Mr Šefket Arslanagić (Trebinje)

O DJELJIVOSTI CIJELIH BROJEVA

U nastavnom planu i programu za izbornu nastavu matematike u osnovnoj školi nalazi se tema koja se odnosi na deljivost cijelih brojeva. Svakako da je ovo jedna od oblasti matematike koja pruža učenicima velike mogućnosti za kreativan i produktivan rad u matematici. Ovdje će biti govora o djeljivosti cijelih brojeva koji se mogu napisati u obliku raznih polinoma. Pri tome će mo se koristiti sledećim dvima poznatim teoremama koječemo ovde samo navesti.

Teorema 1. Između k uzastopnih prirodnih brojeva postoji uvijek jedan broj koji je djeljiv prirodnim brojem k.

Dokaz. Neka je n prvi od k uzastopnih brojeva iz niza n, $n+1, \dots n+(k-2)$, $n+(k-1)$ i neka je $pk \leqslant n < (p+1)k\,(p, k \in N)$. Ako je $n=pk$, onda je broj n djeljiv sa k; a ako je n jedan od brojeva $pk+1$, $pk+2, \dots pk+(k-2)$, $pk+(k-1)$, onda je jedan od ostalih brojeva iz niza n, $n+1, \dots n+(k-2)$, $n+(k-1)$ jednak broju $(p+1)k$, pa je taj broj djeljiv sa k.

Teorema 2. Proizvod dva uzastopna parna broja djeljiv je sa 8.

Dokaz. Ako je prvi parni broj $2n$, onda je sljedeći parni broj $2n+2$. Njihov proizvod je $2n(2n+2)=2n\cdot 2(n+1)=4n(n+1)$. Pošto je ili n ili $n+1$ paran broj, to je $4n(n+1)$ djelivo sa 8.

A sada da prikažemo na nekim primjerima kako se utvrđuje da li su brojevi izraženi pomoću nekih polinoma deljivi izvesnim prirodnim brojevima.

Primjer 1. Dokazati da je za proizvoljan prirodan broj n izraz n^3-n deljiv sa 3.

Dokaz. Imamo $n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$, što predstavlja proizvod 3 uzastopna cijela broja, od kojih je uvijek jedan djeljiv sa 3.

Primjer 2. Dokazati da je za svaki cio broj n izraz n^5-n djeljiv sa 10.

Dokaz. Imamo

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1).$$

Ako je n deljiv sa 2, tada je $n^5 - n$ deljiv sa 2, a ako n nije djeljiv sa 2, tada je $n+1$ (a takođe i $n-1$) djeljiv sa 2. Preostaje još da se dokaže da je $n^5 - n$ djeljiv sa 5. Ako je n djeljiv sa 5, tada je i $n^5 - n$ takođe djeljiv sa 5; ako n nije djeljiv sa 5, tada je $n = 5k \pm 1$ ili je $n = 5k \pm 2$. Neka je $n = 5k \pm 1$, tada $n-1$ ili $n+1$ je djeljiv sa 5, a to znači da je $n^5 - n$ djeljiv sa 5. Neka je sada $n = 5k \pm 2$, tada je $n^2 + 1 = 25\,k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1) = 5m$. Dakle, i u ovom slučaju je $n^5 - n$ je djeljiv sa 5. Znači, $n^5 - n$ je djeljiv sa 2 i 5 za bilo koji prirodan broj n, što znači da je djeljiv i sa $2 \cdot 5 = 10$.

Primjer 3. Dokazati da je izraz $A = n^5 - 5n^3 + 4n$ (n je prirodan broj) djeljiv sa 120.

Dokaz. Imamo $A = n(n^4 + 5n^2 + 4) = n(n^4 - 4n^2 - n^2 + 4) =$

$$n[n^2(n^2 - 4) - (n^2 - 4)] = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Ovo je proizvod 5 uzastopnih cijelih brojeva i on je svakako djeljiv sa 3 i sa dva uzastopna parna broja. Kako je proizvod od dva uzastopna parna broja djeljiv sa 8, onda je i A deljivo sa $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$, što je i trebalo dokazati.

Primjer 4. Dokazati da je suma $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ djeljiva sa 3 za svaki cio broj n.

Dokaz. Imamo $n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + 3n^2 + 6n + 3 - n = n^3 +$

$$+ 3(n^2 + 2n + 1) - n = n^3 - n + 3(n+1)^2 = (n-1)n(n+1) + 3(n+1)^2.$$

Proizvod $(n-1)n(n+1)$ djeljiv sa 3 kao proizvod 3 uzastopna cijela broja, a $3(n+1)^2$ je pogotovo djeljivo sa 3, pa je gornja suma, tj. dati broj, djeljiva sa 3.

Primjer 5. Dokazati da je izraz $25n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ djeljiv sa 24 za svaki cio broj n.

Dokaz. Imamo $25n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n = 24n^4 + n^4 - n^2 - 2n^3 + 2n =$

$$= 24n^4 + n^2(n^2 - 1) - 2n(n^2 - 1) = 24n^2 + (n^2 - 1)(n^2 - 2n) = 24n^4 +$$

$$(n-2)(n-1)n(n+1).$$

Pošto je $24n^4$ djeljiv sa 24 i $(n-2)(n-1)n(n+1)$ je takođe djeljivo sa 24 kao proizvod 4 uzastopna cijela broja, to je i dati izraz djeljiv sa 24.

Primjer 6. Dokazati da je broj $N=4n^2+3n+5$, *gde je* n *cijeli broj, djeljiv sa 6 ako i samo ako* n *nije djeljiv ni sa 2, ni sa 3.*

Dokaz. Ako je n djeljiv sa 2, tada je broj $N=4n^2+3n+5$ neparan, što znači da N nije djeljiv sa 2, pa ni sa 6. Ako je n djeljiv sa 3, tada broj $N=4n^2+3n+5=3n(n+1)+n^2+5$ nije takođe djeljiv sa 3, što znači da broj N nije djeljiv ni sa 6. Dokazali smo da je dati uslov potreban.

Očigledno je da se svaki cijeli broj može napisati u jednom od sledećih oblika: $6k$ ili $6k\pm 1$ ili $6k\pm 2$ ili $6k\pm 3$. Pošto broj n nije djeljiv sa 2 i 3, to znači da broj n ima oblik $6k\pm 1$. Dakle, imamo: $N=4(6k\pm 1)^2+3(6k\pm 1)+5=144k^2\pm 48k+18k+(9\pm 3)$.

Svaki od ova 4 sabirka je djeljiv sa 6, što znači da je broj N djeljiv sa 6. Time smo dokazali da je navedeni uslov i dovoljan.

Iz navedenih primjera vidimo, dakle, sljedeće: da bi se utvrdilo da li je izvestan broj, dat u vidu nekog polinoma, djeljiv nekim prirodnim brojem, treba pre svega taj polinom, ako je to moguće, predstaviti u vidu proizvoda što prostijih polinoma, ili bar u vidu zbira proizvoda što prostijih polinoma; a zatim utvrditi da li su neki od nađenih činilaca datog polinoma djeljivi datim prirodnim brojem, ili bar nekim od njegovih činilaca. Tako se na kraju može utvrditi da li je i broj predstavljen datim polinomom djeljiv datim prirodnim brojem.

Zadaci

1. Dokazati da je za svaki cio broj n izraz $n^4+3n^3-n^2-3n$ djeljiv sa 6.
2. Dokzzati da je za svaki cio broj n izraz $n^4+2n^3+3n^2+2n$ djeljiv sa 8.
3. Dokazatii da izraz n^2-8 nije nikada djeljiv sa 5, ako je n cio broj.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија