# Републички натпревар 1994

## I година

**1.** Нека секоја точка на бројната права, која претставува цел број, е обоена произволно во една од две бои (сина или црвена). Докажи дека постои отсечка чии крајни точки и средина се во иста боја.

**Решение.** Нека две соседни точки се обоени во иста боја. Без губење на општоста, можеме да земеме дека точките 4 и 5 се обоени сино. Ако 3или 6 се сини, ја добиваме бараната отсечка. Затоа, да претпоставиме дека 3 и 6 се црвени. Ако 9 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 3 и 9. Затоа да претпоставиме дека 9 е сина. Ако 7 е сина, бараната отсечка е со крајни точки во 5 и 9. Затоа, претпоставуваме дека 7 е црвена. Ако 8 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 6 и 8, па да претпоставиме дека 8 е сина. Ако 2 е сина, бараната отсечка е со крајни точки во 2 и 8. Нека 2 е црвена. Конечно, ако 1 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 1 и 3, а ако 1 е сина, бараната отсечка е со крајни точки во 1 и 9.

Да ја разгледаме и можноста кога не постојат две соседни точки обоени во иста боја. Тогаш, сите точки кои претставуваат парен број се обоени во една боја, а сите точки кои претставуваат непарен број се обоени во другата боја. Во овој случај, еден пример на бараната отсечка е отсечката со крајни точки во $-2$ и 2.

**2.** Нека $x$ е позитивен природен број, а $y$ се добива од $x$ кога првата цифра на $x$ ќе се премести на последно место. Да се определи најмалиот број $x$ за кој важи $3x=y$.

**Решение.** Нека $x$ е $n$-цифрен број и првата цифра на $x$ е $a$ ($1\leq a\leq 9$). Тогаш

$$y=(x-10^{n-1}a)\cdot 10+a=10x-a(10^{n-1}-1).$$

Бидејќи треба да важи $3x=y$, добиваме $3x=10x-a(10^{n-1}-1)$, од каде што добиваме

$$x=\frac{a(10^n-1)}{7}, \qquad (1)$$

Бидејќи 7 е прост број, 7 го дели $a$ или $10^n-1$. Но, ако 7 го дели $a$, тогаш $a=7$, и бројот $3x$ ќе има повеќе од $n$-цифри и не може да биде еднаков на $y$. Значи, 7 го дели $10^n-1$. Најмалата вредност на $x$ се добива за најмалото можно $n$. Најмала вредност на $n$ за која $10^n-1$ е делив со 7 е $n=6$ и во овој случај од (1) добиваме $x=\overline{a142857}$. Ставајќи $a=1$ за да добиеме најмала вредност за $x$, добиваме $x=142857$. Со непосредна проверка утврдуваме дека за ова вредност на $x$ важи

$$3x=3\cdot 142857=428571=y.$$

**3.** Од речното пристаниште $A$ истовремено тргнале низводно моторен чамец и сплав (сплавот немал никаков погон). Брзината на чамецот во мирна вода е $u$, а на реката е $v$ ($u>v>0$). По $t_1$ часа чамецот пристигнал во $B$ и веднаш почнал да се враќа кон $A$. По $t_2$ часа од поаѓањето од $B$ по пат го сретнал сплавот во $C$ и без запирање пристигнал во $A$. Растојанието од $A$ до $B$ е 192, а од $A$ до $C$ е 48. Чамецот патувал вкушно 28 часа.

а) Докажи дека $t_1=t_2$.

б) Докажи дека $u=7v$.

в) Определи ја брзината на чамецот во мирна вода.

**Решение.** а) Растојанието од $A$ до $B$ го означуваме со $s$. Брзината на чамецот низводно е $u+v$ а во спротивна насока е $u-v$. Тогаш изразувајќи го $s$ на два начина, добиваме

$$\begin{cases}(u+v)t_1=s\\ v(t_1+t_2)+(u-v)t_2=s\end{cases}.$$

Со изедначување на левите страни на добиените равенки, добиваме $t_1=t_2$.

**Забелешка.** Интересно е да се забележи дека врската $t_1=t_2$ се добива без оглед на дадените бројни вредности во условот на задачата, т.е. $t_1=t_2$ важи во општ случај за било кои брзини и растојанија.

