

Ристо Малчески
Скопје

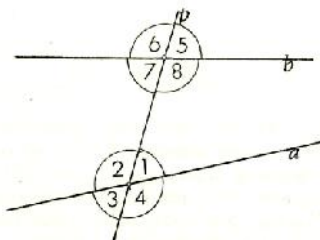
ПРИЗНАЦИ ЗА ПАРАЛЕЛОГРАМИ

1. Вовед

На часовите по математика се запозна со геометриската фигура паралелограм и со некои негови својства. Како што знаеме паралелограмот може да се дефинира на повеќе начини, но во нашите разгледувања ќе ја земеме, според нас, најприродната дефиниција на оваа геометриска фигура.

За следните разгледувања е потребно да ги знаеш теоремата за трансферзалата на паралелни прави и четирите признаци за складност на триаголници, со кои исто така се запозна на часовите по математика и истите ќе ги наведеме без притоа да ги докажуваме.

Правата p , која ги сече правите a и b , ја нарекуваме нивна трансферзала. На цртежот десно се означени осумте агли, кои што трансферзалата p ги формира со правите a и b . Овие осум агли ќе ги распоредиме во следниве парови:



Согласни агли: $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$.

Наизменични агли: $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$.

Спротивни агли: $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$, $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$.

За аглиите на трансферзалата точна е следнава теорема.

Теорема 1 (Агли на трансферзалата). Ако две паралелни прави се пресечат со трета права, тогаш соодветните парови:

- 1) согласни агли се складни,
- 2) наизменични агли се складни,
- 3) спротивни агли се суплементни.

Прв признак – САС (страна-агол-страна). Ако за триаголниците ABC и $A'B'C'$ важи $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$, тогаш $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

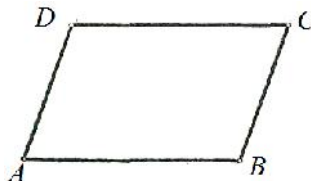
Втор признак – АСА (агол-страна-агол). Ако за триаголниците ABC и $A'B'C'$ важи $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ и $\angle ABC = \angle A'B'C'$, тогаш $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Трет признак – ССС (страна-страна-страна). Ако за триаголниците ABC и $A'B'C'$ важи $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ и $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, тогаш $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Четврт признак – ССА (страна-страна-агол). Ако за триаголниците ABC и $A'B'C'$ важи $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ($\overline{BC} > \overline{AB}$) и $\angle BAC = \angle B'A'C'$, тогаш $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

2. Признаци за паралелограми

Дефиниција 1. За четириаголникот $ABCD$ ќе велиме дека е паралелограм ако $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$ (цртеж десно).



Според тоа, паралелограмот е четириаголник со два пара паралелни страни.

Сега ќе преминеме на докажување на признаците за паралелограми, т.е. во следната теорема ќе докажеме еквивалентност на шест тврдења.

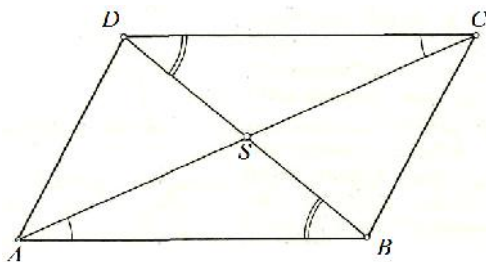
Теорема 2. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Следниве тврдења се еквивалентни:

- 1) Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.
- 2) Секои два соседни агли на четириаголникот $ABCD$ се суплементни агли.
- 3) Спротивните агли на четириаголникот $ABCD$ се меѓусебно еднакви.
- 4) Во четириаголникот $ABCD$ важи $AB \parallel CD$ и $\overline{AB} = \overline{CD}$.
- 5) Во четириаголникот $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$.
- 6) Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се преполовуваат, т.е. AC и BD имаат заедничка средна точка.

Доказ. Со a, b, g, d да ги означиме внатрешните аглите кои во четириаголникот $ABCD$ редоследно соодветствуваат на темињата A, B, C, D . Четириаголникот е конвексен, па затоа неговите дијагонали се сечат во некоја точка S .

