O ekvipotentnosti (jednakobrojnosti) skupova

Igor Smud[1]

Lako je razumjeti dogovor da su dva skupa *ekvipotentna* ili *jednakobrojna* ako imaju isti broj elemenata. No ponekad je teško skupove prebrojiti. Pogotovo ako imaju jako puno elemenata (da ne kažem beskonačno). Srećom, da bismo odredili da li su dva skupa ekvipotentna, nije potrebno prebrojati sve njihove elemente. Dovoljno je uspostaviti vezu (tj. preslikavanje ili funkciju) među njihovim elementima, ali na taj način da:

a) svaki element iz prvog skupa ima svoj jedini par u drugom skupu (injektivnost funkcije);
b) svaki element iz drugog skupa dobiven je preslikavanjem nekog elementa iz prvog skupa (surjektivnost funkcije).

To preslikavanje, znači, mora biti bijektivno (tj. injektivno i surjektivno). Možda nije očevidno da tada možemo zaključiti da dva skupa imaju jednak broj elemenata.

Ako je funkcija bijektivna, to znači da je injektivna i surjektivna. Da bismo objasnili ove pojmove, uzmimo, na primjer, da imamo $N = 10$ golubova (prvi skup, domena funkcije) u jednoj kutiji, koje je potrebno staviti u M krletki (drugi skup, kodomena). Mi zapravo moramo golubove "preslikati" u krletke.

Da bi to preslikavanje bilo surjektivno, znači da za svaku krletku moramo imati barem jednog goluba koji ide u nju (on ju "pogađa"), tj. broj krletki je manji ili jednak broju golubova (broj krletki će biti manji ako više golubova ide u istu krletku), tj. $M \leqslant N$.

Ukoliko želimo da to preslikavanje bude injektivno, moramo različitim golubovima pridružiti različite krletke (tj. u svakoj krletci najviše je jedan golub), što znači da moramo imati barem onoliko krletki koliko imamo golubova, tj. $M \geqslant N$ (neke krletke mogu ostati prazne).

Bijektivno preslikavanje zahtijeva da oba ova uvjeta budu ispunjena, što nas lagano navodi na zaključak da je $M = N$, tj. broj krletki mora biti jednak broju golubova. Možemo zaključiti da će dva skupa biti ekvipotentna ukoliko možemo uspostaviti bijektivno preslikavanje među njihovim elementima.

Zanimljivo je da ukoliko uspoređujemo dva beskonačna ekvipotentna skupa, oni će i dalje biti ekvipotentni ukoliko jednom od njih izbacimo konačan broj elemenata. Pogledajmo dva beskonačna skupa koji se razlikuju za samo jedan element, skupove [0,1] i ⟨0,1]. To su dva podskupa skupa realnih brojeva. Drugi skup je nastao iz prvog izbacivanjem elementa 0.

Konstruirajmo sada bijekciju $f : [0, 1] \to \langle 0, 1]$. Funkcija zadana kao identiteta $f(x) = x$ jest bijekcija, ali ne ostvaruje željenu bijekciju iz [0,1] u interval ⟨0,1], pa ćemo ju malo promijeniti. Konstruirajmo skup $S \subseteq [0, 1]$,

$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$, takav da za svaki $i \neq j$ vrijedi da je $x_i \neq x_j$ i da je $x_1 = 0$.

[1] Autor je student 3. godine Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, e-mail: igor.smud@fer.hr

Zašto baš ovakav skup? Zato da bismo nuli (koja je u skupu [0,1]) pridružili element različit od nule, tj. stavimo $f(0) = x_2, f(x_2) = x_3$, i općenito $f(x_n) = x_{n+1}$ i $n \geqslant 1$.

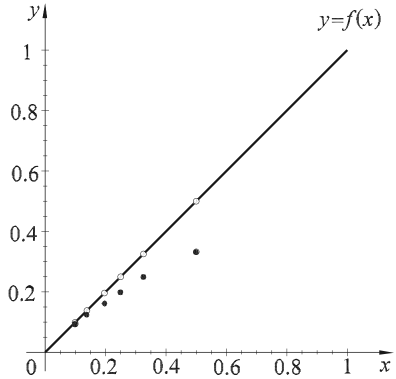
Očito je da je ovo preslikavanje bijekcija iz skupa $\{0, x_2, x_3, x_4, x_5, ...\}$ u skup $\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ...\}$ jer se radi o pomaku.

Znači, uz definiran skup $S = \{0, x_2, x_3, x_4, ...\} \subseteq [0, 1]$, dobili smo funkciju $f : [0, 1] \to (0, 1]$ definiranu s

$$f(x_n) = x_{n+1} \text{ za sve } x_n \in S,$$

$$f(x) = x \text{ za sve } x \notin S.$$

Uzmimo na primjer neki konkretan skup S. Neka je $S = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\} \subseteq [0, 1]$. Graf odgovarajuće funkcije dan je slikom 1.



Sl. 1. Graf bijekcije $f : [0, 1] \to (0, 1]$

Vrlo lako je uvjeriti se da je funkcija f bijekcija. Prema tome skup $[0, 1]$ i njegov (pravi!) podskup $(0, 1]$ su ekvipotentni.

Na ovaj način smo dokazali zanimljivu činjenicu da beskonačni skupovi koji na prvi pogled nemaju isti broj elemenata, zapravo imaju. Nadalje zanimljivo je primijetiti da ova funkcija ima prekide, a može se i pokazati da željena bijekcija iz $[0, 1]$ u $(0, 1]$ ne može biti neprekidna funkcija.

Beskonačni skupovi ponašaju se drugačije od konačnih. Pokušamo li naime izbaciti određen broj elemenata iz konačnog skupa, dobiveni skup više neće imati jednak broj elemenata kao prvotni skup.

Ovime smo stekli mali uvid u dio matematike koja proučava skupove, a u kojoj se krije puno drugih zanimljivih stvari.

Literatura

[1] Pavle Papić: *Uvod u teoriju skupova*, Matkina biblioteka, Zagreb, 2000.

[2] Darko Žubrinić: *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 2001.

[3] Drexel University: *Math Forum: Descrete Math.*
URL: `http://mathforum.org/discrete/discrete.html` (02. 05. 2005.)