б) Растојанието од $B$ до $C$ е $192-48=144$. Со оглед на врската $t_1=t_2$, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}(u+v)t_1=192\\ (u-v)t_1=144\end{cases}.$$

Ако го изразиме $t_1$ од едната равенка и го замениме во втората, добиваме $u=7v$.

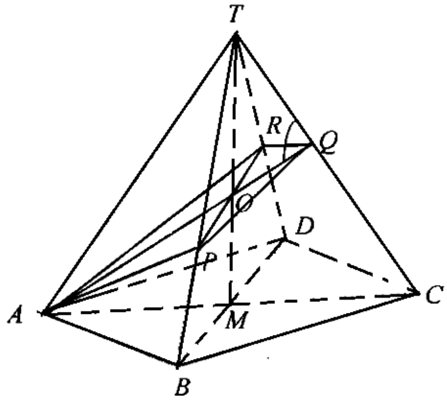
в) Со $t_3$ да го означиме времето потребно чамецот да го мине патот од $C$ до $A$. Со оглед на врската $u=7v$, брзината на чамецот низводно е $8v$ а спротивно е $6v$. Од $8vt_1=192$, добиваме $t_1=\frac{24}{v}$, а од $6vt_3=48$ добиваме $t_3=\frac{8}{v}$.

Бидејќи $t_1+t_2+t_3=28$, добиваме $\frac{24}{v}+\frac{24}{v}+\frac{8}{v}=28$, од каде што добиваме $\frac{56}{v}=28$ и конечно $v=2$. Значи, брзината на амецот во мирна вода е $u=7v=14$.

**4.** Основниот раб на права правилна четириаголна пирамида $ABCDT$ ($T$ е врвот на пирамидата) е $\sqrt{2}$, а бочниот раб е 2. Низ темето $A$ минува рамнина нормална на работ $TC$ ($A$ и $C$ лежат дијагонално на основата) и ги сече рабовите $TB, TC$ и $TD$ во точките $P$, $Q$ и $R$ соодветно.

Да се определи волуменот на пресечената пирамида $ABCDPQR$.

**Решение.** Да го означиме со $M$ пресекот на дијагоналите на основата на пирамидата, а со $O$ пресекот на дијагоналите на четириаголникот $APQR$.




За дијагоналата на основата имаме:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4,$$

т.е. $\overline{AC} = 2$. Значи, $ACT$ и $BDT$ се два складни рамнострани триаголници со страна 2. Бидејќи $TC \perp AQ$, јасно е деак $AQ$ е висината на $\triangle ACT$. Исто така висината на пирамидата $TM$ е висина на $\triangle ACT$. Имаме

$$\overline{AQ} = \overline{TM} = \tfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Точката $O$ е ортоцентар на $\triangle ATC$ и $\triangle BDT$, па, значи, $\overline{RP} : \overline{BD} = 2:3$, од каде што добиваме $\overline{RP} = \frac{4}{3}$. Четириаголникот $APQR$ е делтоид, па, за неговата плоштина $P$ имаме

$$P = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{RP}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Бидејќи $TQ$ е висина на пирамидата имаме

$$V_{APQRT} = \frac{1}{3}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\frac{2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Волуменот на дадената пирамида е $V = \frac{1}{3}(\sqrt{2})^2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Конечно, бараниот волумен е

$$V_{ABCDPRQ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

**II година**

**1.** Ако равенките $ax^2 + bx + c = 0$ и $Ax^2 + Bx + C = 0$ имаат барем едно заедничко решение, тогаш $(aC - Ac)^2 = (aB - Ab)(bC - Bc)$. Докажи!

**Решение.** Да го означиме заедничкото решение на двете равенки со $y$. Тогаш

$$ay^2 + by + c = 0 \tag{1}$$

$$Ay^2 + By + C = 0 \tag{2}$$

Ако првото равенство го помножиме со $A$, а второто со $a$ и потоа добиените равенства ги одземеме, добиваме

$$(aB - Ab)y = Ac - aC. \tag{3}$$

Од друга страна, ако првото равенство го помножиме со $B$, а второто со $b$ и добиените равенства ги одземеме, добиваме

$$(aB - Ab)y^2 = bC - Bc. \tag{4}$$

Ако $aB-Ab\neq 0$, тогаш изразувајќи го $y$ од (3) и заменувајќи го во (4) се добива бараното равенство.

