Драгољуба Милошевић
Горњег Милановца

ЈЕДНА НЕЈЕДНАКОСТ И ЊЕНЕ ПРИМЕНЕ

Нека је $a \geqslant b \geqslant c$ и $x \geqslant y \geqslant z$, или $a \leqslant b \leqslant c$ и $x \leqslant y \leqslant z$. Тада важи:

$$(a+b+c)(x+y+z) \leqslant 3(ax+by+cz). \tag{**}$$

Докажимо ову неједнакост.

Доказ. С обзиром на претпоставку да су низови a, b, c и x, y, z монотони у истом смислу (тј. оба опадајућа, или оба растућа), можемо писати

$$(a-b)(x-y) \geqslant 0,\ (b-c)(y-z) \geqslant 0,\ (c-a)(z-x) \geqslant 0.$$

Сабирањем све три неједнакости добијамо

$$(a-b)(x-y)+(b-c)(y-z)+(c-a)(z-x) \geqslant 0,$$

тј.

$$2(ax+by+cz) \geqslant a(y+z)+b(z+x)+c(x+y).$$

Ако левој и десној страни последње неједнакости додамо по $ax+by+cz$, добијамо

$$3(ax+by+cz) \geqslant (a+b+c)(x+y+z),$$

што је еквивалентно са траженом неједнакошћу $(**)$. Једнакост у $(**)$ важи ако и само ако $a=b=c$ или $x=y=z$.

Сада ћемо дати неколико примера примене доказане неједнакости.

Пример 1. Ако су u, v, w, λ позитивни бројеви, при чему је $\lambda > 1$ и

$$\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}+\frac{1}{w+1}=2,$$

тада важи

$$\frac{1}{\lambda u+1}+\frac{1}{\lambda v+1}+\frac{1}{\lambda w+1} \geqslant \frac{6}{\lambda+2}. \tag{1}$$

Доказ. Без смањења општости можемо претпоставити да је $u \geqslant v \geqslant w$. Тада је

$$\frac{1}{u+1} \leqslant \frac{1}{v+1} \leqslant \frac{1}{w+1} \quad \text{и} \quad \frac{u+1}{\lambda u+1} \leqslant \frac{v+1}{\lambda v+1} \leqslant \frac{w+1}{\lambda w+1} \quad (\lambda > 1),$$

што значи да је услов за примену неједнакости $(**)$ испуњен. Наиме, ако ставимо $a=\frac{1}{u+1}$, $b=\frac{1}{v+1}, c=\frac{1}{w+1}$ и $x=\frac{u+1}{\lambda u+1}, y=\frac{v+1}{\lambda v+1}, z=\frac{w+1}{\lambda w+1}$, добијамо

$$\left(\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}+\frac{1}{w+1}\right)\cdot\left(\frac{u+1}{\lambda u+1}+\frac{v+1}{\lambda v+1}+\frac{w+1}{\lambda w+1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 3\cdot\left(\frac{1}{u+1}\cdot\frac{u+1}{\lambda u+1}+\frac{1}{u+1}\cdot\frac{v+1}{\lambda v+1}+\frac{1}{w+1}\cdot\frac{w+1}{\lambda w+1}\right),$$

тј.

$$\text{(2)}\qquad \frac{1}{\lambda u+1}+\frac{1}{\lambda v+1}+\frac{1}{\lambda w+1}\geqslant\frac{2}{3}\left(\frac{u+1}{\lambda u+1}+\frac{v+1}{\lambda v+1}+\frac{w+1}{\lambda w+1}\right),$$

због услова $\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}+\frac{1}{w+1}=2$. С обзиром да

$$\frac{u+1}{\lambda u+1}+\frac{v+1}{\lambda v+1}+\frac{w+1}{\lambda w+1}=\frac{1}{\lambda}\left(3+(\lambda-1)\left(\frac{1}{\lambda u+1}+\frac{1}{\lambda v+1}+\frac{1}{\lambda w+1}\right)\right),$$

из неједнакости (2) следи тражена неједнакост (1).

Пример 2. Ако су a, b, c странице, A, B, C унутрашњи углови (мерени у радијанима) и s полуобим троугла, тада је

$$\text{(3)}\qquad \frac{2}{3}\pi s\leqslant Aa+Bb+Cc<\pi s.$$

Доказ. На основу неједнакости (**) примењене на $A\geqslant B\geqslant C$ и $a\geqslant b\geqslant c$ добијамо

$$Aa+Bb+Cc\geqslant\frac{1}{3}(A+B+C)(a+b+c),$$

одакле, због $A+B+C=\pi$ и $a+b+c=2s$, произилази прва неједнакост у (3).

На основу неједнакости

$$(a+b+c)(A+B+C)=Aa+Bb+Cc+(b+c)A+(c+a)B+(a+b)C$$

и познатих неједнакости за странице троугла $b+c>a, c+a>b$ и $a+b>c$, следи

$$(a+b+c)(A+B+C)>2(Aa+Bb+Cc).$$

Последња неједнакост је еквивалентна са другом неједнакошћу у (3), због $a+b+c=2s$ и $A+B+C=\pi$. Овим је доказ завршен.

Задаци

1. Ако су a, b, c и x, y, z монотони у супротном смислу, тада је

$$(a+b+c)(x+y+z)\geqslant 3(ax+by+cz).$$

Доказати.

2. Доказати да за троугао важе следеће неједнакости.

(а) $\frac{s-a}{A}+\frac{s-b}{B}+\frac{s-c}{C}\geqslant\frac{3s}{\pi}$;

(б) $\frac{s-a}{aA}+\frac{s-b}{bB}+\frac{s-c}{cC}\geqslant\frac{9}{2\pi}$;

(в) $\dfrac{aA}{s-a}+\dfrac{bB}{s-b}+\dfrac{cC}{s-c}\geqslant 2\pi;$

(г) $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{aA}{b+c}+\dfrac{bB}{c+a}+\dfrac{cC}{a+b}<\pi.$

3. Доказати најпре да за странице и углове троугла важи $\dfrac{A}{a}\geqslant\dfrac{B}{b}\geqslant\dfrac{C}{c}$, ако је $a\geqslant b\geqslant c$, а затим и неједнакости:

(а) $\dfrac{A}{a}+\dfrac{B}{b}+\dfrac{C}{c}\leqslant\dfrac{3\pi}{2s}$,

(б) $\dfrac{a}{A}+\dfrac{b}{B}+\dfrac{c}{C}\leqslant\dfrac{6s}{\pi}$.

4. Доказати да за $0<\lambda<1$ важи неједнакост

$$\frac{1}{\lambda u+1}+\frac{1}{\lambda v+1}+\frac{1}{\lambda w+1}\leqslant\frac{6}{\lambda+2},$$

под условом $\dfrac{1}{u+1}+\dfrac{1}{v+1}+\dfrac{1}{w+1}=2.$

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година