## БМО 1989

1. Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се сите делители на природниот број $n$, каде
$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n.$$
Определи ги сите природни броеви, за кои $k \geq 4$ и
$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$
**Решение.** Ако $n$ е непарен број, тогаш и неговите делители се непарни броеви, од каде следува дека $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$ е парен број, што е противречност. Според тоа, $n$ е парен број, $d_1 = 1, d_2 = 2$ и $n = 5 + d_3^2 + d_4^2$. Тогаш, само еден од броевите $d_3$ и $d_4$ е парен. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја.
   1) Нека $d_3$ е парен, т.е. $d_3 = 2a, a > 1$. Тогаш $a$ е делител на $n$ кој е поголем од $d_1$ и е помал од $d_3$, па затоа $a = d_2 = 2$ и $d_3 = 4$. Според тоа, $n = 21 + d_4^2$, што не е можно бидејќи $n$ е делив со 4, а $d_4^2 \equiv 0$ или $1 (\text{mod}\, 4)$ и $21 \equiv 1 (\text{mod}\, 4)$.
   2) Нека $d_4$ е парен, т.е. $d_4 = 2a, a > 1$. Ако $a = 2$, добиваме $d_4 = 4$ и од $2 = d_2 < d_3 < d_4 = 4$ следува $d_3 = 3$. Тогаш $n = 30$, кој не е делив со 4 и значи не е решение на задачата. Според тоа, $a$ е делител на $n$ кој е поголем од $d_2 = 2$ и помал од $d_4$, т.е. $a = d_3$. Значи, $n = 5(1 + d_3^2)$. Од $d_3 \mid n$ и $\text{NZD}(d_3, 1 + d_3^2) = 1$ заклучуваме дека $d_3 \mid 5$, и како $d_3 > 1$ следува $d_3 = 5$. Тогаш $n = 130$ и тоа е единственото решение на задачата.

2. Нека $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10 a_1 + a_0$ е декаден запис на прост број, каде $n > 1$ и $a_n > 1$. Докажи дека полиномот
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
е неразложлив, т.е. не може да се претстави како производ на два полиноми со позитивни степени и целобројни коефициенти.
**Решение.** Прво ќе ја докажеме следнава лема.
*Лема*. Ако $a$ е комплексен корен на полином со реални коефициенти
$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n,$$
тогаш $|a| < 1 + m$, каде
$$m = \max\{|\frac{a_k}{a_n}| : 0 \leq k \leq n-1\}.$$
*Доказ*. Ако $|a| \geq m + 1$, тогаш последователно добиваме

$$0=|f(a)|\geq|a_na^n|\cdot|1+\frac{a_{n-1}}{a_na}+\frac{a_{n-2}}{a_na^2}+...+\frac{a_0}{a_na^n}|$$
$$\geq|a_na^n|(1-|\frac{a_{n-1}}{a_na}|-|\frac{a_{n-2}}{a_na^2}|-...-|\frac{a_0}{a_na^n}|)$$
$$\geq|a_na^n|(1-|\frac{m}{a}|-|\frac{m}{a^2}|-...-|\frac{m}{a^n}|)$$
$$\geq|a_na^n|[1-m(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}+...+\frac{1}{(m+1)^n})]$$
$$>|a_na^n|[1-m(-1+\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}})]=0,$$

што е противречност. Според тоа, $|a|<1+m$. ■

Нека претпоставиме дека $P(x)=f(x)g(x)$, каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми со позитивни степени и целобројни коефициенти. Нека корените на $f(x)$ се $x_1,x_2,...,x_k$. Тогаш $x_1,x_2,...,x_k$ се корени на $P(x)$ и согласно со докажаната лема модулите им се помали од $1+\frac{9}{2}<9$. Според тоа, ако $b$ е коефициентот пред највисокиот степен на $f(x)$, тогаш

$$|f(10)|=|b|\cdot|\prod_{i=1}^{k}(10-x_i)|\geq|b|\prod_{i=1}^{k}(10-|x_i|)>1$$

и аналогно $|g(10)|>1$. Значи, $P(10)=f(10)g(10)$ не е прост број, што противречи на условот на задачата.

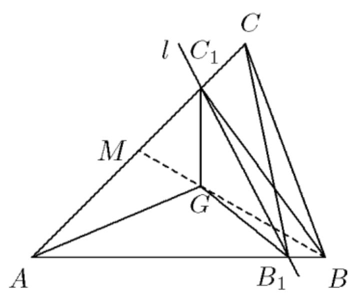
3. Нека $BAC$ е триаголник со тежиште $G$ и нека $l$ е права која ги сече страните $AB$ и $AC$ соодветно во точките $B_1$ и $C_1$ така што $A$ и $G$ лежат во иста полурамнина во однос на $l$. Докажи дека

$$P_{BB_1GC_1}+P_{CC_1GB_1}\geq\frac{4}{9}P_{ABC}.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Заради пократко запишување да означиме $P_{ABC}=P, P_{AB_1C_1}=P_0, P_{AB_1G}=P_1$ и $P_{AC_1G}=P_2$. Од условот на задачата следува, т.е. бидејќи $A$ и $G$ лежат од иста страна на правата $l$, важи $P_0\geq P_1+P_2$. Имаме

