XXXVI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Дадени се педесет природни броеви, од кои половината од нив не надминуваат 50, а другата половина се поголеми од 50, но помали од 100. Разликата на било кои два од дадените броеви не е 0 или 50. Да се најде збирот на тие броеви.

   Решение. Ако од дадените природни броеви, поголеми од 50, одземеме 50, ниту една од добиените разлики нема да е еднаква на некој од останатите броеви, кое следува од тоа дека разликата на било кои два од дадените броеви не е 50. Тогаш 25-те разлики и 25-те дадени броеви, помали од 50 се различни природни броеви од 1 до 50, т.е. сите природни броеви од 1 до 50. Нивниот збир е

   $$1+2+...+50=\frac{50\cdot 51}{2}=25\cdot 51=1275,$$

   па збирот на сите дадени броеви е $1275+25\cdot 50=1275+1250=2525$.

2. Колку цели броеви x, $-1000<x<1000$ се деливи со 3, а колку цели броеви y, $-444<y<444$ не се деливи со 4. Кои се повеќе?

   Решение. Од 1 до 999 имаме 333 броја кои се деливи со 3, од -1 до -999 имаме уште 333. Нулата е делива исто така со 3, па за x имаме $333+333+1=667$ можности.

   За броевите од 1 до 443 имаме $443=4\cdot 110+3$, т.е. има 110 броја кои се деливи со 4, од -1 до -443 има уште 110, плус и нулата добиваме дека од -444 до 444 има $110+110+1=221$ броја деливи со 4. Од -444 до 444 има 887 броеви, па имаме $887-221=666$ броја не се деливи со 4.

   Значи, повеќе се оние од -1000 до 1000 кои се деливи со 3.

3. Даден е остроаголниот $\triangle ABC$. Симетралата на $\measuredangle BAC$, симетралата на страната AC и висината од точката C се сечат во една точка. Одреди го аголот $\measuredangle BAC$!

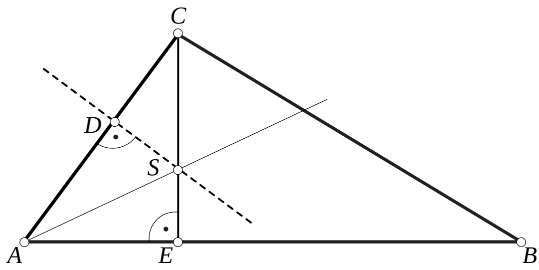
   Решение. Нека $\angle BAC=\alpha$ и нека S е пресекот. Бидејќи S припаѓа на симетралата на страната AC имаме дека $\overline{AS}=\overline{SC}$ односно, триаголникот $\triangle ASC$ е рамнокрак. Затоа

   $$\measuredangle SAC=\measuredangle ACS=\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Од друга страна, $\triangle AEC$ е правоаголен, па,

$$\begin{aligned}\measuredangle ACS &= 180^\circ - \alpha - 90^\circ \\ &= 90^\circ - \alpha\end{aligned} \quad . \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$, т.е. $\alpha = 60^\circ$.



4. Продавач има известен број живи пилиња. Првиот купувач побарал да купи половина од сите пилиња и уште половина пиле. Се разбира, бил услужен. Следниот купувач побарал половина од останатите и уште половина пиле. И тој бил услужен. Третиот купувач исто така добил половина од преостанатите пилиња и уште половина пиле. Откако го услужил третиот купувач, продавачот останал без ниту едно пиле.
Колку пилиња имал продавачот?

Решение. *Прв начин*. Нека биле вкупно x пилиња. Првиот купувач купил: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, а останале $x-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ пилиња. Вториот купувач купил: $\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$, а останале $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-(\frac{x}{4}+\frac{1}{4})=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$. На крај третиот купувач: $\frac{1}{2}(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$, и останале $\frac{x}{4}-\frac{3}{4}-(\frac{x}{8}+\frac{1}{8})=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$, односно нед сотанало ниту едно пиле, од каде ја добиваме равенката $\frac{x}{8}-\frac{7}{8}=0$. Решението на последната равенка е $x=7$, т.е. бројот на пилињата бил 7.

