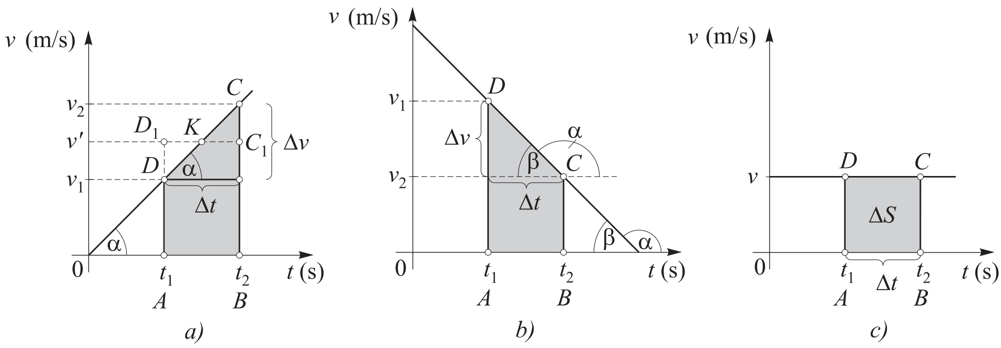
Geometrija i problemi kretanja

Ljiljana Sudar, Leskovac

Neki fizički problemi mogu se riješiti na više načina, primjenom različitih područja matematike. Problemi kretanja se, npr. najčešće rješavaju algebarski. Taj način rješavanja zahtijeva za dano kretanje poznavanje eksplicitne ovisnosti brzine i prijeđenog puta od vremena.

Međutim, i *bez poznavanja te eksplicitne ovisnosti* moguće je i efikasnije i elegantnije riješiti mnoge probleme kretanja pomoću nestandardne, veoma moćne metode, koja se bazira na primjeni grafova i geometrije.

Ukoliko se pri kretanju intenzitet brzine za isti vremenski interval uvijek mijenja za istu vrijednost (tj. ubrzanje je konstantno), samo na osnovu grafova i elementarnog poznavanja geometrije mogu se postaviti relacije iz kojih se dobiva rješenje problema.



Slika 1. Grafovi ovisnosti brzine o vremenu

Ako se intenzitet brzine za svaki mali vremenski interval Δt uvijek *povećava* za istu vrijednost Δv (tj. ubrzanje je konstantno), graf brzine je pravac koji zaklapa oštar kut α s pozitivnim dijelom t-osi (sl. 1a). S grafa se vidi: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = a$, gdje je a intenzitet ubrzanja. Ako se kroz točku K koja je središte dužine $\overline{DC}$ povuče pravac paralelan t-osi, pravokutni trokuti DD_1K i KC_1C su identični, pa imaju jednake površine. Zato će osjenčana površina trapeza $ABCD$ (u oznaci P) biti jednaka površini pravokutnika ABC_1D_1 $(P_{ABC_1D_1})$ osnovice $\Delta t = t_2 - t_1$ i visine v' tj. $P = P_{ABC_1D_1} = v'\Delta t$, pa kako je $v'\Delta t$ elementarni prijeđeni put ΔS za vrijeme Δt, bit će $P = \Delta S$ tj. površina ispod odgovarajućeg dijela grafa brzine predstavlja elementarni prijeđeni put.

Ako se intenzitet brzine za svaki mali vremenski interval Δt uvijek *smanjuje* za istu vrijednost Δv (tj. ubrzanje je konstantno), graf brzine je pravac koji zatvara tupi kut α s pozitivnim dijelom t-osi (sl. 1b). S grafa je očigledno $\alpha = \pi - \beta$ i $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = -a$, gdje je a intenzitet ubrzanja, pa slijedi $\operatorname{tg}\beta = a$, gdje je β kut koji pravac zatvara s negativnim dijelom t-osi. Analogno se, kao u prethodnom slučaju, može pokazati da je elementarni prijeđeni put tijela za vrijeme Δt (ΔS) osjenčana površina trapeza $ABCD$ (P) s osnovicama $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ i visinom $\Delta t = t_2 - t_1$, tj. $\Delta S = P = \dfrac{|AD| + |BC|}{2}\Delta t$.

