

Регионален натпревар 2014

I година

1АБ. Докажи дека збирот од квадратите на пет последователни цели броеви не може да биде полн квадрат.

Решение. Нека се тоа броевите $n-2, n-1, n, n+1, n+2$. Тогаш нивниот збир е

$$S = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$$

што значи дека $5 \mid S$. Ако бројот S е полн квадрат, тогаш треба $5 \mid (n^2 + 2)$. Ова не е можно за ниту еден број $n \in \mathbb{Z}$. Имено ако $n = 5k$, тогаш $n^2 + 2 = 5A + 2$, ако $n = 5k \pm 1$, тогаш $n^2 + 2 = 5B + 3$, ако $n = 5k \pm 2$, тогаш $n^2 + 2 = 5C + 1$. Оттука следува дека овој број не може да биде полн квадрат.

2А.4Б. Докажи дека дадената равенка нема решение во множеството на цели броеви:

$$xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) = 1.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) &= xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - y^2 - x^2 + y^2) \\ &= (xy - zx)(x^2 - y^2) + (yz - zx)(y^2 - z^2) = x(y - z)(x^2 - y^2) - z(x - y)(y^2 - z^2) \\ &= (x - y)(y - z)(x^2 + xy - zy - z^2) = (x - y)(y - z)(x - z)(x + z + y). \end{aligned}$$

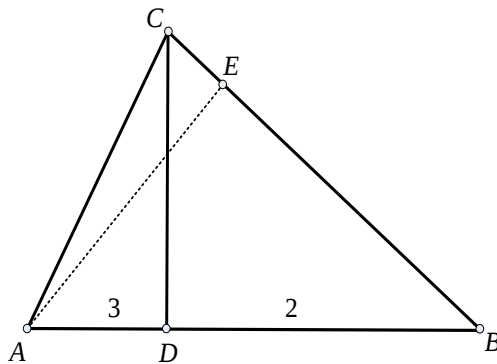
Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x - y)(y - z)(x - z)(x + z + y) = 1$$

и оттука $x - y, y - z, z - x \in \{-1, 1\}$. Значи, $(x - y) + (y - z) + (z - x) \neq 0$ што е невозможно и затоа равенката нема решение во множеството на цели броеви.

2Б. Во остроаголен триаголник ABC висината од врвот C ја дели спротивната страна на два дела $\overline{AD}$ и $\overline{DB}$ со должини $\overline{AD} = 3\text{cm}$ и $\overline{DB} = 2\text{cm}$. Аголот при темето A изнесува 60° . Одреди должините на страните на триаголникот ABC како и должината на висината на триаголникот ABC спуштена од темето A .

Решение. Јасно, $\overline{AB} = 5\text{cm}$. Бидејќи аголот кај темето A изнесува 60° и бидејќи триаголникот ADC е



правоаголен имаме дека аголот $\angle DCA$ изнесува 30° од каде пак се добива дека $\overline{AC} = 2\overline{AD} = 6\text{см}$. Од Питагоровата теорема кај триаголникот ADC имаме

$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5\text{см}$$

Од Питагоровата теорема кај триаголникот BDC имаме

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{29}\text{см}.$$

Следно, за плоштината на триаголникот ABC имаме $P_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$. Од

друга страна $P_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AE}}{2}$, па затоа $\frac{25}{2} = \frac{\sqrt{29} \cdot \overline{AE}}{2}$. Конечно, висината од темето

A изнесува $\overline{AE} = \frac{25}{\sqrt{29}}\text{см}$.

3А. Траpezот $ABCD$ е поделен со права p , таква што $p \parallel AB \parallel CD$, на два дела со еднакви плоштини. Определи ја должината на отсечката чиито крајни точки се пресечните точки на правата p и краците на траpezот, ако се дадени должините на основите a и b .

