ПРОБЛЕМ НА УДВОЈУВАЊЕ НА КОЦКАТА ИЛИ ДЕЛФИСКИ ПРОБЛЕМ

Според легендата во времето на старогрчкиот филозоф Платон во Атина завладеала чума, па затоа Атињаните се обратиле во пророчиштето Делфи, со прашање што треба да направат за чумата да престане. На тоа им било одговорено дека треба да го удвостручат жртвеникот во храмот на Аполон. Жртвеникот имал облик на коцка. Атињаните тоа го протолкувале така што треба да го удвојат секој раб на жртвеникот, но потоа чумата беснеела уште повеќе. Имено, Атињаните не разбрале дека богот Аполон барал жртвеник по својот волумен да биде двојно поголем, а не да има двапати поголеми димензии од постојниот. Тогаш Атињаните му се обратиле на филозофот Платон, кој им рекол дека биле казнети бидејќи го запоставиле изучувањето на математиката, која според својата природа е „возвишена наука“. Потоа Платон на Атињаните им укажал дека проблемот не е така едноставен и посочил некои потешкотии кои се јавуваат при негово решавање.

Оваа задача, изразена со јазикот на денешната математика, се сведува на тоа да се најде број x таков што $x^3 = 2a^3$, односно $x = a\sqrt[3]{2}$, каде a е должината на работ на постојната коцка, а x е должината на работ на новата коцка. Но, $\sqrt[3]{2}$ е ирационален број, па затоа $a\sqrt[3]{2}$ не може да се добие како производ на два рационални броја. Освен тоа, античките Грци не знаеле за алгебра, па затоа многу проблеми ги решавале конструктивно, т.е. со користење на линијар и шестар. Токму затоа и во овој случај барањето било само со помош на линијар и шестар при дадена отсечка со должина a, да се определи отсечката $x = a\sqrt[3]{2}$.

Овој проблем спаѓа во групата проблеми кои ги поставиле старогрчките математичари. Како што рековме, притоа се барало задачите да се решат во вид на геометриска конструкција, т.е. да се решат со една или повеќе операции кои треба да се изведат само со линијар и шестар. Проблемите од оваа група се:

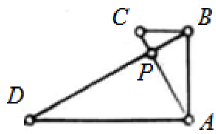
- *квадратура на круг*, т.е. конструкција на квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на даден круг,
- *удвојување на коцка*, т.е. наоѓање на должината на раб на коцка чиј волумен е двапати поголем од волуменот на дадена коцка, и
- *трисекција на агол*, т.е. поделба на произволен агол на три еднакви делови.

Овие три проблеми со векови биле преокупација на многу математичари, се додека не се докажало дека при дадените услови тие не може да се решат. Така, во 1837 година францускиот математичар П. Венцел (1814-1848) докажал дека проблемот на удвојување на коцката при дадените услови нема решение. Математичкиот апарат кој го користел Венцел значително ги надминува знаењата на учениците од основното и средното образование, па затоа овде нема да го презентираме доказот на овој историски важен резултат.

Меѓутоа, низ вековите биле наоѓани приближни решенија на оваа задача. Освен тоа, најдени се решенија на задачата при претпоставка покрај линијар и шестар да се употреби и некој друг инструмент. Во следните разгледувања ќе презентираме една од најстарите конструкции за која е најдено механичко решение.

Нека се конструирани два правоаголни триаголника ABC и ABD така што страната AB е заедничка, страните BC и AD се паралелни и хипотенузите AC и BD им се заемно нормални (цртеж десно). Нека P е пресечната точка на хипотенузите на овие триаголници. Тогаш

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}.$$



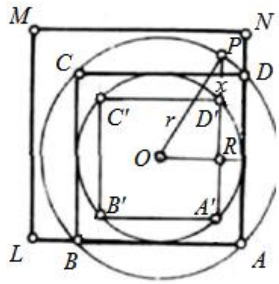
Оттука следува

$$\overline{PB}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PC},\ \overline{PB}=\frac{\overline{PC}\cdot\overline{PD}}{\overline{PA}},\ \overline{PB}^3=\overline{PC}^2\cdot\overline{PD}.$$

Според тоа, ако конструкцијата на триаголниците ABC и DAB се реализира така што $\overline{PD}=2\overline{PC}$, тогаш ќе важи $\overline{PB}^3=2\overline{PC}^2$, што значи дека волуменот на коцката со раб $\overline{PB}$ ќе биде двапати поголем од волуменот на коцката со раб $\overline{PC}$. Но, оваа конструкција не може да се изведе само со линијар и шестар, туку може да се реализира со помош на специјално користена направа за која овде нема да говориме.

Во следните разгледувања ќе дадеме приближно решение на проблемот на удвојување на коцката.

Нека должината на работ на дадената коцка е $2a$. Конструираме квадрат $ABCD$ со страна $2a$ (цртеж десно). Во квадратот $ABCD$ впишуваме кружница и во неа впишуваме квадрат $A'B'C'D'$ чии страни се паралелни на страните на квадратот $ABCD$. Околу квадратот $ABCD$ опишуваме кружница и го наоѓаме пресекот P на полуправата



$A'D'$ со оваа кружница. Нека $\overline{D'P} = x$. Коцката со раб $2a + x$ (на цртежот нејзината основа е квадратот $ALMN$) приближно има двапати поголем волумен од коцката со раб $2a$.

Доказ. Половината од работ на дадената коцка е еднаква на a, па затоа радиусот на впишаната кружница во квадратот $ABCD$ е еднаков на a, а радиусот на опишаната кружница околу квадратот $ABCD$ е еднаков на $r = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Понатаму, ако должината на страната на квадратот $A'B'C'D'$ е $2y$, тогаш од Питагоровата теорема применета на триаголникот $A'B'O$ следува $(2y)^2 = a^2 + a^2$, од каде добиваме $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Сега, од Питагоровата теорема применета на триаголникот OPR следува

$$\begin{aligned}
&(x+y)^2 + y^2 = r^2,\\
&(x + \tfrac{a}{\sqrt{2}})^2 = (a\sqrt{2})^2 - (\tfrac{a}{\sqrt{2}})^2,\\
&x + \tfrac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2a^2 - \tfrac{a^2}{2}},\\
&x = \tfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \tfrac{a}{\sqrt{2}},\\
&x = a\tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Волуменот на коцката која треба да се удвои е $V = 8a^3$, а волуменот на коцката со должина на раб

$$2a + x = 2a + a\tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = a\tfrac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

е

$$V' = (\tfrac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})^3 a^3 = (20 + \tfrac{15\sqrt{6}}{2} - 6\sqrt{3} - \tfrac{17\sqrt{2}}{2}) \approx 15,9580529453a^3.$$

Според тоа,

$$\frac{2V}{V'} \approx 1,002628582248961$$

што значи дека отстапувањето на коцката со должина на раб $a\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ до точното удвојување е $0,2628582248961\% \approx 0,263\%$. Така, за коцка со должина на раб $1m$ волуменот на вака конструираната коцка од двојниот волумен на првата коцка ќе се разликува за околу $0,00263\,m^3$.

Подготвил
Д-р Икс