$$P_{BB_1GC_1}=P_{ABC_1}-P_1-P_2 \text{ и}$$
$$P_{CC_1GB_1}=P_{ACB_1}-P_1-P_2.$$




Од $P_{ABG}:P_{AMG}=2:1=P_{BGC_1}:P_{MGC_1}$ следува дека $P_{ABC_1}=3P_2$. Аналогно се докажува дека $P_{ACB_1}=3P_1$. Тогаш

$$P_{BB_1GC_1}+P_{CC_1GB_1}=P_{ABC_1}-P_1-P_2+P_{ACB_1}-P_1-P_2=P_1+P_2 .$$

Останува да докажеме дека $P_1+P_2\geq\frac{4P}{9}$. Имаме

$$P_1=\frac{P_{AB_1C}}{3}=\frac{P\cdot\overline{AB_1}}{3\overline{AB}}\text{ и }P_2=\frac{P\cdot\overline{AC_1}}{3\overline{AC}} .$$

Тогаш од горните равенства, неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}$ и $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}$ и од равенствата

$$P_0=\frac{\overline{AB_1}\cdot\overline{AC_1}\sin\measuredangle ABC}{2}\text{ и }P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle ABC}{2}$$

следува:

$$P_1+P_2=\frac{P}{3}\left(\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}\right)\geq\frac{2P}{3}\sqrt{\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}}=\frac{2P}{3}\sqrt{\frac{P_0}{P}}\geq\frac{2}{3}\sqrt{P(P_1+P_2)} ,$$

од каде што следува саканото неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}$ и $P_0=P_1+P_2$, т.е. ако и само ако правата $l$ минува низ $G$ и е паралелна со $BC$.

4. Нека $\mathbb{F}$ е множество, чии елементи се подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ и кои ги имаат следниве својства:

1) Ако $A\in\mathbb{F}$, тогаш $|A|=3$.

2) Ако $A,B\in\mathbb{F}$ и $A\neq B$, тогаш $|A\cap B|\leq 1$.

Нека $f(n)$ е максималната вредност на $|\mathbb{F}|$ за сите такви множества $\mathbb{F}$. Докажи дека за $n\geq 3$ важи

$$\frac{n^2-4n}{6}\leq f(n)\leq\frac{n^2-n}{6} .$$

**Решение.** Нека $\mathbb{F}$ е произволна фамилија од триелементни подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ која ги има саканите својства. Секој $A\in\mathbb{F}$ има $\binom{3}{2}=3$ двоелементни подмножества, при што заради 2) за $A,B\in\mathbb{F}$, $A\neq B$ не е можно да содржат едно исто двоелементно подмножество, што значи дека различните $A$ и $B$ генерираат различни двоелементни подмножества. Тоа значи, дека множествата од $\mathbb{F}$ заедно содржат $3|\mathbb{F}|$ различни двоелементни подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Според тоа, $3|\mathbb{F}|\leq\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, т.е. $f(n)\leq\frac{n^2-n}{6}$.

За левото неравенство е потребна конкретна конструкција на множество со најмалку $\frac{n^2-4n}{6}$ елементи за кои се исполнети условите 1) и 2). Нека $\mathbb{F}_0$ е множеството од оние триелементни подмножества $\{a,b,c\}$ на $\{1,2,...,n\}$ за кои важи $a+b+c=n$ или $a+b+c=2n$. Секои две такви множества имаат најмногу еден заеднички елемент. Навистина, нека $a+b+c_1\in\{n,2n\}$ и $a+b+c_2\in\{n,2n\}$.

Ако $c_1 \neq c_2$, тогаш $|c_1 - c_2| = 2n - n = n$, што не е можно бидејќи $c_1, c_2 \in \{1, 2, ..., n\}$. Значи, за множеството $\mathbb{F}_0$ се исполнети условите 1) и 2), па затоа $f(n) \geq |\mathbb{F}_0|$. Останува оддолу да го оцениме $\mathbb{F}_0$. Нека $a, b, c \in \mathbb{F}_0$. За бројот $a$ имаме $n$ можности, а при фиксирано $a$ за $b$ имаме најмалку $n-4$ можности (единствени ограничувања за $b$ се $1 \leq b \leq n$, $b \neq a$, $b \neq \frac{n-a}{2}$, $b \neq \frac{2n-a}{2}$, $b \neq n-2a$). Всушност бираме подредени тројки $(a,b,c)$ за кои $\{a,b,c\} \in \mathbb{F}_0$. Но, тројката $(a,b,c)$ има $3! = 6$ пермутации и затоа секој елемент на $\mathbb{F}_0$ се брои шест пати. Според тоа, $6|\mathbb{F}_0| \geq n(n-4)$, од каде следува дека $f(n) \geq |\mathbb{F}_0| \geq \frac{n^2-4n}{6}$.