Решение. Ги продолжуваме краците AD и BC до нивниот пресек M . Нека $KL = p$. Тогаш, $\triangle ABM \sim \triangle KLM \sim \triangle DCM$ и при тоа

$$P_{\triangle ABM} : P_{\triangle KLM} : P_{\triangle DCM} = a^2 : m^2 : b^2, \text{ т.е.}$$

$$P_{\triangle ABM} = ka^2, P_{\triangle KLM} = km^2, P_{\triangle DCM} = kb^2,$$

каде што k е коефициент на пропорционалност. Од условот на задачата, имаме

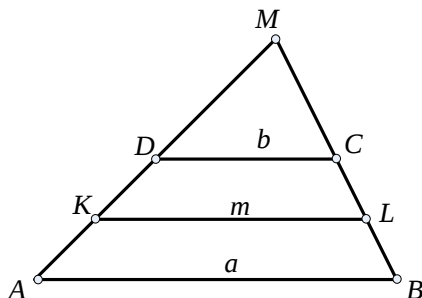
$$P_{\triangle ABM} = P_{\triangle KLM} + P_{\triangle DCM}$$

$$ka^2 - km^2 = km^2 - kb^2$$

$$ka^2 - km^2 = km^2 - kb^2$$

$$m^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$m = \overline{KL} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}.$$



3Б. На почеток на три плочки се наоѓаат броевите 2012, 2014 и 2016. Марко во секој чекор броевите на плочката ги означува со a, b и c по некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a - b, 3b - c$ и $3c - a$. Дали може Марко со последователна примена на оваа постапка во некој момент на трите плочки да има три еднакви броеви?

Решение. Ако претпоставиме дека во некој момент може да се добијат сите три броеви да се исти, имаме дека $3a - b = 3b - c = 3c - a = t$. Од овој систем добиваме дека

$$b = 3a + t, \quad c = 3b - t = 9a - 4t, \quad a = 3c - t = 27a - 13t$$

Од последната равенка $26a = 13t \Rightarrow a = \frac{t}{2}$. Ако се вратиме и замениме, добиваме дека $b = \frac{t}{2}$ и $c = \frac{t}{2}$, односно $a = b = c = \frac{t}{2}$. Од оваа дискусија се заклучува дека три еднакви броја во некој чекор би добиле ако во претходниот чекор сме имале три исти броеви. Но, бидејќи се тргнува од броевите 2012, 2014 и 2016, следува дека не е можно да се добијат три исти броја.

4А. Најди ги сите парови заемно прости природни броеви a и b такви што $a+b$ е делител на $a^4 + b^4$.

Решение Користиме $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$ од каде $a+b$ е делител на $a^4 - b^4$. Добиваме дека $a+b$ е делител на $(a^4 + b^4) + (a^4 - b^4) = 2a^4$ и $a+b$ е делител на $(a^4 + b^4) - (a^4 - b^4) = 2b^4$ или $(a+b) \mid \text{НЗД}(2a^4, 2b^4)$. Од $\text{НЗД}(a, b) = 1$ следува $\text{НЗД}(a^4, b^4) = 1$ односно $(a+b) \mid \text{НЗД}(2a^4, 2b^4) = 2$. Конечно $a=1, b=1$.

II година

1 АБ. Најди ги целобројните вредности на параметарот a , за кои решенијата на системот:

$$\begin{cases} a(x+y-1) = x-2y-1 \\ a(x-y-3) = x+2y-3 \end{cases}$$

се целобројни.

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со:

$$\begin{cases} (a-1)x + (a+2)y = a-1 \\ (a-1)x - (a+2)y = 3a-3 \end{cases}$$

Имаме

$$\begin{cases} 2(a-1)x = 4a-4 \\ 2(a+2)y = -2a+2 \end{cases}$$

Ако $a \neq 1$, тогаш $x = 2$, а ако $a = 1$, тогаш $x \in \mathbf{R}$. Ако $a = -2$ тогаш нема решение за y па и за системот. Ако $a \neq -2$, имаме $y = \frac{-a+1}{a+2} = -1 + \frac{3}{a+2}$. Бидејќи решенијата треба да бидат целобројни, следува дека $a+2$ треба да е делител на 3 и затоа $a+2 = \pm 1, \pm 3$. Оттука, $a = -5, -3, -1, 1$. Добиваме: $a = -5: x = 2, y = -2$; $a = -3: x = 2, y = -4$; $a = -1: x = 2, y = 2$; $a = 1: x \in \mathbf{R}, y = 0$.

