EVOLVENTA (JAMTK) 2(1) (2019), 17–20

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

O značaju diskriminante kvadratne jednačine pri rješavanju nelinearnih Diofantovih jednačina

Šefket Arslanagić[a]

[a]*PMF, Sarajevo*

Sažetak: Neke nelinearne Diofantove jednačine se mogu efikasno riješiti ako se mogu napisati u obliku kvadratne jednačine po jednoj od promjenljivih te koristiti njenu diskriminantu. U radu je ovaj metod rješavanja nelinearnih Diofantovih jednačina ilustriran nekim vrlo zanimljivim primjerima.

1. Uvod

Poznato je da se kvadratne jednačine obrađuju u drugom razredu srednje škole. Njihova uloga u daljem toku školovanja je vrlo značajna jer se primjenjuje u svim oblastima matematike. Zbog toga ćemo se prvo ukratko podsjetiti najvažnijih činjenica u vezi s kvadratnom jednačinom.

Kvadratna jednačina ima oblik

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0) \tag{1}$$

a izraz

$$D = b^2 - 4ac$$

se naziva *diskriminantom* kvadratne jednačine (1) i pri tome su njena rješenja data sa

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Što se tiče diskriminante D, mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

1. $D > 0 \Longrightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $x_1 \neq x_2$;
2. $D = 0 \Longrightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $x_1 = x_2$;
3. $D < 0 \Longrightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ - skup kompleksnih brojeva).

Dakle, kvadratna jednačina (1) ima realna rješenja ako je $D \geq 0$.

Ove osnovne činjenice o kvadratnoj jednačini svima su dobro poznate, a to nam dobro dođe pri njihovoj primjeni, kao što je slučaj s primjenom u rješavanju (nešto težih) *Diofantovih* jednačina, a što ćemo demonstrirati na nekoliko primjera u narednoj sekciji.

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: Diofantova jednačina, kvadratna jednačina, diskriminanta
Rad preuzet: januar 2019.
Kategorizacija: Stručno-metodički rad

2. Primjena u rješavanju Diofantovih jednačina

Primjer 2.1. *Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine:* $x^2 + y^2 + 3x + 1 = 0$.

Rješenje: Datu jednačinu posmatrajmo kao kvadratnu jednačinu po x. Imamo

$$x^2 + 3x + \left(y^2 + 1\right) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow D = 9 - 4\left(y^2 + 1\right) = 5 - 4y^2.$$

Da bi jednačina imala realna rješenja, mora biti $D \geq 0$, tj.

$$5 - 4y^2 \geq 0 \Longrightarrow y^2 \leq \frac{5}{4} \Longrightarrow |y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow y \in \{-1, 0, 1\}.$$

1° Za $y = -1$ je $D = 1$, odakle je $x_1 = -2$ ili $x_2 = -1$, pa je $(x, y) \in \{(-2, -1), (-1, -1)\}$.

2° Za $y = 0$ je $D = \sqrt{5}$, a ovaj slučaj otpada jer $x \notin \mathbb{Z}$.

3° Za $y = 1$ je $D = 1$, dakle slijedi da je $x_1 = -2$ ili $x_2 = -1$, pa je $(x, y) \in \{(-2, 1), (-1, 1)\}$.

Dakle, imamo sljedeća rješenja date jednačine

$$(x, y) \in \{(-2, -1), (-1, -1), (-2, 1), (-1, 1)\}.$$

□

Primjer 2.2. *Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine:* $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

Rješenje: Napišimo datu jednačinu u obliku

$$x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

i posmatrajmo ju kao kvadratnu jednačinu po x.

Sada je

$$x_{1,2} = \frac{y + 1 \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2},$$

gdje je $D = -3y^2 + 6y + 1$. Prema uslovima zadatka mora biti $D \geq 0$, tj.

$$-3y^2 + 6y + 1 \geq 0 \Longrightarrow y \in \left[\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right],$$

a odavde, zbog $y \in \mathbb{Z}$, slijedi $y \in \{0, 1, 2\}$. Slično kao u prethodnom primjeru, nalazimo rješenja date jednačine

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}.$$

□

Primjer 2.3. *Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine:* $5x^2 + y^2 - 2xy - 8y + 20 = 0$.

Rješenje: Datu jednačinu možemo pisati kao kvadratnu jednačinu po x:

$$5x^2 - 2yx + \left(y^2 - 8y + 20\right) = 0.$$

Ovdje je

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{-4y^2 + 40y - 100}}{5},$$

pa je

$$D = -4y^2 + 40y - 100 = -4\left(y^2 - 10y + 25\right) = -4(y - 5)^2 \geq 0 \Longrightarrow y = 5.$$

Za $y = 5$ dobijamo $x = 1$ te imamo samo jedno traženo rješenje date jednačine: $(x, y) = (1, 5)$. □

Primjer 2.4. *Riješiti jednačinu*

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

u skupu cijelih brojeva.

Rješenje: Datu jednačinu možemo posmatrati kao kvadratnu jednačinu po x:

$$x^2 + yx + y^2 - 1 = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}),$$

za čiju diskriminantu vrijedi

$$D = -3y^2 + 4 \geq 0 \Longrightarrow y^2 \leq \frac{4}{3} \Longrightarrow -\frac{4}{3} \leq y \leq \frac{4}{3},$$

pa zbog zahtjeva $y \in \mathbb{Z}$, slijedi da je $y \in \{-1, 0, 1\}$. Razmotrimo svaki od tih slučajeva.

