Републички натпревар 2017

I година

1. Определи ги сите петцифрени броеви $\overline{abcde}$ такви што $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}$ и $\overline{de}$ се точни квадрати. Одговорот да се образложи!

Решение. Единствени двоцифрени броеви кои што се точни квадрати се 16, 25, 36, 49, 64 и 81. Тие почнуваат на цифрите 1, 2, 3, 4, 6 и 8, а завршуваат со цифрите 1, 4, 5, 6 и 9. Според тоа, цифрите b,c,d можат да бидат само 1, 4 и 6. Бидејќи $\overline{bc}$ и $\overline{cd}$ се точни квадрати, тоа е можно само за $\overline{bc}=16$ и $\overline{cd}=64$. Конечно, $\overline{ab}$ е точен квадрат за $a=8$ и $\overline{de}$ е точен квадрат за $e=9$. Според тоа, постои единствен број кој ги задоволува условите на задачата и тоа е бројот 81649.

2. Пресметај $A=\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n}+\underbrace{111...1}_{n+1}+\underbrace{666...6}_{n}+8}$.

Решение. Ако означиме $\underbrace{111...1}_{n}=a$, тогаш

$$\underbrace{666...6}_{n}=6a,\quad \underbrace{111...1}_{n+1}=10a+1,$$

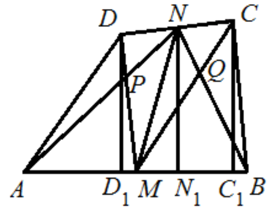
$$\underbrace{111...1}_{2n}=10^n a+a=(\underbrace{999...9}_{n}+1)a+a=9a^2+2a,$$

па, затоа

$$A=\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n}+\underbrace{111...1}_{n+1}+\underbrace{666...6}_{n}+8}=\sqrt{9a^2+18a+9}=\sqrt{9(a^2+2a+1)}$$

$$=3\sqrt{(a+1)^2}=3(a+1)=3(\underbrace{111...1}_{n}+1)=\underbrace{33...33}_{n}6.$$

3. Нека M и N се средините на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ и нека P е пресекот на MD и AN, а Q е пресекот на MC и BN. Докажи, дека плоштината на четириаголникот $MQNP$ е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците APD и BCQ.



Решение. Нека $h_1=\overline{DD_1}$, $h=\overline{NN_1}$ и $h_2=\overline{CC_1}$ се должините на висините на триаголниците AMD, ABN и MBC, соодветно. Четириаголникот DD_1CC_1 е трапез со основи h_1 и h_2 и средна линија h, па затоа $2h=h_1+h_2$. Ако $\overline{AB}=a$, тогаш збирот на плоштините на триаголниците AMD и MBC е

$$P_{AMD}+P_{MBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}h_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}h_2=\frac{1}{2}ah=P_{ABN}\ . \tag{1}$$

Понатаму,

$$P_{AMD}=P_{AMP}+P_{APD},\ P_{MBC}=P_{MBQ}+P_{BQC} \text{ и } P_{ABN}=P_{AMP}+P_{MQNP}+P_{MBQ}\ .$$

Ако од последните три равенства замениме во (1), после скратувањето добиваме

$$P_{APD}+P_{BQC}=P_{MQNP}\,,$$

што и требаше да се докаже.

4. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^2+pq+q^2=r^2\,.$$

Решение. Очигледно е дека $r>p$ и $r>q$. Равенката ја запишуваме во облик $(p+q)^2-pq=r^2$ од каде следува

$$(p+q-r)(p+q+r)=pq\,.$$

Јасно,

$$p+q-r<p+q+r\,,\quad p+q-r<p \text{ и } p+q-r<q$$

од каде добиваме дека p,q не се делители на $p+q-r$, па затоа важи

$$p+q-r=1,\ p+q+r=pq\,.$$

Со собирање на последните две равенки добиваме

$$2p+2q=pq+1 \text{ или } (p-2)(q-2)=3\,.$$

Од последната равенка добиваме $p=3,q=5$ или $p=5,q=3$. И во двата случаја $r=7$.

Конечно, $(p,q,r)\in\{(3,5,7),(5,3,7)\}$.

II година

1. Дадена е равенката

$$(a^2-a-2)x^2+(2a^2-2a+5)x+a^2-a-2=0\,,\ a\neq-1,\ a\neq 2\,.$$

Докажи дека корените на оваа равенка се реални. За која вредност на параметарот a збирот на корените е најмал?