Ako se intenzitet brzine tijekom vremena ne mijenja, pravac je paralelan s t-osi (sl. 1c). Prijeđeni put tijela za vrijeme Δt (u oznaci ΔS) je, očigledno, osjenčana površina pravokutnika $ABCD$ (P) osnovice Δt i visine v, tj. $\Delta S = P = \Delta t \cdot v$.

Zbroj elementarnih prijeđenih putova je ukupan prijeđeni put tijela i predstavlja površinu ispod odgovarajućeg dijela grafa brzine.

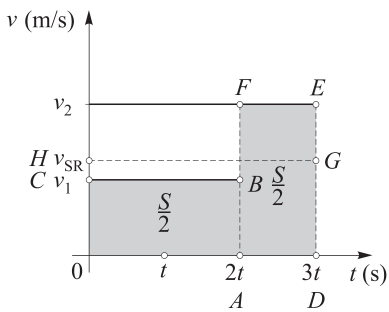
Metoda rješavanja problema kretanja pomoću grafa, primjenom geometrije zahtijeva, osim dobrog razumijevanja grafičkog prikaza problema kretanja, i to imajući u vidu:

1) da je površina ispod grafa brzine prijeđeni put tijela i
2) da je nagib pravca, kojom se prikazuje ovisnost brzine tijela o vremenu, definiran ubrzanjem tijela koje se kreće.

Slijede primjeri koji ilustriraju ovu metodu.

Primjer 1. Prvu polovinu puta tijelo prijeđe za dvostruko dulje vrijeme nego drugu polovinu. Srednja brzina duž cijelog puta je 6 m/ s. Kolika je srednja brzina na prvoj, a kolika na drugoj polovini puta? [2]

Rješenje.



Dan je graf brzine tijela u ovisnosti o vremenu. Drugu polovinu puta $s_2 = \frac{s}{2}$ tijelo prelazi brzinom v_2 za vrijeme t. Prvu polovinu puta $s_1 = \frac{s}{2}$ tijelo prelazi brzinom v_1 za vrijeme $2t$ (tj. dva puta dulje vrijeme nego drugu polovinu puta), pa je ukupno vrijeme kretanja tijela $3t$ i čitav put

$$s = s_1 + s_2. \tag{1}$$

Put s_1 jednak je površini pravokutnika $OABC$, osnovice $|OA| = 2t$ i visine $|OC| = v_1$, (u oznaci P_{OABC}), tj.

$$s_1 = \frac{s}{2} = P_{OABC} = v_1 \cdot 2t. \tag{2}$$

Put s_2 jednak je površini pravokutnika $ADEF$, osnovice $|AD| = t$ i visine $|AF| = v_2$, (u oznaci P_{ADEF}), tj.

$$s_2 = \frac{s}{2} = P_{ADEF} = v_2 \cdot t. \tag{3}$$

Čitav put s tijelo bi prešlo i da se sve vrijeme $(3t)$ kretalo srednjom brzinom $v_{\text{sr}} = 6$ (u m/ s), pa je s grafa očigledno da bi prijeđeni put s u tom slučaju bio jednak površini pravokutnika $ODGH$, osnovice $|OD| = 3t$ i visine $OH = v_{\text{sr}}$, (u oznaci P_{ODGH}), tj.

$$s = P_{ODGH} = v_{\text{sr}} \cdot 3t = 18t. \tag{4}$$

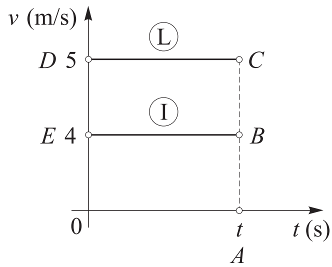
Iz relacija (2) i (3) dobivamo

$$2v_1 = v_2. \tag{5}$$

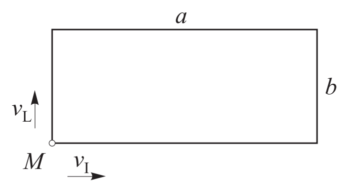
Zamjena (2), (3) i (4) u (1), uz uvjet (5) daje $v_1 = 4.5$ i $v_2 = 9$ (u m/ s).