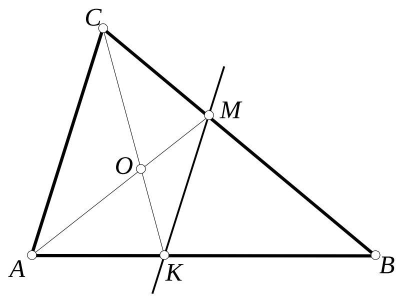
Втор чаин. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Третиот купувач зел половина од пилињата и уште половина пиле, при што не останало ниту едно пиле. Значи, половината пиле кое го зел всушност е половина од пилињата кои ги затекнал, т.е. затекнал $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ пиле. Пред вториот купувач да земе половина пиле имало $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ пилиња, и тоа се полвина од пилињата кои ги затекнал, што значи дека тој затекнал $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$. Пред првиот купувач да земе половина пиле имало $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ пилиња и тоа е половина од пилињата кои ги имал продавачот. Според тоа, продавачот имал $\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$ пилиња.

5. На страните AB и BC на $\triangle ABC$ се избрани соодветно точки K и M така да $KM \parallel AC$. Отсечките $\overline{AM}$ и $\overline{KC}$ се сечат во точка O. Ако $\overline{AK}=\overline{AO}$, $\overline{KM}=\overline{MC}$, да се докаже дека $\overline{AM}=\overline{KB}$.

Решение. Од условот дека триаголниците $\triangle AKO$ и $\triangle KCM$ се рамнокраки триаголници и од $AC \parallel KM$ имаме:

$\measuredangle COM=\measuredangle AOK=\measuredangle AKO$ и

$\measuredangle MCO=\measuredangle CKM=\measuredangle ACK$.



Па,

$$\begin{aligned}\measuredangle AMC &= 180^\circ-(\measuredangle MOC+\measuredangle OCM)\\ &= 180^\circ-(\measuredangle AKO+\measuredangle OKM)\\ &= \measuredangle BKM\end{aligned}$$

Уште, $\measuredangle BMK=\measuredangle BCA$, како агли со паралелни краци. Според тоа $\triangle MKB \cong \triangle AMC$, од каде следува дека $\overline{AM}=\overline{KB}$.

VII одделение

1. Нека a,b и c се ненулти реални броеви и

$$a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1.$$

Пресметај ја вредноста на изразот $ab+bc+ca$.

Решение. Од даденото равенство, со непосредно пресметување добиваме

$$a+\frac{b}{c}=1 \Rightarrow ac+b=c \Rightarrow ac=c-b,$$

$$b+\frac{c}{a}=1 \Rightarrow ab+c=a \Rightarrow ab=a-c,$$

$$c+\frac{a}{b}=1 \Rightarrow cb+a=b \Rightarrow cb=b-a.$$

Ако се соберат последните равенства, се добива

$$ab+bc+ca=(c-b)+(a-c)+(b-a)=0.$$

2. „Мики и јас“, рече Филип, „можеме да ја завршиме зададената работа за 20 дена, но ако работам со Иван истата работа би ја завршиле за 5 дена порано.“ „Имам подобра комбинација“, рече Иван, „Ако јас би работел со Мики би ја завршиле работата за петтина од времето порано отколку кога би ја работел со Филип.“

За колку дена секој од нив би ја завршил работата сам, а за колку дена би ја завршиле сите заедно?

Решение. Да ги означиме со x, y, z бројот на денови за кои работата би ја завршил Мики, Филип, Иван соодветно. Тогаш $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ е делот од работата која би ја завршиле по истиот редослед Мики, Филип и Иван за еден ден. Па, заради условот од задачата имаме:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12} \end{cases}$$

Со собирање на овие три равенки, по средувањето се добива:

$$2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}.$$

Значи работејќи заедно би ја завршиле десеттина од работата, т.е. целата работа заедно би ја завршиле за 10 дена. Па, сега:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30} \Rightarrow x=30$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{10}-(\frac{1}{x}+\frac{1}{z})=\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{1}{60} \Rightarrow y=60$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{10}-(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20} \Rightarrow x=20$$

Значи, Мики би ја завршил работата сам за 30 дена, Филип за 60, а Иван за 20 дена.