2) $\Rightarrow$ 1). Нека аглите a и b се суплементни. Тие се спротивни агли на трансверзалата AB на правите AD и BC , па затоа $AD \parallel BC$. Слично, од суплементноста на аглите b и g , следува дека $AB \parallel CD$, па затоа четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

1) $\Rightarrow$ 4). Нека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. Тогаш $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$. Правата AC е трансверзала на паралелните прави AB и CD , па бидејќи $\angle CAB$ и $\angle ACD$ се наизменични агли, важи $\angle CAB = \angle ACD$. Слично, од паралелноста на правите AD и BC следува дека $\angle ACB = \angle CAD$. Според тоа, триаголниците ACB и CAD имаат заедничка страна AC и еднакви налегнати на неа агли, па според признакот ACA тие се складни, што значи дека $\overline{AB} = \overline{CD}$.



4) $\Rightarrow$ 5). Нека $ABCD$ е четириаголник таков што $AB \parallel CD$ и $\overline{AB} = \overline{CD}$. Правата AC е трансверзала на паралелните прави AB и CD , па бидејќи $\angle CAB$ и $\angle ACD$ се наизменични агли, важи $\angle CAB = \angle ACD$. Според тоа, триаголниците ACB и CAD имаат заедничка страна AC , важи $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\angle CAB = \angle ACD$, па од признакот CAC следува дека тие се складни, од што следува дека $\overline{AD} = \overline{BC}$.

5) $\Rightarrow$ 3). Нека $ABCD$ е четириаголник таков што $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$. Ќе докажеме дека $b = d$ и $a = g$. За триаголниците ACB и CAD важи $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ и $\overline{AC} = \overline{AC}$, па од признакот CCC следува дека тие се складни. Според тоа, $\angle ABC = \angle CDA$, т.е. $b = d$. Слично се докажува дека $a = g$.

3) $\Rightarrow$ 2). Нека $a = g$ и $b = d$. Секој четириаголник со помош на дијагоналата е поделен на два триаголника секој од кои има збир на внатрешните агли 180° , па затоа збирот на неговите внатрешни агли е еднаков на 360° , т.е. $a + b + g + d = 360^\circ$. Сега, од горните три равенства лесно следува дека $a + b = b + g = g + d = d + a = 180^\circ$, т.е. дека секои два соседни агли на четириаголникот $ABCD$ се суплементни агли.

Досега докажавме дека $2) \Rightarrow 1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2)$, што значи дека докажавме дека 1), 2), 3), 4) и 5) се еквивалентни. Според тоа, за да ја докажеме теоремата доволно е уште да докажеме дека $5) \Leftrightarrow 6)$.

5) $\Leftrightarrow$ 6). Нека $ABCD$ е четириаголник таков што важи $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$. Бидејќи $\overline{AC} = \overline{AC}$, од признакот CCC следува дека триаголници-

ците $\angle ACB$ и $\angle CAD$ се складни. Од оваа складност следува $\angle ACB = \angle CAD$, што значи дека $\angle SCB = \angle SAD$. Понатаму, $\angle CSB = \angle ASD$, како накрсни агли па затоа $\angle SBC = \angle SDA$. Значи, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\angle SCB = \angle SAD$ и $\angle SBC = \angle SDA$, па од признакот АСА следува дека триаголниците SBC и SDA се складни. Конечно, од докажаната складност следува $\overline{SD} = \overline{SB}$ и $\overline{SA} = \overline{SC}$, што значи дека точката S е заедничка средина на дијагоналите AC и BD .

Обратно, нека S е заедничка средина на дијагоналите AC и BD . Тогаш $\overline{SD} = \overline{SB}$ и $\overline{SA} = \overline{SC}$ и како $\angle ASD = \angle CSB$ (накрсни агли) заклучуваме дека триаголниците SDA и SBC се складни. Затоа $\overline{AD} = \overline{BC}$. Аналогно се докажува дека $\overline{AB} = \overline{CD}$. ■

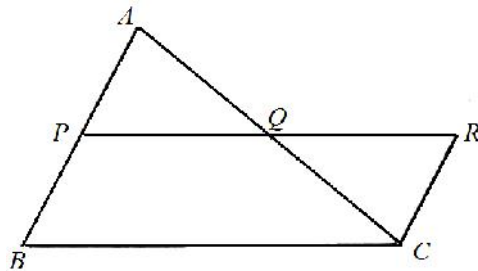
3. Средна линија на триаголник

Во следните разгледувања ќе се задржиме на поимот средна линија на триаголник и ќе го докажеме нејзиното својство.

Дефиниција 2. Отсечката чии крајни точки се средините на две страни на некој триаголник ја нарекуваме средна линија на тој триаголник која соодветствува на третата страна.

Теорема 3 (За средна линија на триаголник). Ако P и Q се соодветно средините на страните AB и AC на триаголникот ABC , тогаш $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ и $PQ \parallel BC$.

Доказ. Нека точката R лежи на продолжението на отсечката PQ преку точката Q и е таква што $\overline{QR} = \overline{PQ}$. Според условот на теоремата имаме $\overline{AQ} = \overline{CQ}$, што значи дека точката Q е заедничка средина на дијагоналите на



четириаголникот $APCR$. Сега, од теорема 2, т.е. од $1) \Leftrightarrow 6)$ следува дека четириаголникот $APCR$ е паралелограм. Понатаму, повторно од теорема 1, т.е. од $1) \Leftrightarrow 4)$ следува дека $AP \parallel RC$ и $\overline{AP} = \overline{RC}$. Но, според условот на теоремата имаме $\overline{AP} = \overline{BP}$, па затоа $\overline{RC} = \overline{BP}$ и уште $BP \parallel RC$, па од теорема 2, т.е. од $1) \Leftrightarrow 4)$ следува дека четириаголникот $PBCR$ е паралелограм. Повторно од теорема 2, т.е. од $1) \Leftrightarrow 4)$ следува дека $\overline{BC} = \overline{PR}$ и

$BC \parallel PR$, па како Q е средина на PR заклучуваме дека $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ и $PQ \parallel BC$. ■

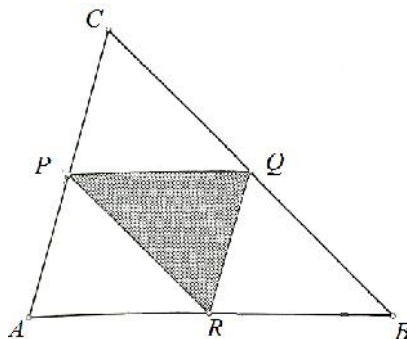
Од претходната теорема непосредно следува следнава теорема.

Теорема 4. Трите средни линии го делат триаголникот на четири складни триаголници.

Доказ. Нека PQ, QR, RP се средните линии на триаголникот ABC соодветни на страните AB, AC, BC . Тогаш од теорема 3 следува дека

$$\begin{aligned}\overline{AR} &= \overline{RB} = \overline{PQ}, \\ \overline{AP} &= \overline{PC} = \overline{RQ}, \\ \overline{BQ} &= \overline{CQ} = \overline{PR},\end{aligned}$$

што значи дека триаголниците ARP , RPQ , PQC и QPR се складни (признак CCC). ■

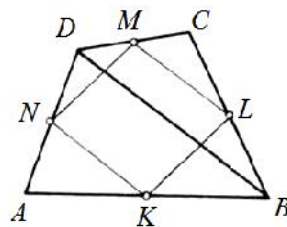


4. Решени задачи

Задача 1. Нека K, L, M, N се соодветно средините на страните AB, BC, CD, DA на конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека четириаголникот $KLMN$ е паралелограм

Решение. Нека $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник и нека K, L, M, N се соодветно средините на страните AB, BC, CD, DA (цртеж десно). Ја повлекуваме дијагоналата BD на дадениот четириаголник. Тогаш отсечката ML е средна линија за триаголникот BCD , соодветна на страната BD , па затоа $ML \parallel BD$ и

