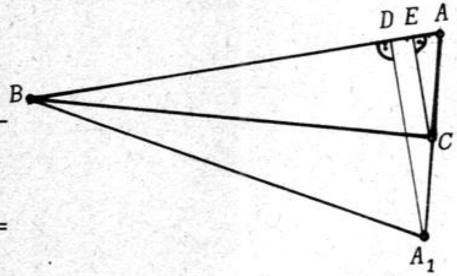
Драгољуб Милошевиќ
Прањани

ЗА ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК ШТО ИМА ЕДЕН ОСТАР АГОЛ ОД 15°

Во геометријата е познато едно својство на правоаголен триаголник што има еден остар агол од 15°. Во овој напис ќе го разгледаме ова својство и некои негови примени. За таа цел да ги разгледаме следните задачи.

Задача 1. Во правоаголен триаголник со еден остар агол од 15°, хипотенузата c е четирипати поголема од висината h_c спуштена кон c. Докажи!

Решение. Нека за правоаголниот триаголник ABC (црт. 1) важи $\measuredangle ABC=15^\circ$. Ја определуваме точката A_1 симетрична на точката A во однос на катетата BC. Нека D и E се подножни точки на висината A_1D и CE на триаголниците ABA_1 и ABC, соодветно. За правоаголниот триаголник DBA_1 важи $\measuredangle DBA_1 = 30^\circ$ и $\measuredangle DA_1B = 60^\circ$, па затоа $\overline{A_1D} = \overline{A_1B}/2 = \overline{AB}/2$. Од друга страна, $\overline{AC} = \overline{CA_1}$ и $CE \parallel A_1D$ па затоа EC е средна линија за триаголникот A_1DA. Според тоа, $h_c = \overline{A_1D}/2 = \overline{AB}/4 = c/4$, а тоа требаше да се докаже.



Црт. 1

Задача 2. Нека a, b се катетите и c е хипотенузата на правоаголен триаголник со еден остар агол од 15°. Докажете дека:

а) $P = \frac{c^2}{8}$ **б)** $R = \sqrt{ab}$,

каде што P е плоштина, а R радиус на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. а) Плоштината на триаголникот е $P = \frac{1}{2}ch_c$.

Според задача 1 добиваме

(1) $$P = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{4}c = \frac{1}{8}c^2.$$

б) Дадениот триаголник е правоаголен со катети a и b, па затоа неговата плоштина е

(2) $$P = \frac{ab}{2}.$$

Бидејќи радиусот на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник е половина од хипотенузата, т.е. $R=c/2$, од релациите (1) и (2) добиваме

$$\frac{c^2}{8} = \frac{ab}{2}, \text{ т.е. } \left(\frac{c}{2}\right)^2 = ab,$$

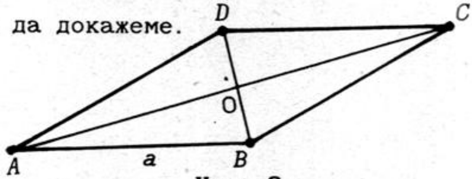
т.е. $R^2 = ab$, од каде што следува $R = \sqrt{ab}$.

Задача 3. Ако острииот агол на ромб е еднаков на 30°, тогаш страната a на тој ромб е еднаква на геометриската средина на неговите дијагонали, т.е. $a=\sqrt{d_1 \cdot d_2}$. Докажи!

Решение. Дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол и се преполовуваат. Според тоа, AO е висина на рамнокракиот триаголник ABD, со $\measuredangle BAD=30^\circ$. Значи,

$$\measuredangle BAO=15^\circ.$$

Од претходната задача под б) и фактот дека $\overline{BO}=\frac{d_1}{2}$ и $\overline{AO}=\frac{d_2}{2}$ добиваме $\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}}$, т.е. $a=\sqrt{d_1\cdot d_2}$, а тоа е што требаше да докажеме.



Црт. 2

Задача 4. Нека во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е дадена точка M, но таква што $\overline{AM}=\overline{BM}$ и $\sphericalangle AMB=150^\circ$. Докажи дека триаголникот CDM е рамностран.

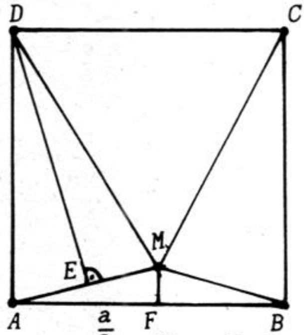
Решение: Нека DE е висина во $\triangle AMD$ и MF е висина во $\triangle ABM$.

Од $\overline{AM}=\overline{MB}$ и $\sphericalangle AMB=150^\circ$ следува $\sphericalangle MAF=15^\circ$, и $\sphericalangle AMF=75^\circ$.

Значи, $\sphericalangle EAD=90^\circ-\sphericalangle EAF=75^\circ$ и $\sphericalangle EDA=15^\circ$.

Според тоа, $\triangle AED\sim\triangle MFA$.

Значи,



Црт. 3

(3) $\qquad \overline{MA}:\overline{AD}=\overline{MF}:\overline{AE}$

и бидејќи е $\overline{MA}=2\sqrt{\overline{MF}\cdot\overline{AF}}=2\sqrt{\overline{MF}\cdot\frac{a}{2}}$ и $\overline{AD}=a$ од (3) добиваме

(4) $\qquad \overline{AE}=\sqrt{\overline{MF}\cdot\frac{a}{2}}=\sqrt{\overline{MF}\cdot\overline{AF}}$

Од (4) и задача 2 следува $\overline{AE}=\frac{\overline{MA}}{2}$, т.е. $\triangle AMD$ е рамнокрак, со краци $\overline{AD}=\overline{DM}=a$. Заради симетрија имаме дека и $\triangle MBC$ е рамнокрак со краци $\overline{MC}=\overline{BC}=a$.

Конечно, $\triangle MCD$ е рамностран триаголник. Навистина, $\overline{MC}=\overline{MD}=\overline{CD}=a$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус