ЈММО 2023

1. Една група деца се состои од 2022 момчиња и 2023 девојчиња. Секое девојче познава точно 2021 момче. (Познанствата се симетрични: ако A го познава B, тогаш и B го познава A.) Докажи дека не е можно секое момче да познава еднаков број девојчиња.

   Решение. Да забележиме дека вкупниот број на познанства е еднаков на $2013 \cdot 2011$, затоа што секое девојче познава по точно 2021 момче. Ако секое момче познава еднаков број девојчиња, на пример d, тогаш вкупниот број познанства би изнесувал $2022d$. Но, тоа би значело дека $2013 \cdot 2011 = 2022d$, што е противречност (имено, левата страна е непарен, а десната е парен број).

2. За еден природен број n ќе велиме дека е суперпрост ако разликата на секои два негови последователни позитивни делители е прост број. Определи ги сите суперпрости броеви.

   Решение. Јасно, броевите $n=1$ и $n=3$ се суперпрости, во што се убедуваме со непосредна проверка.

   Ќе докажеме дека не постојат други суперпрости броеви. Нека $n \geq 2$ е суперпрост број. Нека d е најмалиот природен делител на n, различен од 1. Ако d не е прост број, тогаш $d = ab$, каде $1 < a < d$, па затоа a е делител на n кој е различен од 1, и е строго помал од d, што противречи на минималноста на d. Заклучуваме дека $d = p$ за некој прост број p.

   Тогаш 1 и p се последователни делители на n, па $p-1$ е некој прост број q. Ако $q \geq 3$, тогаш q е непарен број, па p е парен број поголем од 2, што значи дека не е прост број, а тоа е противречност. Според тоа, $q=2$ и $p=3$. Бидејќи p е најмалиот делител на n различен од 1, бројот $\frac{n}{3}$ е втор најголем делител на n, што значи дека $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ мора да е прост број, да го означиме со r. Според тоа, $2n = 3r$. Но, r е прост број, па мора да е $r=2$ и $n=3$.

3. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\left(\frac{1+c}{a}+2\right)\left(\frac{1+a}{b}+2\right)\left(\frac{1+b}{c}+2\right) \geq 216 .$$

   Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако даденото неравенство го помножиме со abc, добиваме дека тоа е еквивалентно со неравенството

$$(1+c+2a)(1+a+2b)(1+b+2c) \le 6^3 abc .$$

Понатаму, ако во горното равенство замениме $a+b+c=1$, го добиваме еквивалентното неравенство:

$$(b+2c+3a)(c+2a+3b)(a+2b+3c) \le 6^3 abc . \qquad (1)$$

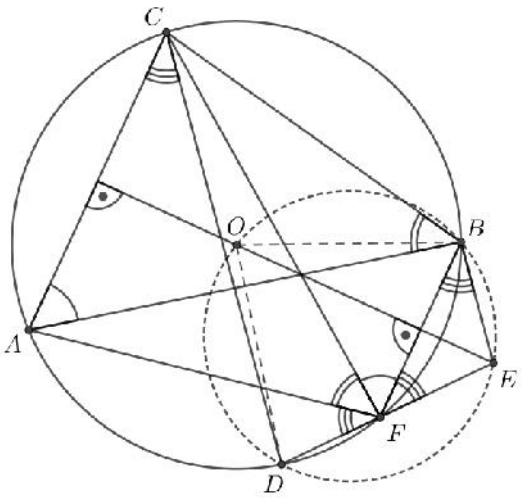
Но, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$b+2c+3a \ge 6\sqrt[6]{bc^2a^3},$$
$$c+2a+3b \ge 6\sqrt[6]{ca^2b^3},$$
$$a+2b+3c \ge 6\sqrt[6]{ab^2c^3}.$$

Конечно, ако ги помножиме последните три неравенства, го добиваме неравенството (1), кое е еквивалентно со даденото неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишана кружница O и $\overline{BC} < \overline{AB}$. Симетралата на $\sphericalangle ACB$ ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката D. Симетралата на страната AC ја сече опишаната кружница на $\triangle BOD$ во точката E. Правата DE по втор пат ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката F. Докажи дека правите CF, OE и AB се сечат во една точка.