2 АБ. Нека a, b, c се реални боеви за кои важат: $ab - a = b + 119, bc - b = c + 59, ca - c = a + 71$. Пресметај ги сите можни вредности на $a + b + c$.

Решение. Од првата равенка имаме

$$a(b-1) = (b-1) + 120, \text{ т.е. } (a-1)(b-1) = 120.$$

Слично, втората е еквивалентна со $(b-1)(c-1) = 60$ и третата со $(c-1)(a-1) = 72$.

Оттука, $\frac{a-1}{c-1} = 2$, $a-1 = 2(c-1)$ и заменето во третата добиваме $2(c-1)^2 = 72$.

Добиваме, $c_1 = 7$, $c_2 = -5$ и оттука $a_1 = 13, a_2 = -11$ и $b_1 = 11, b_2 = -9$. Затоа, можните вредности за $a+b+c$ се: $13+11+7=31$ и $-11-9-5=-25$.

3 А. Реши ја равенката:

$$(x^2 - 8)(x+1)^2 + x^2 = 0.$$

Решение. -1 не е решение на равенката па затоа таа е еквивалентна со: $x^2 - 8 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 0$. Ја трансформираме во $(x - \frac{x}{x+1})^2 + 2\frac{x^2}{x+1} - 8 = 0$, односно во

$(\frac{x^2}{x+1})^2 + 2\frac{x^2}{x+1} - 8 = 0$. Ја воведуваме смената $t = \frac{x^2}{x+1}$ и добиваме $t^2 + 2t - 8 = 0$, чишто решенија се 2 и -4 . Од $\frac{x^2}{x+1} = 2$ ги добиваме $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, а од $\frac{x^2}{x+1} = -4$ добиваме $x_3 = -2$.

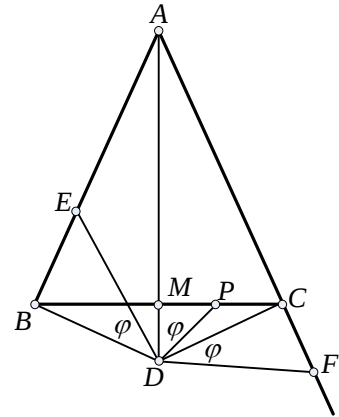
4 А. Над отсечката BC , како основа, во различните полурамнини конструирани се рамнокраките триаголници ABC и DCB , пришто $\angle DBA = 90^\circ$. Нека M е средината на основата BC . Нека E е точка од страната AB , P е на отсечката MC и F е на полуправата AC така што C е меѓу A и F , пришто

$$\angle EDB = \angle PDA = \angle FDC.$$

Докажи дека P е средина на отсечката EF и DP и EF се заемно нормални.

Решение. Нека $\angle EDB = \angle PDA = \angle FDC = \phi$. Триаголниците EBD , PMD и FCD се правоаголници и оттука: $\cos \phi = \frac{BD}{ED} = \frac{MD}{PD} = \frac{CD}{FD}$. Тогаш, од $\overline{BD} = \overline{CD}$ следува дека $\overline{ED} = \overline{FD}$, па триаголникот DFE е рамнокрак. Уште, $\angle FDE = \angle FDC + \angle CDE = \angle EDB + \angle CDE = \angle CDB$, па триаголниците DCB и DFE се слични, со коефициент на сличност $\cos \phi$.