3. Броевите $1,2,3,...,2011$,... се наредени на следниов начин,

1→	5,6,7,8,9,		21,22,23,24,25		37, **...**
2→	4	10	20	26	36
3→	3	11	19	27	35
4→	2	12	18	28	34
5→	**1**	13,14,15,16,17		29,30,31,32,33	

Во која линија од означените се наоѓа бројот 2011.

Решение. Забележуваме дека броевите лежат на змиулеста патека која се добива со надоврзување на делот во кој лежат првите 16 броеви. Така 17-от број ќе се наоѓа во иста линија со првиот, 18-от во иста линија со вториот, ...,32-от со 16-от, 33-от со првиот итн. Бидејќи

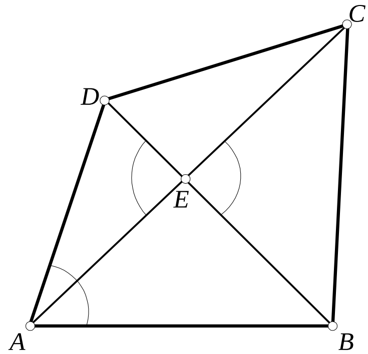
$$2011=16\cdot125+11,$$

следува дека 2011-тиот број ќе се наоѓа во иста линија со бројот 11, односно во третата линија.

4. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Неговите дијагонали се сечат во точка E и притоа важат равенствата:

$$\overline{AB}=\overline{CE},\ \overline{BE}=\overline{AD} \text{ и } \measuredangle AED=\measuredangle BAD.$$

Докажи дека важи $\overline{BC}>\overline{AD}$.



Решение. Важи равенството

$$\measuredangle AED=\measuredangle BEC$$

затоа што аглите се накрсни. Заради

$$\overline{AB}=\overline{CE},\ \overline{BE}=\overline{AD},$$

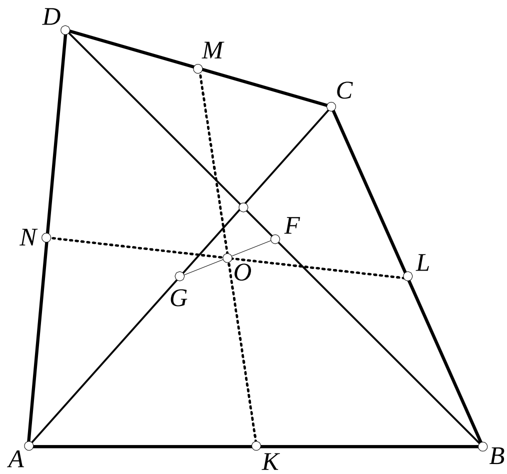
$$\measuredangle BAD=\measuredangle AED=\measuredangle BEC,$$

по признакот САС, триаголниците $\triangle BAD\cong\triangle CEB$ Затоа ќе важи

$$\overline{BC}=\overline{BD}>\overline{BE}=\overline{AD}.$$

5. Докажи дека во конвексен четириаголник средините на неговите дијагонали и точката која е пресек на правите кои ги соединуваат средините на спротивните страни од четириаголникот, лежат на една права.

Решение. Нека средините на страните на четириаголникот $ABCD$ ги означиме со K,L,M,N соодветно. Средините на дијагоналите ги означуваме со G,F соодветно и $\{O\}=LN\cap KM$.



Тогаш KL е средна линија за $\triangle ABC$ од каде $KL\parallel AC$. MN е средна линија за ΔACD од каде $NM\parallel AC$. Добиваме дека $KL\parallel NM$. Од $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$ добиваме $ML\parallel NK$.