Primjer 2. Ivan i Luka hodaju s istog mjesta u suprotnim smjerovima oko nogometnog igrališta koje je dugačko 110 m, a široko 70 m. Luka hoda brzinom 5 m/ s, a Ivan brzinom 4 m/ s. Koliko metara će svaki od njih prevaliti kad se prvi put sretnu? Nakon koliko vremena će to biti? [3]

Rješenje.



a)



b)

Na sl. a) su dani grafovi brzina Luke (L) i Ivana (I) u ovisnosti o vremenu.

Do trenutka (t) kad se prvi put sretnu Luka je prešao put (s_L) jednak površini pravokutnika $OACD$, osnovice $|OA| = t$ i visine $|OD| = 5$ (u m/ s), (u oznaci P_{OACD}), pa je

$$s_L = P_{OACD} = 5t. \tag{1}$$

Ivan je do prvog susreta prešao put jednak površini pravokutnika $OABE$, osnovice $|OA| = t$ i visine $|OE| = 4$ (u m/ s), (u oznaci P_{OABE}), pa je

$$s_I = P_{OABE} = 4t. \tag{2}$$

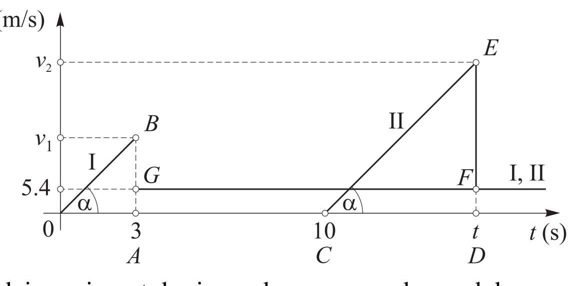
U trenutku susreta (t) je zbroj prijeđenih putova Luke i Ivana jednak opsegu igrališta (O) dužine $a = 110$ m i širine $b = 70$ m (vidi sl. b), tj.

$$s_L + s_I = O. \tag{3}$$

Kako je opseg igrališta $O = 2a + 2b = 360$ (u m), kao i relacija (1), (2) i (3) dobiva se: $9t = 360$, tj. $t = 40$ (u s) što znači da je vrijeme prvog susreta Luke i Ivana 40 s nakon istovremenog polaska s istog mjesta (na sl. b) to mjesto je vrh M pravokutnika; Luka iz njega kreće oko nogometnog igrališta u smjeru kretanja kazaljki na satu, a Ivan u suprotnom smjeru, na što ukazuju strelice). Na osnovu relacije (1), Luka je do prvog susreta prešao put $s_L = 5t = 200$ (u m), a na osnovu relacije (2) Ivan je prešao put $s_I = 4t = 160$ (u m).

Primjer 3. Padobranac skače iz aviona te nakon 3 s otvara padobran. Nakon otvaranja padobrana on naglo (trenutno) usporava te nastavlja padati brzinom od 5.4 m/ s. Deset sekundi nakon njegovog skakanja iz aviona skače drugi padobranac. Nakon koliko vremena on mora otvoriti padobran da bi zajedno stigli do tla? Pretpostavite da je otpor zraka prije otvaranja padobrana zanemariv. [3]

Rješenje.