Нека $aB-Ab=0$. Тогаш, од (3) и (4) добиваме $aC-Ac=bC-Bc=0$, па значи и во овој случај важи $(aC-Ac)^2=(aB-Ab)(bC-Bc)$.

**2.** Нека $x$ и $y$ се ненегативни реални броеви такви што $x+y=3$. Да се докаже дека $xy^2<4$.

**Решение.** *Прв начин.* Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме

$$3=x+y=x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}},$$

од каде што следува неравенството $xy^2\leq 4$. Равенството се достигнува за $x=1$ и $y=2$.

*Втор начин.* Имаме:

$$\begin{aligned}xy^2-4&=x(3-x)^2-4=x^3-6x^2+9x-4\\&=x^2(x-1)-5x(x-1)+4(x-1)\\&=(x-1)(x^2-5x+4)\\&=(x-1)^2(x-4).\end{aligned}$$

Сега, од $(x-1)^2\geq 0$ и $x-4<0$ следува $xy^2<4$. Равенството се достигнува за $x=1$ и $y=2$.

**3.** Низ внатрешна точка на даден триаголник се повлечени три прави кои триаголникот го делат на 6 дела. Нека $S_1$, $S_2$ и $S_3$ се плоштини на кои било три така добиени делови на триаголникот. Докажи дека:

а) $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}>\frac{4}{S}$

б) $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}>\frac{9}{S}$.

**Решение.** б) *Прв начин.* Ако го искористиме фактот дека $S>S_1+S_2+S_3$ и неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина на броевите $S_1,S_2$ и $S_3$, добиваме

$$\frac{S}{3}>\frac{S_1+S_2+S_3}{3}>\frac{3}{\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}},$$

од каде што се добива бараното неравенство.

*Втор начин*. За секој позитивен реален број $a$ важи $a+\frac{1}{a}\geq 2$. Сега ако искористиме дека $S>S_1+S_2+S_3$, добиваме

$$S(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}) > (S_1+S_2+S_3)(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3})$$
$$=3+\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}\le 9$$

од каде го добиваме бараното неравенство.

Неравенството под а) се докажува на сличен начин.

**4.** Нека се дадени $n$ точки во рамнината така што растојанието меѓу било кои три од нив е најмногу $1$. Ако $m$ е најмало растојание меѓу две од дадените три точки, докажи дека

$$m < \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n-1}$$

**Решение.** Околу секоја од $n$-те точки опишуваме кружница со радиус $\frac{m}{2}$. Вкупната плоштина што ја покриваат вака добиените $n$-круга е $n\frac{m^2\pi}{4}$, затоа што овие кругови се допираат или воопшто не се сечат. Околу една фиксно избрана точка опишуваме кружница со радиус $1+\frac{m}{2}$. Овој круг ги содржи сите $n$ претходно споменати кругови. Затоа

$$n\frac{m^2\pi}{4} \le (1+\frac{m}{2})^2\pi,$$

од каде што следува бараното неравенство.

**III година**

**1.** За реалните броеви $a_\circ, a_1, a_2, ..., a_n$ важи $a_\circ = a_n = 0$ и

$$a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \ge 0, \text{ за } k = 1,2,3,...,n-1.$$

Докажи дека ниту еден од броевите $a_\circ, a_1, a_2, ..., a_n$ не е позитивен.

**Решение.** Нека $a_k$ ($0 < k < n$) е најголем меѓу броевите $a_\circ, a_1, a_2, ..., a_n$.

Ако $k=0$ или $k=n$, тогаш $a_k = 0$, па, значи, ниту еден од броевите не е позитивен.

Нека $1 \le k \le n-1$. Да претпоставиме дека $a_{k-1} < a_k$ и $a_{k+1} < a_k$. Тогаш $a_{k-1} + a_{k+1} < 2a_k$, т.е. $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} < 0$, што е спротивно на условот на задачата. Значи, $a_{k-1} \ge a_k$ или $a_{k+1} \ge a_k$ . Но, $a_k$ е најголем од дадените броеви, па, значи, $a_{k+1} = a_k$ или $a_{k-1} = a_k$. Од причини на симетрија, можеме да претпоставиме $a_{k-1} = a_k$. Тогаш од условот $a_{k-2} - 2a_{k-1} + a_k \ge 0$, добиваме $a_{k-2} - a_{k-1} \ge 0$, т.е. $a_{k-2} \ge a_{k-1}$. Но, $a_{k-1} = a_k$, а $a_k$ е најголем од дадените броеви, па, значи, $a_{k-2} = a_{k-1} = a_k$. Продолжувајќи ја оваа постапка, добиваме $0 = a_\circ = a_1 = ... = a_k$. Бидејќи најголемиот од дадените броеви е 0, ниту еден од дадените броеви не е позитивен.