1° Za $y = -1$ je $x^2 - x = 0$, odakle je $x_1 = 0$ ili $x_2 = 1$, pa je $(x, y) \in \{(0, -1), (1, -1)\}$.

2° Za $y = 0$ je $x^2 - 1 = 0$, odakle je $x_1 = -1$ ili $x_2 = 1$, pa je $(x, y) \in \{(-1, 0), (1, 0)\}$

3° Za $y = 1$ je $x^2 + x = 0$, odakle je $x_1 = 0$ ili $x_2 = -1$, pa je $(x, y) \in \{(0, 1), (-1, 1)\}$.

Dakle, imamo sljedeća rješenja:

$$(x, y) \in \{(0, -1), (1, -1), (-1, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 1)\}.$$

□

Primjedba 2.5. *Preporučujemo da se riješe jednačine iz prethodnih primjera posmatrajući ih kao jednačine po drugoj promjenljivoj.*

Primjer 2.6. *Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine*

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0.$$

Rješenje: Na prvi pogled izgleda vrlo komplicirana jednačina. ali neće biti teško riješiti je ako ju posmatramo kao kvadratnu jednačinu po promjenljivoj x, tj.

$$8x^2 + 4\left(y^2 + y - 10\right)x + y^4 - 11y^2 - 8y + 52 = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

Tada imamo

$$D = 16\left(y^2 + y - 10\right)^2 - 32\left(y^4 - 11y^2 - 8y + 52\right) = -16\left(y^2 - y - 2\right)^2 \leq 0.$$

Pošto mora biti $D \geq 0$, to u obzir dolazi samo $D = 0$, tj. $y_1 = 2$ ili $y_2 = -1$. Zbog $D = 0$ sada imamo

$$x_{1,2} = -\frac{y^2 + y - 10}{4},$$

a odavde

$$x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Dakle, imamo samo rješenje $(x, y) = (1, 2)$. □

Primjer 2.7. *Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine*

$$y\left(x^2+36\right)+x\left(y^2-36\right)+y^2(y-12)=0.$$

Rješenje: Opet na prvi pogled vrlo nezgodna jednačina. Međutim, ako je posmatramo kao kvadratnu jednačinu po promjenljivoj x, imamo

$$yx^2+\left(y^2-36\right)x+y^2(y-12)+36y=0,$$

čija je diskriminanta

$$\begin{aligned} D &= \left(y^2-36\right)^2-4y^2\left(y^2-12y+36\right)=\left(y^2-36\right)^2-[2y(y-6)]^2 \\ &= \left[y^2-36-2y(y-6)\right]\left[y^2-36+2y(y-6)\right] \\ &= -3(y-6)^2\left(y^2-4y-12\right). \end{aligned}$$

Pošto mora biti $D \geq 0$, to dobijamo

$$y^2-4y-12 \leq 0 \Longrightarrow (y-6)(y+2) \leq 0 \Longrightarrow y \in [-2,6].$$

Imamo sljedeće slučajeve:

1° $y=-2 \Longrightarrow -2x^2-32x-128=0 \Longrightarrow x^2+16x+64=0 \Longrightarrow (x+8)^2=0 \Longrightarrow x=-8$;

2° $y=-1 \Longrightarrow D=21\cdot 7^2=3\cdot 7^3$ nije potpun kvadrat pa ovaj slučaj ne dolazi u obzir;

3° $y=0 \Longrightarrow -36x=0 \Longrightarrow x=0$;

4° $y=1 \Longrightarrow D=3^2\cdot 5^3$ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir;

5° $y=2 \Longrightarrow D=3\cdot 4^4$ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir;

6° $y=3 \Longrightarrow D=3^4\cdot 5$ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir;

7° $y=4 \Longrightarrow 4x^2-20x+16=0 \Longrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Longrightarrow x_1=1 \vee x_2=4$;

8° $y=5 \Longrightarrow D=21$ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir;

9° $y=6 \Longrightarrow 6x^2=0 \Longrightarrow x=0$.

Dakle, imamo sljedeća cjelobrojna rješenja date jednačine:

$$(x,y) \in \{(-8,-2),(0,0),(0,6),(1,4),(4,4)\}.$$

□

Primjedba 2.8. *S pravom možemo reći da se mnoge nelinearne Diofantove jednačine mogu efikasno riješiti ako se mogu napisati u obliku kvadratne jednačine po jednoj od promjenljivih te koristiti njenu diskriminantu D. Sigurni smo da bi se sve jednačine iz navedenih primjera znatno teže riješile na neki drugi način. Pokušajte!*

Literatura

[1] T. Andrescu, D. Andrica, *An Introduction to Diophantine Equations*, Gil Publishing House, Zalau (Romania), 2002.

[2] V. Andrić, *Diofantove jednačine (Priručnik za dodatnu nastavu matematike za osnovne i srednje škole),* Krug, Beograd, 2006.

[3] Š. Arslanagić, I. Glogić, *Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1995.-2008.)*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[4] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heilderberg, 1997.

[5] M. Stanić, N. Ikodinović, *Teorija brojeva - Zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd,2004.