Grafovi I i II daju ovisnost brzina od vremena oba padobranca. Nulti trenutak vremena je onaj kada skače prvi padobranac. Prve tri sekunde on slobodno pada tj. kreće se s ubrzanjem $a = g$, a zatim konstantnom brzinom 5.4 (u m/ s). Nakon deset sekundi iskače i drugi. On slobodno pada tj. kreće se s ubrzanjem $a = g$ sve do trenutka

t kada sustiže prvog padobranca, otvara padobran pa njegova brzina trenutno postaje 5.4 (u m/ s) (vidi graf). Od trenutka t oba padobranca se kreću brzinom 5.4 (u m/ s) sve dok *istovremeno* ne stignu do tla.

Zbog istog ubrzanja padobranaca dok slobodno padaju $(a_1 = a_2 = g)$, nagib dužina $\overline{OB}$ i $\overline{CE}$ prema pozitivnom dijelu t-osi je isti, pa iz pravokutnih trokuta ΔOAB i ΔCDE imamo

$$\frac{v_1}{3} = \frac{v_2}{t-10} = g. \tag{1}$$

Prijeđeni put prvog padobranca, s_1, je u trenutku sustizanja (t) jednak zbroju površina trokuta ΔOAB, osnovice $|OA| = 3$ (u s) i visine $|AB| = v_1$, i pravokutnika $ADFG$, osnovice $|AD| = t - 3$ i visine $|DF| = 5.4$ (u m/ s), tj.

$$s_1 = \frac{3v_1}{2} + 5.4(t-3). \tag{2}$$

Prijeđeni put drugog padobranca, s_2, je u trenutku sustizanja (t) jednak površini trokuta ΔCDE, osnovice $|CD| = t - 10$ i visine $|DE| = v_2$, tj.

$$s_2 = \frac{v_2(t-10)}{2}. \tag{3}$$

Prijeđeni putovi padobranaca su jednaki u trenutku sustizanja (t) tj.

$$s_1 = s_2 \tag{4}$$

pa je prema relacijama (2) i (3):

$$\frac{3v_1}{2} + 5.4(t-3) = \frac{v_2(t-10)}{2}. \tag{5}$$

Zamjenom relacije (1) u (5) dolazi se do kvadratne jednadžbe:

$$t^2 - t\Big(20 + \frac{10.8}{g}\Big) + 91 + \frac{30.24}{g} = 0.$$

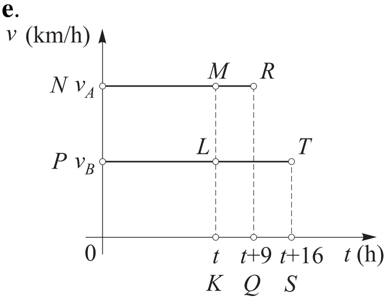
Ako se uzme $g = 9.81$ (u m/ s^2), kvadratna jednadžbe glasi:

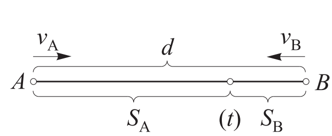
$$t^2 - 21.1t + 94.08 = 0.$$

Njena rešenja su: $t_1 = 14.7$ i $t_2 = 6.4$ (u s). Drugi padobranac otvara padobran nakon $t - 10$ sekundi (vidi sliku), pa je očigledno da fizički smisao ima samo drugo rješenje za koje je $t - 10 = 4.7$ (u s).

Primjer 4. Kuriri iz mjesta A i B kreću jedan drugome u susret, pri čemu se svaki kreće jednoliko, ali različitom brzinom u odnosu na onog drugog. Pošto su se sreli, da bi stigli u nasuprotna mjesta, jednome je potrebno još 16, a drugome 9 sati. Koliko je potrebno vremena jednom, a koliko drugom, da prijeđu čitav put između A i B? (*Zadatak Lewisa Carrolla, engleskog matematičara i pisca knjige za djecu "Alisa u zemlji čudesa".*) [4]

Rješenje.