Според то четириаголникот $KLMN$ е паралелограм.

Отсечката GL е средна линија за $\triangle ABC$, па $GL\parallel AB$. Отсечката NF е средна линија за $\triangle ADB$ од каде $NF\parallel AB$. Добиваме $GL\parallel NF$. Од $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$ аналогно добиваме $FL\parallel NG$ односно четириаголникот $GLFN$ е паралелограм.

Бидејки O е пресек на дијагоналите на $KLMN$, O ги преполовува LN и KM. Во паралелограмот $GLFN$ дијагоналите се преполовуваат од каде O е средина на GF па точките O,G,F се колинеарни.

VIII одделение

1. Природниот број n при делење со 2 има остаток a, при делење со 4 има остаток b, а при делење со 6 има остаток c. Ако $a+b+c=9$, да се одреди остатокот при делењето на бројот n со 12.

Решение. Бројот n може да се запише во облик $n=2p+a$, $0\le a\le 1$, $n=4q+b$, $0\le b\le 3$ и $n=6r+c$, $0\le a\le 1$. Оттука следува дека $0\le a+b+c\le 9$. Бидејќи $a+b+c=9$ следува $a=1$, $b=3$ и $c=5$. Тогаш $n+1=2p+2=4q+4=6r+6$. Значи $n+1$ е делив со $2,4$ и 6, па е делив и со 12. Значи $n+1=12k$, односно $n=12k-1$. Следува остатокот при делењето на бројот n со 12 е 11.

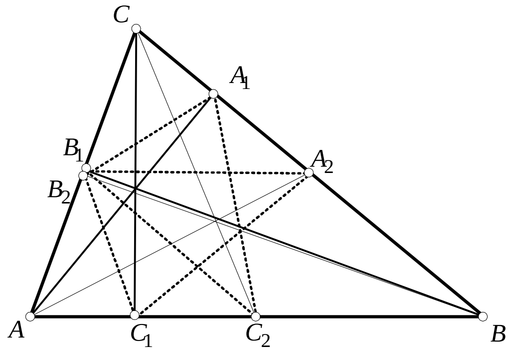
2. Ана и Бојан се договараат да играат ваква игра: Прво Ана кажува број од 1 до 7 (може и 1 и 7), потоа Бојан на кажаниот број додава еден од броевите меѓу 1 и 7 (може и 1 и 7) и го кажува збирот, па истото тоа го прави Ана итн. Победник е оној кој прв ќе го каже бројот 100. Дали Ана може да биде сигурна дека таа прва ќе го каже бројот 100 со правилен избор на првиот број, или ако еднаш згреши, дали може да победи Бојан? Како треба да игра Ана за да таа победи? Дали во играта може да победи Бојан и ако може образложи како?

Решение. Ана ќе биде сигурна во победата ако постигне прва да каже 92, бидејќи Бојан може најмногу да каже 99, па таа ќе каже 100. Значи Ана треба да каже 92, 84, 76,..., значи да почне со бројот 4, па потоа број секогаш за 8 поголем (што е можно, бидејќи Бојан може максимално да додаде 7, а Ана најмалку 1).

Ако Ана еднаш згреши, т.е. каже некој број кој не е од облик $4+8k$ ($k=0,1,...,11$), Бојан може да го искористи така што да го каже најблискиот број од облик $4+8k$ и да продолжи да игра како што би требало да игра Ана ако не згрешеше.

3. Во триаголникот ABC, отсечките $AA_1, BB_1,$ и CC_1 се висини, а отсечките $AA_2, BB_2,$ и CC_2 се тежишни линии. Докажи дека должината на искршената линија $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ е еднаква на периметарот на триаголникот ABC!

Решение. Го користиме фактот дека тежишната линија во правоаголен триаголник повлечена од правиот агол е еднаква на половина од хипотенузата.



