всех x, больших некоторого C.

Действительно, если r – старший коэффициент многочлена P, то при любом $b<r$ многочлен $P(x)-bx^m$ имеет положительный старший коэффициент и поэтому положителен при всех достаточно больших x.

Многочлен $f(\frac{x}{2}-1)$ имеет, как и $f(x)$, степень m, поэтому можно выбрать положительное b так, чтобы при всех $x>C$ выполнялись оба неравенства $f(x)>bx^m$, $f(\frac{x}{2}-1)>bx^m$.

Рассмотрим достаточно большое число M и оценим количество пар (n,k), для которых $f(n+1)+\dots+f(n+k)\le M$.

Если $n>\sqrt{\frac{M}{b}}$ (мы взяли M таким, чтобы правая часть была больше C), то каждое слагаемое в сумме больше, чем $bn^m\ge bn^2>M$, поэтому сумма больше M.

Если $k>\sqrt[3]{\frac{2M}{b}}$ (мы взяли M таким, чтобы правая часть была больше $2d$), то хотя бы $k/2$ из чисел $n+1,\ldots,n+k$ не меньше $k/2-1$, следовательно, соответствующие слагаемые не меньше $bk^m\ge bk^2$, а сумма этих слагаемых не меньше $\frac{k}{2}\times bk^2=\frac{bk^3}{2}>M$. Сумма остальных слагаемых положительна (так как $k>2d$), и вся сумма снова больше M.

Таким образом, пар натуральных чисел (n,k), для которых $f(n+1)+\dots+f(n+k)\le M$, не больше $\sqrt[3]{\frac{2}{b}}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}\cdot M^{5/6}$, что при достаточно больших M меньше, чем $M/2$. Мы видим, что существует не менее $M/2$ натуральных чисел без требуемого представления, и M может быть сколь угодно большим.

№6. Существуют ли две ограниченные последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ такие, что для любых натуральных $m > n$ выполнено хотя бы одно из двух условий

$$|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad |b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}?$$

Решение. Предположим, что такие последовательности (a_n) и (b_n) существуют. Для наглядности пару действительных чисел (x, y) будем называть *точкой на декратовой плоскости* с координатами (x, y). Для натурального n через A_n обозначим точку с координатами (a_n, b_n). Переформулируем условие задачи: для любого n в квадрат $\{(x,y):\ |x-a_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}},\ |y-b_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\}$ не попадают точки A_m при $m \ne n$.

Тогда сопоставим каждой точке A_n квадрат $\{(x,y):\ |x-a_n| \le \frac{1}{2\sqrt{n}},\ |y-b_n| \le \frac{1}{2\sqrt{n}}\}$, который будем называть *личным квадратом* точки A_n. Из переформулированного условия следует, что личные квадраты точек A_n и A_m не пересекаются (естественно, при $m \ne n$).

Пусть модули членов последовательностей (a_n) и (b_n) ограничены константой C. Тогда все личные квадраты точек A_n лежат в квадрате $\{(x,y):\ |x| \le C + \frac{1}{2},\ |y| \le C + \frac{1}{2}\}$, то есть в квадрате с площадью $(2C+1)^2$. Но личные квадраты не пересекаются, и площадь соответствующего точке A_n равна $\dfrac{1}{n}$. Заметим, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ расходится, то есть найдется его конечный отрезок, сумма которого больше чем, в частности, $(2C+1)^2$, что невозможно если соответствующие личные квадраты лежат внутри квадрата с площадью $(2C+1)^2$ и не пересекаются. Это противоречие доказывает, что последовательностей (a_n) и (b_n) с требуемым свойством не существует.