Dan je graf brzina oba kurira u ovisnosti o vremenu. Ne smanjujući općenitost rješavanja možemo pretpostaviti da je brzina v_A kurira iz mjesta A veća od brzine v_B kurira iz mjesta B tj. $v_A > v_B$. Nulti trenutak vremena je onaj kada se kuriri počinju kretati jedan drugome ususret, a t je trenutak njihovog susreta. U trenutku susreta (t) zbroj prijeđenih putova kurira jednak je udaljenosti d mjesta A i B (vidi sl. b)) tj.

$$s_A + s_B = d. \tag{1}$$

Kurir iz A je do susreta prešao put s_A, jednak površini pravokutnika $OKMN$, osnovice $|OK| = t$ i visine $|ON| = v_A$, (u oznaci P_{OKMN}), pa je

$$s_A = P_{OKMN} = v_A t. \tag{2}$$

Kurir iz B je do susreta prešao put s_B, jednak površini pravokutnika $OKLP$, osnovice $|OK| = t$ i visine $|OP| = v_B$, (u oznaci P_{OKLP}), pa je

$$s_B = P_{OKLP} = v_B t. \tag{3}$$

Zamjenom relacija (2) i (3) u (1) dobiva se

$$v_A t + v_B t = d. \tag{4}$$

Kako je $v_A > v_B$ kurir iz A je manje udaljen od mjesta B nego kurir iz B od mjesta A, pa će po uvjetu zadatka njemu trebati 9 sati da stigne u B, dok će kuriru iz B trebati 16 sati da stigne u A. S grafa je očigledno da kurir iz A stiže u B u trenutku $t+9$, prešavši put jednak udaljenosti d mjesta A od mjesta B, što na grafu odgovara površini pravokutnika $OQRN$, osnovice $|OQ| = t + 9$ i visine $|ON| = v_A$, (u oznaci P_{OQRN}), tj.

$$d = P_{OQRN} = v_A(t+9). \tag{5}$$

Kurir iz B stiže u A u trenutku $t+16$ prešavši put jednak udaljenosti d mjesta B od mjesta A, što na grafu odgovara površini pravokutnika $OSTP$, osnovice $|OS| = t + 16$ i visine $|OP| = v_B$, (u oznaci P_{OSTP}) tj.

$$d = P_{OSTP} = v_B(t+16). \tag{6}$$

Iz relacija (5) i (6) možemo izraziti brzine: $v_A = \dfrac{d}{t+9}$ i $v_B = \dfrac{d}{t+16}$.

Njihovom zamjenom u relaciju (4) dolazi se do kvadratne jednadžbe:

$$\frac{d}{t+9}t + \frac{d}{t+16}t = d \quad \text{tj.} \quad t^2 = 144 \quad \text{odnosno} \quad t = 12 \text{ (u h)}.$$

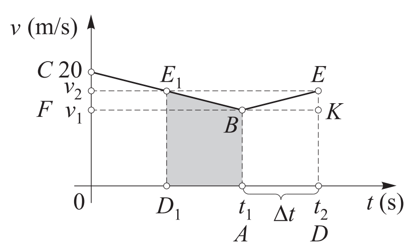
Kurir iz A krećući se brzinom v_A preći će čitav put od A do B za vrijeme:

$$t + 9 = 21 \text{ (u h)}$$

a kurir iz B krećući se brzinom v_B preći će čitav put od B do A za vrijeme:

$$t + 16 = 28 \text{ (u h)}.$$

Primjer 5. Tijelo je bačeno brzinom 20 m/ s vertikalno uvis. Na visini 15 m nalazi se horizontalna ploča od koje se tijelo savršeno elastično odbije. Nakon koliko vremena (od trenutka izbačaja) se tijelo vrati natrag? ($g = 9.81$ ms^{-2}). [5]



