Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

УЗ ПОЧЕТАК 2014. ГОДИНЕ

Ратко Тошић, Нови Сад

Сваке године, на такмичењима се појављују задаци у којима фигурише редни број те године. За предлагаче задатака посебан је изазов да саставе задатак у коме су или неки услов, или само решење, повезани са редним бројем године. Вероватно ни ова година неће представљати изузетак, па зато задаци из овог чланка могу да послуже као својеврсна припрема за такмичења. Број 2014 је производ три проста броја:

$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53,$$

одакле следи да има 8 делилаца (укључујући 1 и 2014).

Задаци

1. У једнакости

$$* \cdot *** + * = 2014$$

сваку звездицу замени неком цифром тако да добијеш тачан рачун.

2. Замени a, b, c, d, e цифрама (различита слова различитим цифрама) тако да се добије тачна једнакост:

$$a \cdot \overline{bcd} + e = 2014.$$

3. Колико најмање пута треба узастопно исписати број 2014 да би се добио број дељив са 99?

4. Између сваке две цифре низа

$$9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

постави знак неке основне операције и по потреби распореди заграде тако да се добије израз чија је бројевна вредност једнака 2014.

5. Прецртај шест цифара у низу цифара

$$2014201420142014$$

тако да десетоцифрен број који се састоји од преосталих цифара буде
(а) највећи могући; (б) најмањи могући.

6. У 2014. години Марко ће напунити толико година колики је збир цифара године његовог рођења. То исто важи и за његовог најстаријег брата. Колико је Марко млађи од свог најстаријег брата?

7. Означимо са $S(n)$ збир цифара броја n. Нађи све природне бројеве n такве да је број 2014 дељив са $n + S(n)$.

8. Природан број се завршава са 2014. Брисањем последње четири цифре број се смањи цео број пута. Који је то број?

9. Постоје ли цели бројеви x, y, z такви да је

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 20132014?$$

10. Први члан низа бројева је 2014, а сваки следећи једнак је збиру квадрата цифара претходног. Одреди 2014. члан тог низа.

11. Први члан низа је 439, а сваки следећи је 13 пута већи од збира цифара претходног. Одреди 2014. члан тог низа.

12. Између неких цифара у низу од 12 двојки

$$2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2$$

постави знаке рачунских операција тако да вредности добијеног израза буде 2014.

13. Дешифруј сабирање

$$\begin{array}{cccc} & A & A & A \\ & A & A & B \\ + & A & C & C \\ \hline 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

14. Шта је веће: $\dfrac{2013}{2014}$ или $\dfrac{20132013}{20142014}$?

15. Да ли се неки правоугаоник површине 2014 са целобројним дужинама страница може разрезати на 12 квадрата са целобројним дужинама страница?

16. Збир неких 2014 природних бројева је непаран број. Да ли је производ тих бројева паран или непаран?

17. Да ли је број $1157^{2014} + 34^{2014}$ потпун квадрат?

18. Докажи да број $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2014^2$ није потпун квадрат.

19. Нађи збир првих 2014 децимала разломка $\dfrac{6}{7}$.

20. Да ли постоје природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 2013 \cdot 2014$?

21. Одреди последњу цифру броја

$$1^{2014} + 2^{2014} + 3^{2014} + \ldots + 2014^{2014}.$$

22. Одреди последњу цифру броја

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 2014^{2014}.$$

23. Одреди две последње цифре броја 8^{2014}.

24. Одреди четири последње цифре броја 5^{2014}.

25. Реши у скупу природних бројева једначину

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 2014.$$

26. Да ли је могуће представити број 201420142014 у облику збира два квадрата природних бројева?

27. На табли су написани бројеви

$$1, 2, 3, 4, ..., 2013, 2014.$$

Дозвољено је избрисати два броја и уместо њих написати апсолутну вредност њихове разлике. На тај начин се сваки пут број написаних бројева смањује за 1. Да ли је могуће да на крају остане записана само нула?

28. Одреди последњу цифру збира квадрата првих 2014 чланова низа

$$2, 5, 8, 11, 14, ...$$

Решења

1. Треба уствари наћи сва решења једначине

$$a\cdot\overline{bcd}+e=2014,$$

где су a, b, c, d, e цифре и $\overline{bcd}$ декадни запис троцифреног броја. Како је $0 \le e \le 9$, мора бити $2014 \ge a\cdot\overline{bcd} \ge 2005$. Директном провером налазимо 11 решења:

$3\cdot 669+7=2014$; $3\cdot 670+4=2014$; $3\cdot 671+1=2014$;
$4\cdot 502+6=2014$; $4\cdot 503+2=2014$; $5\cdot 401+9=2014$; $5\cdot 402+4=2014$;
$6\cdot 335+4=2014$; $7\cdot 287+5=2014$; $8\cdot 251+6=2014$; $9\cdot 223+7=2014$.

