JMMO 2007

1. Дали постои природен број n, таков што бројот $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?
   Решение. Имаме
   $$\mathrm{NZD}(n,n+1)=\mathrm{NZD}(n+2,n+1)=1,$$
   па затоа
   $$\mathrm{NZD}(n(n+2),n+1)=1.$$
   Според тоа, ако бројот $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број, тогаш и бројот $n(n+2)$ треба да е точен квадрат на природен број. Но,
   $$n(n+2)=n^2+2n=n^2+2n+1-1=(n+1)^2-1,$$
   од што следува дека за ниту еден природен број n бројот $n(n+1)(n+2)$ не може да биде точен квадрат на природен број.

2. Нека $ABCD$ е паралелограм и E е точка од страната AD, така што $\overline{AE}:\overline{ED}=m$. Нека F е точка од CE, така што $BF\perp CE$, и точката G е симетрична на F во однос на AB. Ако точката A е центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, најди ја вредноста на m.
   Решение. За да да точката A биде центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, треба $\overline{AB}=\overline{AG}=\overline{AF}$. Бидејќи точката G е симетрична на F во однос на AB имаме дека $\overline{AG}=\overline{AF}$. Останува да го одредиме m од условот $\overline{AB}=\overline{AF}$.
   Нека S е точка од страната BC, така што $\overline{CS}:\overline{SB}=\overline{AE}:\overline{ED}=m$, тогаш $AS\parallel CE$. Нека M е пресечната точка на AS и BF, а точката B_1 нека е симетрична точка на B во однос на M. Тогаш, имаме дека $\overline{BM}=\overline{MB_1}$, $AM\perp BF$ (од $BF\perp CE$ и $AS\parallel CE$), па следи дека $\overline{AB}=\overline{AB_1}$. Бидејќи треба да важи $\overline{AB}=\overline{AF}$, го бараме m од условот $\overline{AB_1}=\overline{AF}$. Бидејќи $\overline{AB}=\overline{AB_1}$ и B, B_1, F се колинеарни, тогаш $\overline{AB_1}=\overline{AF}$ ако $B_1\equiv F$ т.е ако M е средина на BF, односно ако S е средина на BC, односно ако $m=\overline{AE}:\overline{ED}=1$.

3. Нека a,b,c се реални броеви такви што $0<a\le b\le c$. Докажи дека
   $$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\ge 60abc.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$\begin{aligned}(a+3b)(b+4c)(c+2a) &= (a+b+b+b)(b+c+c+c+c)(c+a+a)\\ &\geq 4(ab^3)^{\frac{1}{4}}\cdot 5(bc^4)^{\frac{1}{5}}\cdot 3(ca^2)^{\frac{1}{3}}\\ &= 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}.\end{aligned}$$

Бидејќи $a \leq b \leq c$, имаме

$$\begin{aligned}60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}} &= 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{2}{15}}c\\ &\geq 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}b^{\frac{2}{15}}c\\ &= 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{13}{12}}c\\ &= 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{1}{12}}bc\\ &\geq 60a^{\frac{11}{12}}a^{\frac{1}{12}}bc\\ &= 60abc.\end{aligned}$$

Кај првиот знак за неравенство, равенство важи акко $a=b=c$, кај вториот акко $b=c$, а кај третиот акко $a=b$. Значи, равенство важи акко $a=b=c$.

4. Броевите $a_1, a_2, ..., a_{20}$ ги задоволуваат условите:

$$\begin{aligned}&a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{20} \geq 0\\ &a_1 + a_2 = 20\\ &a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 20\,.\end{aligned}$$

Која е максималната вредност за изразот:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2\,.$$

За кои вредности на $a_1, a_2, ..., a_{20}$ се постигнува максималната вредност?