Rješenje: Graf predstavlja ovisnost brzine tijela od vremena. Nulti trenutak vremena je trenutak izbačaja tijela vertikalno uvis. Brzina tijela se tokom kretanja naviše smanjuje i u trenutku t_1, kada tijelo ima brzinu v_1, udara u horizontalnu ploču. Prema uvjetu zadatka udar tijela o ploču, koja je na udaljenosti $d = 15$ m od mjesta izbačaja tijela, savršeno je elastičan pa brzina v_1 mijenja samo smjer dok njezin intenzitet ostaje isti. Tijelo se nakon udara o ploču kreće naniže i u trenutku t_2 vraća na mjesto izbačaja. Prijeđeni put tijela vertikalno uvis do udara u ploču (s_1) jednak je udaljenosti ploče od mjesta izbačaja (d) tj. $s_1 = d = 15$ (u m).

Na grafu tom putu odgovara površina pravokutnog trapeza $OABC$, s osnovicama $|OC| = 20$ (u m/ s) i $|AB| = v_1$ i visinom $|OA| = t_1$, (u oznaci P_{OABC}), pa je

$$s_1 = P_{OABC} = \frac{20 + v_1}{2} t_1 = 15 \text{ (u m)}. \tag{1}$$

Na grafu prijeđenog puta tijela vertikalno dolje do mjesta izbačaja (s_2) odgovara površina pravokutnog trapeza $ADEB$, s osnovicama $|AB| = v_1$ i $|DE| = v_2$ i visinom $|AD| = t_2 - t_1 = \Delta t$, (u oznaci P_{ADEB}), pa je

$$s_2 = P_{ADEB} = \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t = 15 \text{ (u m)}. \tag{2}$$

Ubrzanje tijela prema gore i prema dolje je gravitacijsko $(g = 9.81 \text{ m/ s}^2)$ i određuje nagib dužine $\overline{BC}$ prema negativnom dijelu t-osi i nagib dužine $\overline{BE}$ prema t-osi (vidi sliku) pa je: $FBC = KBE$ i vrijedi

$$g = \frac{20 - v_1}{t_1} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}. \tag{3}$$

Ako oko dužine $\overline{AB}$ rotiramo pravokutni trapez $ADEB$ za $180°$, on će prijeći u osjenčani trapez AD_1E_1B s osnovicama $|AB| = v_1$ i $|D_1E_1| = v_2$ i visinom $|AD_1| = |AD| = \Delta t$ i imat će, naravno, istu površinu kao i trapez $ADEB$. Sa slike je očigledno razlika površina pravokutnog trapeza $OABC$ i osjenčanog trapeza AD_1E_1B također površina pravokutnog trapeza OD_1E_1C s osnovicama $|OC| = 20$ (u m/ s) i $|D_1E_1| = |DE| = v_2$ i visinom $|OD_1| = t_1 - \Delta t$ tj.

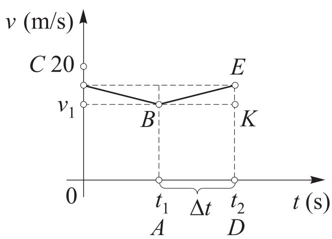
$$P_{OABC} - P_{ADEB} = \frac{20 + v_2}{2} (t_1 - \Delta t). \tag{4}$$

Zamjenom relacija (1) i (2) u (4) dobiva se:

$$0 = \frac{20 + v_2}{2} (t_1 - \Delta t) \quad \text{odakle je} \quad t_1 = \Delta t \tag{5}$$

pa iz (3) dobivamo $v_2 = 20$ (u m/ s).

Zato graf brzine tijela u ovisnosti od vremena, zapravo, izgleda ovako.