**2**. Аглите на триаголникот $ABC$ го задоволуваат равенството

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1.$$

Докажи дека еден од аглите е еднаков на $120^\circ$.

**Решение.** Бидејќи $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 540^\circ$, имаме

$$\cos 3\gamma = \cos[540^\circ - (3\alpha + 3\beta)] = \cos[180^\circ - (3\alpha + 3\beta) = -\cos(3\alpha + 3\beta).$$

Од дадениот услов се добива:

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta = 1 + \cos(3\alpha + 3\beta)$$

$$2\cos\frac{3\alpha+3\beta}{2}\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2} = 2\cos^2\frac{3\alpha+3\beta}{2}$$

$$\cos\frac{3\alpha+3\beta}{2}(\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2} - \cos\frac{3\alpha+3\beta}{2}) = 0$$

$$-2\cos\frac{540^\circ+3\gamma}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{3\beta}{2} = 0$$

$$\cos(270^\circ - \frac{3\gamma}{2})\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{3\beta}{2} = 0$$

$$\sin\frac{3\gamma}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{3\beta}{2} = 0.$$

Добиваме дека $\sin\frac{3\gamma}{2} = 0$ или $\sin\frac{3\alpha}{2} = 0$ или $\sin\frac{3\beta}{2} = 0$. Од причини на симетрија, можеме да земеме $\sin\frac{3\gamma}{2} = 0$. Но, бидејќи $0 < \gamma < 180^\circ$, имаме $0 < \frac{3\gamma}{2} < 270^\circ$, па, значи, $\frac{3\gamma}{2} = 180^\circ$, односно $\gamma = 120^\circ$.

**3**. Бројот 15 може на три начини да се запише како збир на три позитивни природни броеви така што сите 9 броја да се различни:

$$15 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 3 + 5 + 7.$$

За секој природен број $n$ со $k(n)$ го означуваме најголемиот природен број тројки природни броеви, кои даваат збир $n$ и притоа сите $3 \cdot k(n)$ броеви се различни.

Докажи дека за секој природен број $n$ важи:

а) $k(n) < \frac{2n}{9}$

б) ако $m$ е количникот при делење на $n$ со 6, тогаш $k(n) \geq m$.

**Решение.** а) Нека се избрани $k$ тројки на различни природни броеви при што збирот на броевите на секоја тројка е $n$. Нека $S$ е вкупниот збир на броевите на $k-$те тројки. Тогаш $S = nk$, па како сите $3k$ броеви се различни, добиваме

$$nk = S > 1 + 2 + 3 + ... + 3k = \frac{3k(3k+1)}{2},$$

од каде добиваме $k < \frac{2n-3}{9} < \frac{2n}{9}$. Значи, $k(n) < \frac{2n}{9}$.

б) Нека $n = 6m + r$, каде што $m$ е количникот, а $r$ ($0 \leq r < 6$) е остатокот при делење на $n$ со 6. Случајот $n \leq 5$, односно $m = 0$, не го разгледуваме бидејќи во тој случај треба да докажеме дека $k(n) \geq 0$, што секако е точно. Затоа, нека $n \geq 6$. Да ги разгледаме $m-$те тројки:

$$(1, 1+m, n-m-2)$$
$$(2, 2+m, n-m-4)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(m, m+m, n-m-2m)$$

Збирот на броевите во секоја тројка е $n$, при што сите броеви се различни природни броеви. Дека броевите се различни следува од тоа што првиот број во секоја тројка е еден од броевите $1, 2, ..., m$, вториот е еден од броевите $m+1, m+2,$ $,,,.2m$, а третиот е најмалку $n-3m = 3m+r$ . Значи, $k(n) \geq m$.