$\overline{ML} = \frac{1}{2} \overline{BD}$. Понатаму, KN е средна линија за триаголникот ABD соодветна на страната BD , па затоа $KN \parallel BD$ и $\overline{KN} = \frac{1}{2} \overline{BD}$. Според тоа, $\overline{ML} = \overline{KN}$ и $ML \parallel KN$, па од теорема 2 1) $\Leftrightarrow$ 4) следува дека четириаголникот $KLMN$ е паралелограм. ■

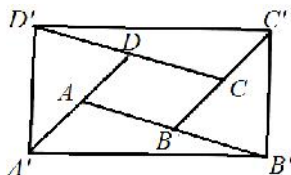


Задача 2. Ако во паралелограмот $ABCD$ се продолжат страната AB преку темето B така што $\overline{AB'} = 2\overline{AB}$, страната BC преку темето C така

што $\overline{BC'} = 2\overline{BC}$, страната CD преку темето D така што $\overline{CD'} = 2\overline{CD}$ и страната DA преку темето A така што $\overline{DA'} = 2\overline{DA}$, тогаш четириаголникот $A'B'C'D'$ е паралелограм. Докажи!

Решение. За триаголниците $BB'C'$ и $D'DA'$ важи

$\overline{BB'} = \overline{D'D}$, $\overline{DA'} = \overline{BC'}$ и $\angle B'BC' = \angle D'DA'$, па од признакот САС следува дека тие се складни. Затоа, $\overline{A'D'} = \overline{B'C'}$. Аналогно, од складноста на триаголниците $AA'B'$ и $CC'D'$ следува дека $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$. Конечно од теорема 2 1) $\Leftrightarrow$ 5) следува дека четириаголникот $A'B'C'D'$ е паралелограм. ■

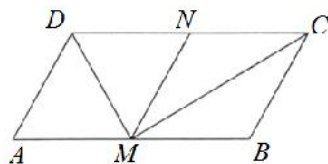


Задача 3. Во паралелограмот $ABCD$ должината на страната AB е два пати поголема од должината на страната BC . Точката M е средина на страната AB . Определи го $\angle CMD$.

Решение. Прв начин. Нека N е средина на страната CD (цртеж десно). Имаме $AM \parallel DN$

и $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{DN}$, па според теорема 2 1) $\Rightarrow$ 4) четириаголникот $AMDN$ е паралелограм.

Понатаму, $\overline{AM} = \overline{DN} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{DA} = \overline{MN}$, што значи дека триаголниците MDN и DMA се складни рамнокраки триаголници. Оттука следува дека $\angle AMD = \angle DMN$. Аналогно се докажува дека $\angle BMC = \angle CMN$.



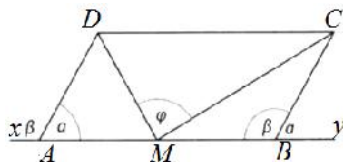
Конечно,

$$2\angle CMD = 2(\angle CMN + \angle NMD) = \angle BMC + \angle CMN + \angle NMD + \angle DMA = 180^\circ,$$

т.е. $\angle CMD = 90^\circ$.

Втор начин. Нека N е средина на страната CD , т.е. $\overline{DN} = \overline{NC}$. Како и во првиот начин на решавање $\overline{DN} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{MN}$. Значи, $\overline{MN} = \overline{DN} = \overline{NC}$, од што следува дека точката M припаѓа на кружницата со дијаметар CD . Но, секој агол над дијаметарот е прав, па затоа $\angle CMD = 90^\circ$.