Од $\angle PDE = \angle PDM + \angle MDE = \angle EDB + \angle MDE = \angle MDB$, следува дека DP е симетрала на аголот FDE , па затоа DP и EF се заемно нормални. Од тоа што DM е висина во триаголникот DCB , DP е симетрала на аголот FDE и $\cos \phi = \frac{MD}{PD}$, следува дека DP е висината во триаголникот DFE па затоа P е средина на отсечката EF .



3 Б. Најди ги сите реални броеви c такви што равенката

$$(x^2 - 4x - c)^2 - 8x^2 + 32x + 8c = 0$$

има точно две реални решенија.

Решение. Равенката е еквивалентна со $(x^2 - 4x - c)^2 - 8(x^2 - 4x - c) = 0$. Ако $t = x^2 - 4x - c$, добиваме $t^2 - 8t = 0$ и оттука $x^2 - 4x - c = 0$ или $x^2 - 4x - c = 8$. Дискриминантата на првата равенка е $D_1 = 4(c + 4)$, а на втората равенка е $D_2 = 4(4 + c + 8) = 4(c + 12)$. Равенката има точно две реални решенија ако:

$$1) \begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 < 0 \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \text{ или } 3) \begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \end{cases}.$$

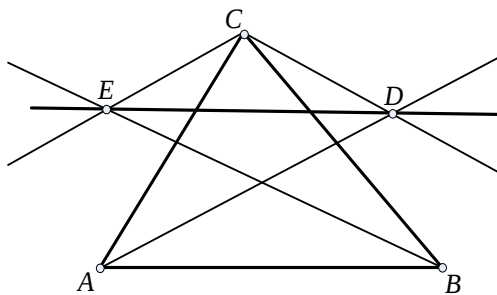
Решение има третиот систем т.е. $c \in (-12, -4)$.

4Б. Во остроаголниот триаголник ABC повлечени се симетралите на внатрешните агли во темињата A и B . Од темето C се повлечени прави паралелни со овие симетрали кои нив ги сечат во точките D и E , соодветно. Ако правата DE е паралелна со AB докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

Решение. Бидејќи AD е симетрала на $\angle A$, користејќи ја паралелноста $AB \parallel ED$ и $AD \parallel EC$ добиваме

$$\angle CAD = \angle BAD = \angle DEC.$$

Од ова добиваме дека точките A , D , C и E лежат на иста кружница. Слично, добиваме дека точките B , D , C и E лежат на иста кружница. Значи A , B , D , C и E лежат на иста кружница. Од паралелноста $AD \parallel EC$ и $BE \parallel CD$ следи $\angle DAC = \angle DEC = \angle EDA = \angle ABE$, од каде го следува тврдењето во задачата.



III година

1АБ. Најди ги решенијата на системот:

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3-2y \\ z^2 + 4y^2 = 8y \\ (2z-x)(x+3) = 5x+16 \end{cases} \quad \text{за кои } z \geq 0.$$

Решение. Ако ја разгледаме втората равенка од системот како квадратна во однос на y , нејзината дискриминанта е $D = 64 - 16z^2$. Од $64 - 16z^2 \geq 0$, добиваме

дека $|z| \leq 2$. Од условот $z \geq 0$ имаме $0 \leq z \leq 2$. Да ја претставиме третата равенка на системот како квадратна во однос на x : $x^2 - 2(z-4)x - 6z + 16 = 0$. За нејзината дискриминанта D имаме $\frac{1}{4}D = (z-4)^2 + 6z - 16 \geq 0$. Оттука, имајќи предвид дека $z \geq 0$, добиваме $z \in \{0\} \cup [2, \infty)$. Но $0 \leq z \leq 2$, па $z = 0$ и $z = 2$. Решенијата се $(-4, 2, 0)$ и $(-2, 1, 2)$.

2АБ. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник. Определи го аголот спроти страната со должина c , ако е исполнето равенството $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = c^2$.