2. Услов задовољава пет решења из претходног задатка:

$3\cdot 670+4=2014$; $4\cdot 502+6=2014$; $4\cdot 503+2=2014$;
$5\cdot 401+9=2014$; $8\cdot 251+6=2014$.

3. Нека је n тражени број и $A = 20142014...2014$ број који се добије кад се 2014 испише n пута узастопно. Збир цифара броја A једнак је $7n$, а разлика збира цифара на парним и збира цифара на непарним местима је $4n - 3n = n$. Број A је дељив са 99 када је n дељив и са 9 и са 11, а најмањи такав број је 99.

4. $9\cdot 8\cdot 7\cdot(6-5)\cdot 4-3+2-1=2014.$

5. (а) 4420142014; (б) 1010142014.

6. Нађимо прво све бројеве који сабрани са збиром својих цифара дају број 2014. Лако се види да такав број мора бити четвороцифрен који почиње са 2 или са 19. У првом случају лако налазимо да је једини такав број 2006.

Ако је тражени број облика $\overline{19xy}$, онда мора бити

$$(1900 + 10x + y) + (10 + x + y) = 2014,$$

тј. $11x + 2y = 104$. Једино решење последње једначине у скупу ненегативних целих бројева је $x = 8$, $y = 8$. Како су то једноцифрени бројеви, следи да и број 1988 задовољава услове задатка.

Дакле, постоје два броја која сабрана са збиром својих цифара дају 2014. То су 1988 и 2006. Према томе, Марко је рођен 2006. године, а његов брат 1988. Марко је млађи од свог брата 18 година.

7. Како је $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, тражени бројеви су сви они који задовољавају бар једну од једначина: $n + S(n) = 2$, $n + S(n) = 19$, $n + S(n) = 53$, $n + S(n) = 38$, $n + S(n) = 106$, $n + S(n) = 1007$, $n + S(n) = 2014$.
Решење прве једначине је 1, друге 14, трећа једначина нема решења, четврте 28, пете 89, решења шесте су 985 и 1003, а решења седме су 1988 и 2006.

8. Брисањем последње четири цифре датог броја добија се број A. При томе је полазни број $10000A + 2014$ дељив са A. Да би тај број био дељив са A мора и 2014 да буде дељив са A. Дакле, тражени бројеви су 12014, 22014, 192014, 382014, 532014, 1062014, 11072014, 20142014.

9. Не. После кубирања, скраћивања и груписања добијамо да је израз на левој страни једнакости дељив са 3, док број на десној страни није дељив са 3 (јер му збир цифара није дељив са 3).

10. Испишимо првих неколико чланова низа:

$$2014, 21, 5, 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, \ldots$$

После другог појављивања броја 89 јасно је да ће се периодично понављати бројеви

$$89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58.$$

Како пре прве периоде имамо шест чланова низа и $2014 = 6 + 251 \cdot 8$, 2014. члан низа биће последњи број периоде, тј. 58.

11. Првих неколико чланова низа су

$$439, 208, 130, 52, 91, 130, \ldots$$

Видимо да је низ периодичан и да је сваки трећи члан једнак 130, а иза 130 увек следи број 52. Како је број 2013 дељив са 3, 2014. члан низа је 52.

12. Дајемо два примера:

$$2222 - 222 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 2014;$$
$$2222 - 222 + 22 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2014.$$

13. Лако се види да мора бити $A = 6$ и $B + C = 8$. Из разреда јединица имамо пренос 1. Како се збир десетица мора завршавати са 0 и при томе пренос мора бити 2, то је C = 8, B = 0, па је решење:

$$\begin{array}{rr} & 666 \\ & 660 \\ + & 688 \\ \hline & 2014 \end{array}$$

14. Како је

$$\frac{20132013}{20142014}=\frac{10001\cdot 2013}{10001\cdot 2014}=\frac{2013}{2014},$$

дати бројеви су једнаки.

15. Да. Како је 214 = 2 · 19 · 53, треба разматрати случајеве правоугаонника 1×2014, 2×1007, 19×106, 38×53.
Правоугаоник 19×106 може се разрезати на пет квадрата странице 19, један квадрат странице 11, један квадрат странице 8, два квадрата странице 3, један квадрат странице 2 и два квадрата странице 1. (Сваки пут од преосталог правоугаоника одсецамо квадрат чија је страница једнака мањој страници тога правоугаоника.)
Правоугаоник 38×53 може се разрезати на један квадрат странице 38, два квадрата странице 15, један квадрат странице 8, један квадрат странице 7 и седам квадрата странице 1. (Сваки пут од преосталог правоугаоника одсецамо квадрат чија је страница једнака мањој страници тога правоугаоника.)
Лако се види да је у остала два случаја минималан број квадрата на које се може разрезати правоугаоник далеко већи (2014 и 505).