**4.** Дадени се $n$ точки на кружница. Броевите $1, 2, 3, ..., n$ се запишани во произволен распоред покрај дадените точки (по еден број до секоја точка). За секој пар соседни точки е определена апсолутната вредност на разликата на броевите запишани покрај точките. Докажи дека збирот на овие апсолутни вредности е поголем или еднаков на $2(n-1)$

**Решение.** Точките на кружницата ги означуваме по ред со $A_i$ $(1 \leq i \leq n)$, поаѓајќи од произволна точка движејќи се во позитивна насока. Нека бројот $a_i$ $(1 \leq a_i \leq n,\ 1 \leq i \leq n)$ е запишан покрај точката $A_i$. Без губење на општоста можеме да земеме $a_n = n$. Нека 1 е запишан покрај точката $A_j$, т.е. $a_j = 1$. Тогаш движејќи се по кружницата од $A_n$ кон $A_j$ по една од двете насоки и пресметувајќи ги разликите на броевите кај соседните точки добиваме:

$$\begin{aligned}|a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + ... + |a_{j+1} - a_j| &\geq (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_{j+1} - a_j) \\ &= a_n - a_j = n-1\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}|a_n - a_1| + |a_1 - a_2| + ... + |a_{j-1} - a_j| &\geq (a_n - a_1) + (a_1 - a_2) + ... + (a_{j-1} - a_j) \\ &= a_n - a_j = n-1\end{aligned}$$

Оттука заклучуваме дека сумата на апсолутните вредности на разликите е поголема или еднаква на $2(n-1)$.

**IV година**

**1.** Нека $p$ е прост број таков што сите цифри му се единици. Докажи дека бројот на цифрите на бројот $p$ е прост број.

**Решение.** Нека $p$ е број таков што сите цифри му се единици и нека бројот на цифрите му е сложен, т.е. е $mn$ каде што $m, n \geq 2$. Тогаш

$$p=(1+10+\ldots+10^n)+10^n(1+10+\ldots+10^n)+\ldots+10^{n(m-1)}(1+10+\ldots+10^n)$$
$$=(1+10+\ldots+10^n)(1+10^n+10^{2n}+\ldots+10^{n(m-1)})$$

Бидејќи $m,n\geq 2$, добиваме дека $p$ е сложен број. Значи, ако $p$ е прост број таков што сите цифри му се единици, тогаш бројот на цифрите на $p$ мора да е прост.

**2.** Во рамнина се дадени три точки $A',B'$ и $C'$. Да се определат три точки $A,B,C$ во рамнината така што $A$ е средина на $CC'$, $B$ е средина на $AA'$ и $C$ е средина на $BB'$.

**Решение.** Во рамнината поставуваме правоаголен координатен систем $xOy$. Нека координатите на дадените точки во овој систем се: $A'=(a',a'')$, $B'=(b',b'')$ и $C'=(c',c'')$. Нека координатите на бараните точки се $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ и $C(c_1,c_2)$. Од условите за преполовување добиваме:

$$(a_1,a_2)=(\frac{c'+c_1}{2},\frac{c''+c_2}{2}),\ (b_1,b_2)=(\frac{a'+a_1}{2},\frac{a''+a_2}{2}),\ (c_1,c_2)=(\frac{b'+b_1}{2},\frac{b''+b_2}{2}).$$

Со изедначување на соодветните координати и по решавање на така добиениот систем линеарни равенки, добиваме

$$a_1=\frac{a'+2b'+4c'}{7},\qquad a_2=\frac{a''+2b''+4c''}{7}$$
$$b_1=\frac{b'+2c'+4a'}{7},\qquad b_2=\frac{b''+2c''+4a''}{7}$$
$$c_1=\frac{c'+2a'+4b'}{7},\qquad c_2=\frac{c''+2a''+4b''}{7}.$$

За решението да биде комплетно треба да докажеме дека точките $A,B$ и $C$ со вакви координати можат да се конструираат, ако се познати координатите на $A',B'$ и $C'$ (во условот на задачата не се бараат координатите на $A,B,C$, туку се бараат да се конструираат тие точки). Но, бидејќи конструкција на отсечка со двојна должина, на отсечка со должина збир на должини на дадените отсечки и делење на дадена отсечка на 7 дела е позната, точките $A,B$ и $C$ може да се конструираат со помош на координатите на $A',B'$ и $C'$ во поставениот координатен систем.

**3.** Иста како задача 3 од трета година

**4.** Иста како задача 4 од трета година