Триаголниците ACC_1 и BCC_1 се правоаголни (CC_1 е висина) па добиваме

$$B_2C_1 = \frac{AC}{2} \text{ и } C_1A_2 = \frac{BC}{2}.$$

Аналогно, бидејќи триаголниците ABB_1 и CBB_1 се правоаголни (BB_1 е висина), BAA_1 и CAA_1 се правоаголни (AA_1 е висина), добиваме

$$B_1C_2 = \frac{AB}{2},\ A_2B_1 = \frac{BC}{2},\ C_2A_1 = \frac{AB}{2} \text{ и } A_1B_2 = \frac{AC}{2}.$$

Должината на искршената линија $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ е

$$\begin{aligned} A_2B_1 + B_1C_2 + C_2A_1 + A_1B_2 + B_2C_1 + C_1A_2 &= \frac{BC}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2} \\ &= AB + BC + CA. \end{aligned}$$

4. Дадени се девет природни броеви кои имаат прости делители помали или еднакви на 5. Докажи дека може да се изберат два од нив така што нивниот производ да биде квадрат на природен број!

Решение. Нека M е множеството од дадените девет природни броеви. Тогаш е јасно дека $M \subset N = \{2^i 3^j 5^k \mid i, j, k \in \{0,1,2,...\}\}$. Означуваме $N_{m,n,p}$, $m,n,p \in \{0,1\}$ подмножество од N каде m,n,p се 0 ако степенот на 2,3,5 соодветно се парни и 1 ако степенот на 2,3,5 соодветно се непарни. Значи постојат 8 подмножества $N_{m,n,p}$ од N (секое од m,n,p може да добие по две вредности). Подмножествата $N_{m,n,p}$ се меѓу себе дисјунктни и нивната унија е N. Од принципот на Дирихле од дадените девет природни броеви постојат два кои припаѓаат на едно од множествата $N_{m,n,p}$. Нека се тоа броевите x и y. Значи

$$x = 2^{2a+m}3^{2b+n}5^{2c+p},\ y = 2^{2d+m}3^{2e+n}5^{2f+p}$$

па

$$xy = 2^{2(a+d+m)}3^{2(b+e+n)}5^{2(c+f+p)} = (2^{a+d+m}3^{b+e+n}5^{c+f+p})^2 .$$

5. Даден е триаголникот ABC. На продолжението на страната CB е избрана точка C_1 ($C_1 \neq C$), таква што $\measuredangle BAC = \measuredangle BAC_1 = 60^\circ$.

Докажи дека

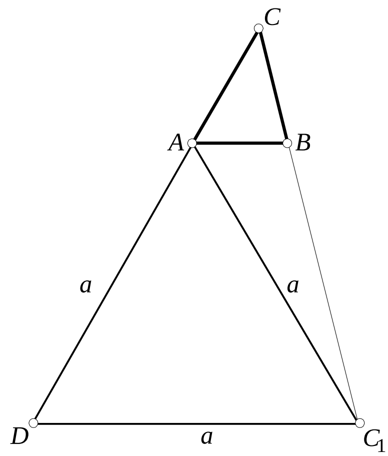
$$\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AC_1}} .$$

Решение. Низ точката C_1 повлекуваме права паралелна со AB, која правата AC ја сече во точката D. Тогаш триаголникот DC_1A е рамностран. Имено $\measuredangle C_1AD = 60^\circ$, како сумплементен агол на

$$\measuredangle C_1AC = \measuredangle BAC + \measuredangle BAC_1 = 120^\circ ,$$

и

$$\measuredangle C_1DA = \measuredangle BAC = 60^\circ .$$



Нека $\overline{C_1D} = \overline{DA} = \overline{AC_1} = a$. Равенството што треба да се покаже $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{A}$ е еквиваленно со $\frac{\overline{AC} \cdot a}{\overline{AB}} = a + \overline{AC}$ односно $\frac{\overline{AC} \cdot a}{\overline{AB}} = \overline{DC}$ или $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{A}$.

Точноста на последното равенство следува од сличноста на триаголниците ABC и DC_1C.