Трет начин. Од условот на задачата следува дека $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AD}$, што значи дека триаголникот MDA е рамнокрак. Понатаму, бидејќи секој надворешен агол на триаголникот е еднаков на збирот на двата несосед-

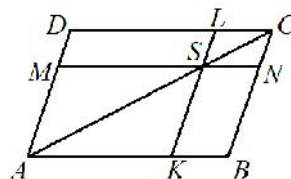


ни внатрешни агли, добиваме $b = \angle xAD = 2\angle AMD$, т.е. $\angle AMD = \frac{b}{2}$. На потполно идентичен начин се докажува дека $\angle BMC = \frac{a}{2}$. Конечно,

$$\angle CMD = 180^\circ - (\angle AMD + \angle BMC) = 180^\circ - \frac{a+b}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ. \blacksquare$$

Задача 4. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка S на дијагоналата AC . Нека правата низ S паралелна со AB ги сече страните AD и BC соодветно во точките M и N , а правата низ S паралелна со BC ги сече страните AB и DC соодветно во точките K и L . Докажи дека четириаголниците $SKBN$ и $SLDM$ имаат еднакви плоштини.

Решение. Имаме $MS \parallel AK$ и $AM \parallel KS$, што значи дека четириаголникот $AKSM$ е паралелограм. Понатаму, $SL \parallel NC$ и $SN \parallel LC$, што значи дека и четириаголникот $SNLC$ е паралелограм. Но, секоја дијагонала го дели паралелограмот на два складни триаголника (признак CCC), кои имаат еднакви плоштини, па затоа важи



$$P_{ACD} = P_{CAB}, P_{ASM} = P_{SAK}, P_{SCL} = P_{CSN}.$$

Конечно,

$$P_{SKBN} = P_{CAB} - (P_{SAK} + P_{CSN}) = P_{ACD} - (P_{ASM} + P_{SCL}) = P_{SLDM},$$

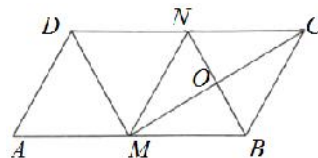
што и требаше да се докаже. $\blacksquare$

5. Задачи за самостојна работа

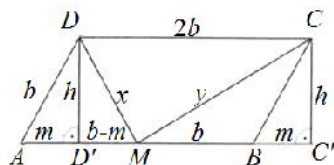
Задача 5. Докажи дека симетралите на внатрешните агли на правоаголник (кој не е квадрат) се сечат во точки кои се темиња на квадрат, чии дијагонали се нормални на страните на правоаголникот и еднакви на разликата на соседните страни на правоаголникот.

Задача 6. Симетралите на внатрешните агли на паралелограм (кој не е ромб) се сечат во точки кои се темиња на правоаголник, чии дијагонали се паралелни со страните на паралелограмот и еднакви на разликата на соседните страни на паралелограмот. Докажи!

Задача 7. Користејќи дека ромбот е паралелограм со еднакви страни и неговите дијагонали се заемно нормални, најди друг начин за решавање на задача 3. (Види го цртежот десно.)



Задача 8. Користејќи ја обратната Питагорова теорема најди друг начин за решавање на задача 3. (Види го цртежот десно и докажи дека $x^2 + y^2 = (2b)^2$.)



Задача 9. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка S на дијагоналата AC . Нека правата низ S паралелна со AB ги сече страните AD и BC соодветно во точките M и N , а правата низ S паралелна со BC ги сече страните AB и DC соодветно во точките K и L . Докажи дека четириаголниците $AKLD$ и $ABNM$ имаат еднакви плоштини.

Задача 10. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка S на продолжението на дијагоналата AC преку темето C . Нека правата низ S паралелна на AB ги сече правите AD и BC соодветно во точките M и N , а правата низ S паралелна со BC ги сече правите AB и DC соодветно во точките K и L . Докажи дека четириаголниците $SKBN$ и $SLDM$ имаат еднакви плоштини.

Литература

1. Ilić-Dajović, M.: Jedno svojstvo paralelograma, Matematički list, Beograd
2. Ilić-Dajović, M.: O rombu, Matematički list, Beograd
3. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za I razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1988
4. Брковић, Ж. Још о паралелограму, Математички лист, Београд
5. Милошевић, Д.: Један задатак о паралелограму, Математички лист, Београд
6. Тренчевски, Г., Тренчевски, К.: Математика за VI одделение, Просветно дело, Скопје, 2001
7. Тренчевски, Г.: Геометрија за VI одделение, Просветно дело, Скопје, 1980