Решение. Од

$$\begin{aligned}D&=(2a^2-2a+5)^2-4(a^2-a-2)(a^2-a-2)\\&=(2a^2-2a+5)^2-(2(a^2-a-2))^2\\&=(2a^2-2a+5-2a^2+2a+4)(2a^2-2a+5+2a^2-2a-4)\\&=9(4a^2-4a+1)=9(2a-1)^2\geq 0,\end{aligned}$$

следува дека равенката има реални решенија. Збирот на корените е најмал ако $9(2a-1)^2=0$, од каде добиваме $a=\frac{1}{2}$.

2. Системот неравенки $a_1x+b_1\geq 0$, $a_1>0$; $a_2x+b_2\geq 0$, $a_2<0$, нема решение. Докажи дека постојат броеви c_1 и c_2, така што важи

$$b_1c_1+b_2c_2<0 \text{ и } a_1c_1+a_2c_2=0.$$

Решение. Од првата неравенка добиваме $x\geq -\frac{b_1}{a_1}$, а од втората $x\leq -\frac{b_2}{a_2}$. Ако важи $-\frac{b_1}{a_1}\leq -\frac{b_2}{a_2}$, тогаш секој $x\in[-\frac{b_1}{a_1},-\frac{b_2}{a_2}]$ е решение на почетниот систем неравенки, што противречи на условот на задачата. Значи,

$$-\frac{b_1}{a_1}>-\frac{b_2}{a_2}, \text{ т.е. } -b_1a_2+b_2a_1<0.$$

Сега ако земеме $c_1=-a_2$ и $c_2=a_1$. Тогаш

$$b_1c_1+b_2c_2<0 \text{ и } a_1c_1+a_2c_2=0.$$

3. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x+\sqrt{y}=1 \\ y+\sqrt{z}=1. \\ z+\sqrt{x}=1 \end{cases}$$

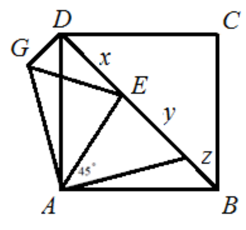
Решение. Од условот на задачата следува $x,y,z\geq 0$. Нека $x\leq y$. Тогаш $0\geq x-y=\sqrt{z}-\sqrt{y}$, односно $z\leq y$. Оттука, $y-z=\sqrt{x}-\sqrt{z}\geq 0$, односно $x\geq z$. Од $x-z=\sqrt{x}-\sqrt{y}\leq 0$ следува дека $x\leq z$. Според тоа, $x=y=z$. Од $x+\sqrt{x}=1$ добиваме $\sqrt{x}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи $\sqrt{x}\geq 0$, $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, односно $x=y=z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ако $x>y$, тогаш слично на претходната дискусија се добива контрадикција.

Следува дека единствени решенија на системот се $x=y=z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

4. На дијагоналата BD на квадратот $ABCD$ избрани се точки E и F така што $\measuredangle EAF=45^\circ$. Докажи дека $\overline{EF}^2=\overline{DE}^2+\overline{FB}^2$.

Решение. Ако со x,y и z ги означиме должините на отсечките DE,EF и FB (цртеж десно), соодветно, тогаш треба да докажеме дека $y^2=x^2+z^2$. Нека G е точка, надвор од квадратот, таква што $\triangle GAD\cong\triangle FAB$, т.е. нека $\overline{AG}=\overline{AF}$ и $\overline{DG}=\overline{BF}$. Тогаш



$$\measuredangle GAD=\measuredangle FAB,\ \measuredangle GDA=\measuredangle FBA=45^\circ \text{ и } \overline{GD}=\overline{FB}=z.$$

Добиваме дека

$$\measuredangle GAE=\measuredangle GAD+\measuredangle DAE=\measuredangle FAB+\measuredangle DAE=90^\circ-\measuredangle EAF=45^\circ,$$

па затоа триаголниците GAE и FAE се складни и оттука $\overline{GE} = \overline{FE} = y$. Бидејќи

$$\measuredangle GDE = \measuredangle GDA + \measuredangle ADE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

триаголникот GED е правоаголен и затоа $y^2 = x^2 + z^2$.