Решение. Од условот имаме:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 40 \quad \text{и} \quad a_1 = 20 - a_2\,,$$

па, добиваме:

$$\begin{aligned}a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 &= (20-a_2)^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2\\ &= 400 - 40a_2 + a_2^2 + a_2^3 + ... + a_{20}^2\end{aligned}$$

$$\le 400-(a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{20})a_2+a_2^2+...+a_{20}^2$$
$$=400-a_1a_2-a_3a_2-a_4a_2-...-a_{20}a_2+a_2^2+...+a_{20}^2$$
$$=400+(a_2^2-a_1a_2)+(a_3^2-a_3a_2)+...+(a_{20}^2-a_{20}a_2)$$
$$=400+a_2(a_2-a_1)+a_3(a_3-a_2)+...+a_{20}(a_{20}-a_2).$$

Од условот имаме:

$$a_2-a_1\le 0,\ \ a_3-a_2\le 0,\ ...,\ a_{20}-a_2\le 0,$$

па:

$$a_1^2+a_2^2+...+a_{20}^2\le 400,$$

и знак за равенство важи ако и само ако

$a_3+a_4+...+a_{20}=20$, и

$a_2(a_2-a_1)=0,\ \ a_3(a_3-a_2)=0,\ ...,\ a_{20}(a_{20}-a_2)=0$.

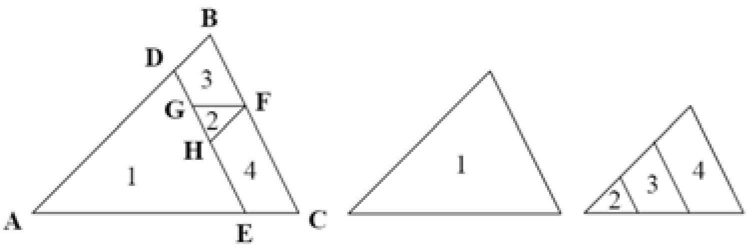
Разгледуваме два случаи, при кои се достигнува ова равенство. Имаме, $a_2=0$, од што следува $a_1=20$, $a_3=a_4=...=a_{20}=0$ или $a_2=a_1=10$, од што следува $a_3=a_4=10,\ a_5=a_6=...=a_{20}=0$. Притоа, за еквивалентен го сметаме секој случај на пермутација на индексите 3,4,...,20.

5. Даден е произволен $\triangle ABC$.

а) Дали може $\triangle ABC$ да се подели на 4 делови, од кои може да се составaт два триаголника слични на $\triangle ABC$ (секој дел се користи само еднаш)?

б) Дали може за секој природен број $n\ge 2$, за $\triangle ABC$ да се направи поделба на $2n$ делови, од кои може да се составaт два слични триаголника на $\triangle ABC$ (секој дел се користи само еднаш)?

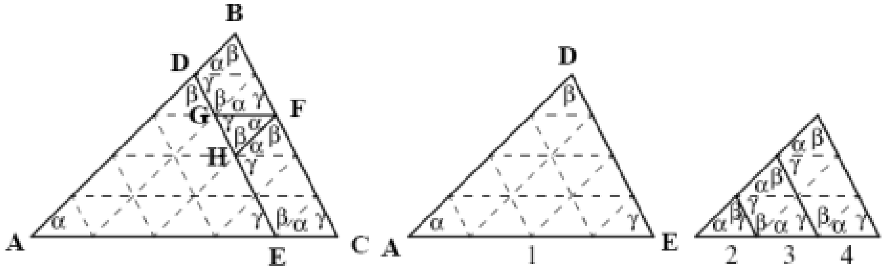
Решение. Поделбата е можна. За случајот под а) тоа изгледа вака:



Како е изведена поделбата, дека таа е точна, ќе утврдиме на случајот под б).

Страната AC ја делиме на $2[1+3+5+...+(2n-3)]+2n-1$ еднакви делови и низ делбените точки повлекуваме паралелни прави на страните

AB и BC (види цртеж). Да ја означиме со $\overline{DE}$ најблиската паралелна отсечка со страната $\overline{BC}$. $\triangle ADE$ е едниот од бараните триаголници, а другиот се формира од останатите мали триаголничиња кои се наоѓаат во трапезот $ECBD$ (види цртеж). Случајот под а) би бил:



На ист начин се добива и случајот под б), со тоа што поставувањето на првиот триаголник и останатите трапези може да се постигне и како на долниот цртеж. Имено, прво на страната BC се поставува триаголник со страна 1, па потоа трапез со основа еден, па два трапези со основи 3, па два трапези со основи 5 итн.