16. Међу посматраним бројевима је бар један паран (јер би у противном збир 2014 непарних бројева био паран). Зато је њихов производ паран.

17. Не. Како је
$(1157^{1007})^2=1157^{2014}<1157^{2014}+34^{2014}<1157^{2014}+4\cdot 1157^{1007}+4=(1157^{1007}+2)^2$,
следи да се дати број, који је непаран, налази између два узастопна непарна квадрата. Овде смо користили чињеницу да је

$$34^{2014}=1156^{1007}<4\cdot 1157^{1007}+4.$$

18. Број сабирака дељивих са 3 једнак је 671, а број оних који при дељењу са 3 дају остатак 1 је 1343. Дакле, дати збир је број који при дељењу са 3 даје остатак 2, па не може бити квадрат.

19. Разломак $\frac{6}{7}=0{,}8571428...$ је периодичан са периодом 857142 дужине 6. Збир цифара периоде је 27. Како је $2014=335\cdot 6+4$, то је тражени збир једнак $335\cdot 27+8+5+7+1=9045+21=9066$.

20. Број x^2 завршава се неком од цифара 0, 1, 4, 5, 6 или 9, а број $5y$ неком од цифара 0 или 5. Зато се број x^2+5y завршава неком од цифара 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Међутим, број $2013\cdot 2014$ завршава се цифром 2, па тражени бројеви не постоје.

21. Последња цифра броја x^{2014} мења се периодично. За 10 узастопних бројева (чије су последње цифре редом 1, 2, ..., 9, 0), последња цифра узима вредности

$$1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0,$$

па видимо да се збир тих 10 бројева завршава цифром 5. Следи да се збир првих 2010 (= 201 · 10) бројева завршава истом цифром као и број 201 · 5, тј. цифром 5. Збир последња четири сабирка завршава се цифром 0 (1 + 4 + 6 + 9 = 20), па се цео збир завршава цифром 5.

22. Последње цифре бројева n^n ($n \geq 1$) се периодично понављају са периодом дужине 20:

$$1, 4, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 4, 9, 0.$$

За првих 2000 сабирака збир последњих цифара је 100 пута већи од збира последњих цифара првих 20 сабирака, па је његова последња цифра 0. Дакле, тражена последња цифра је једнака последњој цифри збира првих 14 сабирака датог збира, тј. једнака је 3.

23. Непосредно се проверава да се две последње цифре броја 8^n периодично мењају са периодом дужине 20:

$$08, 64, 12, 96, 68, 44, 52, 16, 28, 24, 92, 36, 88, 04, 32, 56, 48, 84, 72, 76.$$

Како је 2014 = 100 · 20 + 14, број 8^{2014} завршава се са исте две цифре као и број 8^{14}, тј. са 004.

24. Непосредно се проверава да се последње четири цифре броја 5^{2014} мењају периодично са периодом дужине 4 (за $n > 4$):

$$5, 25, 125, 625, 3125, 5625, 8125, 0625, 3125, \ldots$$

Зато су последње четири цифре броје 5^{2014} исте као и код броја 5^6, тј. 5625.

25. Додајући левој и десној страни број 1, једначина се може написати у облику

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 2015.$$

Како је 2015 = 5 · 13 · 31, решења једначине су тројке природних бројева (4, 12, 30), (4, 30, 12), (12, 4, 30), (12, 30, 4), (30, 4, 12), (30, 12, 4).

26. Збир цифара датог броја је 21, па је остатак тога броја при дељењу са 9 једнак 3. С друге стране квадрат природног броја при дељењу са 9 може да даје само остатке 0, 1, 4 и 7. Следи да се дати број не може представити у облику збира два квадрата, јер се сабирањем два броја из скупа {0, 1, 4, 7} не може добити број који при дељењу са 9 даје остатак 3.

27. Заменом бројева x и y са $|x-y|$ збир свих бројева записаних на табли смањује се за $2x$ или $2y$, тј. за паран број. Међутим, збир свих бројева записаних на почетку једнак је

$$\frac{2015 \cdot 2014}{2} = 2015 \cdot 1007,$$

тј. непаран је. Сваки пут када одуземо од непарног броја паран број, разлика је непаран број. Према томе, никад не можемо добити паран збир, па према томе ни нулу на крају.

28. Последње цифре квадрата чланова датог низа мењају се периодично са периодом дужине 10:

$$4, 5, 4, 1, 6, 9, 0, 9, 6, 1, 4, 5, \ldots \tag{1}$$

Последња цифра збира сваке десеторке низа (1) је 5 (збир 45), па је последња цифра збира првих 2010 чланова тог низа једнака последњој цифри броја 201 · 5, тј. 0. Тражена цифра одређена је збиром последња четири квадрата, односно збиром 4 + 5 + 4 + 1 и то је цифра 4.