S grafa i iz relacije (5) se dobiva

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 2t_1. \tag{6}$$

S grafa su očigledne i relacije:

$$g = \frac{20 - v_1}{t_1} \quad \text{i} \tag{7}$$

$$P_{OABC} = \frac{20 + v_1}{2} t_1 = 15. \tag{8}$$

Iz relacija (7) i (8) se dobiva kvadratna jednadžba: $gt_1^2 - 40t_1 + 30 = 0$ čija su rješenja: $t_1' = 0.99$ (u s) i $t_1'' = 3.09$ (u s). Rješenje $t_1'' = 3.09$ nema fizički smisao jer se iz (7) za njega dobiva negativna vrijednost za veličinu brzine, što je nemoguće $(v_1 = 20 - gt_1 = -10.3)$. Na osnovu rješenja $t_1' = 0.99$ (u s) i relacije (6) dobiva se proteklo vrijeme od trenutka izbačaja do povratka tijela

$$t_2 = 2t_1' = 2 \cdot 0.99 = 1.98 \text{ (u s)}$$

Ova nestandardna metoda rješavanja problema kretanja može se veoma uspješno primijeniti i na sve vrste hitaca (vertikalan, kosi, horizontalan), kao i na slaganje kretanja, pa se naizgled jako teški zadaci mogu lako i brzo riješiti.

Zadaci za vježbu

1. Tokom šeste sekunde, krećući se jednoliko usporeno, motociklista prijeđe put od 3 m. Ubrzanje kojim se pri tome kretao ima intenzitet od 2 m/s^2. Kolika mu je početna brzina? (*Rj.* 14 m/s.) [2]

2. Balon se kreće vertikalno uvis stalnom brzinom 5 m/s. Poslije 20 s od balona se odvoji kuglica.

a) Kolika je najveća visina do koje će kuglica dospjeti? (*Rj.* 101.27 m.)

b) Poslije kojeg vremena će kuglica pasti na Zemlju ako se ono mjeri od trenutka odvajanja od balona? (*Rj.* 5.05 s.)

c) Kolika je srednja brzina kuglice na čitavom putu? (*Rj.* 8.08 m/s.) [2]

3. Ako se početna brzina tijela poveća 1.2 puta, pri nepromijenjenom usporenju, zaustavni put se poveća za 22 m. Koliki je bio zaustavni put prije navedene promjene? (*Rj.* 50 m.) [2]

4. Čestica, koja izlijeće iz nekog izvora, najprije prelazi 200 m stalnom brzinom v, a zatim usporava s 2 m/s^2. Pri kojoj je vrijednosti brzine v minimalno vrijeme kretanja čestice od izlijetanja iz izvora do zaustavljanja? (*Rj.* 20 m/s; $t_{\min} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$). [6]

5. Tri kuglice se puste slobodno padati, svaka sljedeća sa zakašnjenjem od jedne sekunde. Kolike su njihove međusobne udaljenosti pet sekundi nakon puštanja prve? (*Rj.* 44.145 m; 34.335 m; 78.48 m.) [1], [2]

Literatura

[1] LJILJANA SUDAR, *Geometrija pomaže fizici*, Zbornik sa XXVI republičkog seminara o nastavi fizike, Društvo fizičara Srbije, Vrnjačka Banja 2008., str.123–130.

[2] JEVREM JANJIĆ, MIROSLAV PAVLOV, BRANKO RADIVOJEVIĆ, *Fizika za I razred srednjeg obrazovanja i vaspitanja*, Naučna knjiga, Beograd 1987. str. 129–132.

[3] *Zadaci i rješenja – rješenja iz fizike*, zadatak OŠ–259., zadatak 1357., MFL 1/229, god. LVIII, Zagreb 2007.–2008., str. 45, 46.

[4] MILAN ŠARIĆ, BOGOLJUB MARINKOVIĆ, *Različiti načini rešavanja zadataka II, problemi kretanja*, Materijali za mlade matematičare sv. 83 (10), Arhimedes–R. Kašanin, Beograd–Beli Manastir 1995., str. 16.

[5] *Kvalifikacijski ispiti*, zadatak F–25., MFL 2/218, god. LV, Zagreb 2004.–2005., str. 126.

[6] NATAŠA ČALUKOVIĆ, MILAN RASPOPOVIĆ, *Fizika 1M*, Krug, Beograd 2001., str. 9.