III година

1. Нека $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Докажи го неравенството

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{2} \geq \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Решение. Од $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ следува

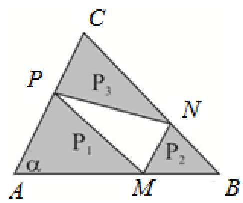
$$0 < 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \leq \cos(\alpha+\beta) + 1 \text{ и } \sin(\alpha+\beta) > 0,$$

па затоа имаме

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{2} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta} \geq \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+1} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

2. Даден е триаголник ABC и точките M, N, P на страните AB, BC, CA соодветно, такви што важи $\overline{AM} : \overline{AB} = \overline{BN} : \overline{BC} = \overline{CP} : \overline{CA} = k$. Определи ја вредноста на k, за која плоштината на триаголникот MNP е најмала.

Решение. Да ги означиме плоштините на триаголниците AMP, MBN, NCP со P_1, P_2, P_3 соодветно, види цртеж. Нека P_4 е бараната плоштина на триаголникот MNP. Од зададените односи, согласно условот имаме $\overline{AM} : \overline{AB} = k$, односно



$$\overline{AM} : (\overline{AM} + \overline{MB}) = k \quad \Leftrightarrow \quad (1-k)\overline{AM} = k\overline{MB}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overline{AM} : \overline{MB} = k : (1-k).$$

Аналогно,

$$\overline{BN} : \overline{NC} = k : (1-k) \text{ и } \overline{CP} : \overline{PA} = k : (1-k).$$

Ако со P ја означиме плоштината на триаголникот ABC, тогаш:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{AP}\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = k\cdot(1-k),$$

каде $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AP}+\overline{PC}} = \frac{1}{1+\frac{\overline{PC}}{\overline{AP}}} = \frac{1}{1+\frac{k}{1-k}} = 1-k$. Аналогно се добива и дека

$$\frac{P_2}{P} = \frac{P_3}{P} = k(1-k).$$

Сега

$$\frac{P_4}{P} = \frac{P - P_1 - P_2 - P_3}{P} = 1 - 3\frac{P_1}{P} = 1 - 3k(1-k) = 3k^2 - 3k + 1.$$

Ако P_4 прима најмала вредност, тогаш и дропката $\frac{P_4}{P}$ е најмала. Квадратната функција $\frac{P_4}{P}=3k^2-3k+1$ е отворена нагоре и има минимум во темето на параболата со апциса $k=-\frac{-3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$. Тогаш бараната вредност на параметарот k е $k=\frac{1}{2}$.

3. Во децималниот запис на бројот 2^{2017} има m цифри, а на бројот 5^{2017} има n цифри. Одреди го збирот $m+n$.

Решение. Ако во децималниот запис на бројот x има m цифри, тогаш точни се неравенствата

$$m-1<\log x<m.$$

Значи,

$$m-1<\log 2^{2017}<m \text{ и } n-1<\log 5^{2017}<n.$$

Со собирање на овие неравенства, добиваме

$$m+n-2<\log 2^{2017}+\log 5^{2017}<m+n, \text{ т.е. } m+n-2<2017<m+n,$$

од каде заклучуваме дека $2017=m+n-1$, односно $m+n=2018$.

4. Реши ја равенката

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot 16^{x^3}.$$

Решение. Ако $x<0$, десната страна на равенката е помала од 3, а левата поголема од 256^4, па затоа равенката нема решение $x_0<0$.

Нека $x\geq 0$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, применето два пати, добиваме

$$\begin{aligned}2^{x^5}+4^{x^4}+256^4&=2^{x^5}+2^{2x^4}+2^{32}\\&\geq 3\cdot 2^{\frac{x^5+2x^4+32}{3}}\\&\geq 3\cdot 2^{\sqrt[3]{x^5\cdot 2x^4\cdot 32}}\\&=3\cdot 2^{4x^3}=3\cdot 16^{x^3}.\end{aligned}$$

Во последните неравенства знак за равенство важи ако и само ако

$$x^5=2x^4=32,$$

т.е ако и само ако $x=2$. Значи, $x_0=2$ е единствено решение на дадената равенка.