Решение. Нека $\sphericalangle BAC = \sim$, $\sphericalangle CBA =$ и $\sphericalangle ACB = ¥$. Бидејќи DC е симетрала на $\sphericalangle ACB$ и D е точка на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ имаме



$$\sphericalangle AFD = \sphericalangle ACD = \frac{¥}{2},$$
$$\sphericalangle CFA = \sphericalangle CBA = ,$$
$$\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAC = \sim,$$

од каде следува

$$\sphericalangle EFB = \frac{¥}{2}. \qquad (1)$$

Од теоремата за централен

и периферискиагол имаме $\measuredangle DOB = 2\measuredangle DCB = ¥$. Понатаму, четириаголникот $DEBO$ е тетивен, па затоа

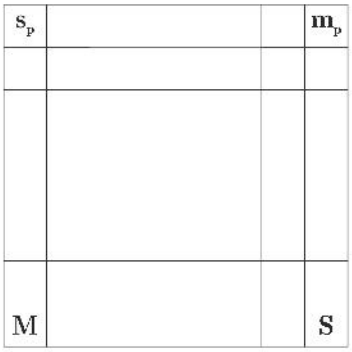
$$\measuredangle BED = 180^\circ - \measuredangle DOB = 180^\circ - ¥. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува

$$\measuredangle FBE = \frac{¥}{2}. \qquad (3)$$

Понатаму, од (1) и (3) следува дека $\triangle FEB$ е рамнокрак. Бидејќи BF е тетива, следува $BF \perp OE$. Од ова и од $AC \perp OE$ следува $AC \parallel BF$, што значи дека четириаголникот $AFBC$ е трапез. Но, трапезот $AFBC$ е тетивен четириаголник, па затоа тој е рамнокрак трапез. Сега, бидејќи AB и CF се дијагонали на рамнокрак трапез, а OE е симетрала на неговите основи, добиваме дека правите CF, OE и AB се сечат во една точка.

5. Дадена е квадратна 2023×2023 табла. За две полиња (1×1 квадратчиња) велиме дека се соседни ако имаат заедничко теме. Малер и Среќко ја играат следнава игра. На почетокот Малер има фигура во полето означено со *M*, а Среќко во полето означено со *S*. Тие наизменично повлекуваат потези со својата фигура следејќи ги следниве правила:
   1) Фигурата мора да се помести во поле соседно на полето во кое се наоѓа.
   2) Фигурата не смее да се помести во поле на кое претходно имало фигура (полињата во кои имало фигура не можат да се користат подоцна).
   3) Фигурата не смее да се постави во поле соседно на полето во кое е фигурата на противникот.

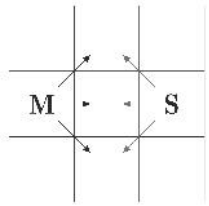


Играч победува ако ја постави својата фигура во полето што е дијаметрално спротивно на почетното (s_p за Среќко и m_p за Малер) или ако противникот е на ред да игра и нема дозволен потег за својата фигура. Малер ја почнува играта. Кој има победничка стратегија? (Образложи го одговорот.)

Решение. Прво да забележиме дека таблата е осносиметрична во однос на централната (1012-та) колона. Ќе докажеме дека вториот играч (Среќко) има победничка стратегија. Една победничка стратегија е

„имитирање на потезите на противникот следејќи ја споменатата симетрија“: „Срећко во секој потег ја поместува својата фигура во полето осносиметрично на полето во кое Малер ја поместил својата фигура во претходниот потег.“.

Најпрво докажуваме дека со ваквата стратегија Срећко секогаш може да игра. На почетокот полињата во кои се фигурите се осносиметрични, па со оваа стратегија во секоја рунда (откако двата играчи повлекле потег) фигурите се на осносиметрични полиња. Според ова доволно е да докажеме дека ако потегот бил дозволен за Малер, тогаш симетричниот потег е дозволен за Срећко. Да претпоставиме дека полето во кое треба да се придвижи Срећко веќе е искористено; така би следувало дека полето во кое се придвижил Малер веќе било искористено (недозволено), што е противречност. Според ова условите 1) и 2) се задоволени. За условот 3) да не биде задоволен потребно е Малер да ја придвижил фигурата во поле кое е соседно со осносиметричното на него или во поле од централната колона. Лесно се забележува дека две различни осносиметрични полиња не можат да бидат соседни. Освен ова ако Малер ја придвижил фигурата во централната колона (види цртеж лево), тоа значи дека неговата фигура се наоѓала на поле соседно со новото; но тогаш и фигурата на Срећко се наоѓа на соседно поле, што значи дека Малер направил недозволен потег. Ова е посакуваната противречност.



Според ова Срећко секогаш може да направи потег (кога е на ред). Од друга страна, бидејќи таблата има конечно полиња по конечно многу рунди, Малер нема да може да направи дозволен потег. Освен ова, лесно може да забележиме дека со наведената стратегија фигурата на секој од играчите останува на својата половина од таблата. Следствено, не можат да стигнат до победничкото поле (кое е во спротивната половина). Значи, ова е победничка стратегија за Срећко.