IV година

1. Нека $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Пресметај го збирот на сите броеви во табелата

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 2 & 3 & 4 & \dots & k+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & k+2 \\ . & . & . & . & . \\ k & k+1 & k+2 & \dots & 2k-1 \end{array}.$$

Решение. Нека $j \in \{1, 2, ..., k\}$. Тогаш збирот на елементите во j-тата редица е

$$S_j = (j+0)+(j+1)+(j+2)+...+(j+k-1) = kj + \frac{(k-1)k}{2}.$$

Значи, бараниот збир е

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + ... + S_k &= k \cdot 1 + \frac{(k-1)k}{2} + k \cdot 2 + \frac{(k-1)k}{2} + k \cdot 3 + \frac{(k-1)k}{2} + ... + k \cdot k + \frac{(k-1)k}{2} \\ &= k\frac{(k-1)k}{2} + k(1+2+...+k) = k\frac{(k-1)k}{2} + k\frac{(k+1)k}{2} \\ &= \frac{k^2}{2}(k-1+k+1) = k^3. \end{aligned}$$

2. Нека $a = \sqrt[2017]{2017}$ и нека (a_n) е низа таква што

$$a_1 = a \text{ и } a_{n+1} = a^{a_n}, \text{ за } n \geq 1.$$

Дали постои природен број n, така што $a_n \geq 2017$? Одговорот да се образложи!

Решение. Таков природен број не постои. Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека за секој природен број n, важи $a_n < 2017$.

За $n = 1$, тврдењето важи, односно важи $a = \sqrt[2017]{2017} < 2017$. Да претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број $n = k$, т.е. дека $a_k < 2017$. За $n = k+1$, имаме $a_{k+1} = a^{a_k} < a^{2017} = 2017$. Кочечно од принципот на математичка индукција следува дека не постои природен број n, за кој $a_n \geq 2017$.

3. Аритметичка прогресија со 10 члена има разлика $d > 0$. Ако апсолутната вредност на секој член na прогресијата е прост број, определи ја најмалата можна вредност на d.

Решение. Ако d е непарен, тогаш има по еден парен член во секои два последователни членови. Бидејќи има најмалку пет парни членови во низата, барем еден од нив не е еднаков на -2 и 2. Имајќи предвид дека апсолутните вредности на елементите од низата се прости броеви, тогаш мора d да биде парен. Слична дискусија ни дава дека мора d да биде делив со 3.

Ќе докажеме дека мора d да биде делив со 5. Ако d не е делив со 5, тогаш меѓу пет последователни членови, мора да има делив со 5, односно мора во целата низа да има два броја кои се деливи со 5. Ако апсолутната вредност на секој член од низата е прост број, тогаш тие два броја кои се деливи со 5 мора да бидат 5 и -5. Но, ова не е можно, бидејќи четирите члена кои треба да бидат меѓу нив се $-3,-1,1,3$, што е во контрадикција со условот дека апсолутните вредности на членовите од низата треба да бидат прости броеви. Значи, најмалата можна вредност за d е 30.

Навистина, можно е $d=30$. Пример за таква аритметичка низа е

$$-113,-83,-53,-23,7,37,67,97,127,157.$$

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(f(x)+f(y))=f(x)+y, \text{ за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. I *начин*. Нека x_1,x_2 се реални броеви за кои важи $f(x_1)=f(x_2)$. Заменувајќи, последователно $y=x_1$ и $y=x_2$ во дадената равенка, добиваме $f(f(x)+f(x_1))=f(x)+x_1$ и $f(f(x)+f(x_2))=f(x)+x_2$. Бидејќи левите страни на последните две равенства се еднакви, имаме $f(x)+x_1=f(x)+x_2$, од каде $x_1=x_2$. Добивме дека функцијата $f(x)$ е инјекција. Заменувајќи $y=0$, во почетното равенство, добиваме $f(f(x)+f(0))=f(x)$, за секој реален број x. Бидејќи $f(x)$ е инјекција, имаме дека $f(x)+f(0)=x$. Ако ставиме $x=0$, од последното равенство добиваме $2f(0)=0$, односно $f(0)=0$. Оттука, добиваме дека функцијата $f(x)=x$ го задоволува почетното равенство.

II *начин*. Менувајќи ги местата x и y во почетната равенка добиваме дека

$$f(f(y)+f(x))=f(y)+x.$$

Бидејќи левата страна во последното равенство е иста како и левата страна на почетното равенство, добиваме $f(x)+y=f(y)+x$. Заменувајќи $y=0$, во последното равенство добиваме $f(x)=x+f(0)$. Сега со замена во почетната равенка добиваме

$$x+f(0)+y+f(0)+f(0)=x+f(0)+y \quad ,$$

од каде следува $f(0)=0$. Сега од $f(x)=x+f(0)$, добиваме дека $f(x)=x$.