Решение. Даденото равенство ќе го запишеме во обликот

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= c^2(a+b+c) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = c^3 + c^2(a+b) \\ &\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) = c^2(a+b) \end{aligned}$$

Бидејќи a и b се должини на страни во триаголник, имаме $a+b \neq 0$, па затоа $c^2 = a^2 - ab + b^2$. Од косинусната теорема имаме дека $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Од последните две равенства следува $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, односно $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

3А. Ако за агли во триаголник α и β важи релацијата

$$\sin^{2014}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^{2015}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sin^{2014}\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos^{2015}\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

тогаш $\alpha = \beta$. Докажи!

Решение. Бидејќи α и β се агли во триаголник, за нив важи $0 < \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$. На интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$, синусната функција е строго растечка, косинусната функција е строго опаѓачка и двете функции се позитивни.

а) Ако $\alpha > \beta$ тогаш $\frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2}$ и важат неравенствата $\sin \frac{\alpha}{2} > \sin \frac{\beta}{2} > 0$, $0 < \cos \frac{\alpha}{2} < \cos \frac{\beta}{2}$. Оттука следува дека

$$\sin^{2014}\left(\frac{\alpha}{2}\right) > \sin^{2014}\left(\frac{\beta}{2}\right) > 0 \text{ и } 0 < \cos^{2015}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \cos^{2015}\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Од овие две неравенства (со нивно множење), се добива

$$\sin^{2014}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^{2015}\left(\frac{\beta}{2}\right) > \sin^{2014}\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos^{2015}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

б) Ако $\alpha < \beta$, аналогно како во а), се докажува дека важи

$$\sin^{2014}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^{2015}\left(\frac{\beta}{2}\right) < \sin^{2014}\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos^{2015}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Значи, равенството е можно ако $\alpha = \beta$.

4А. Во тетраедарот $ABCD$, со врв A важи $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 60^\circ$. Докажи дека важи неравенството

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} \leq \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD}.$$

Решение. Нека AE е симетрала на аголот A , на страната BC . Со примена на синусната теорема, на триаголниците ABE и ACE , добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(180^\circ - \delta)} = \frac{\overline{BE}}{\sin 30^\circ}; \frac{\overline{AC}}{\sin \delta} = \frac{\overline{CE}}{\sin 30^\circ}.$$

Оттука следува дека $2\overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\sin \delta}$; $2\overline{CE} = \frac{\overline{AC}}{\sin \delta}$. Со

собирање на последните две еднакости, добиваме

$$2(\overline{BE} + \overline{CE}) = 2\overline{BC} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\sin \delta} \geq \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Значи

$$2\overline{BC} \geq \overline{AB} + \overline{AC} \quad (1)$$

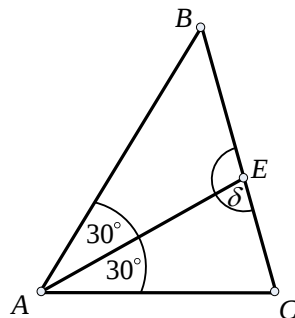
Аналогно се докажува дека

$$2\overline{BD} \geq \overline{AB} + \overline{AD}, \quad (2)$$

и

$$2\overline{CD} \geq \overline{AC} + \overline{AD}. \quad (3)$$

Со собирање на неравенствата (1), (2) и (3), се добива бараното неравенство.



3Б. Без користење на калкулатор, докажи дека важи неравенството

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

Решение. Бидејќи

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi = \log_2 \pi + \frac{1}{\log_\pi 4} = \log_2 \pi + \frac{1}{2 \log_\pi 2} = \log_2 \pi + \frac{\log_2 \pi}{2} = \frac{3 \log_2 \pi}{2},$$

доволно е да докажеме дека $3 \log_2 \pi < 5$, т.е. $\pi^3 < 2^5$

Ова неравенство лесно се докажува со користење на тривијалното неравенство $\pi < 3,15$. Имено, $\pi^3 < 3,15^2 \cdot 3,15 < 10 \cdot 3,2 = 2^5$. Со тоа задачата е решена.

4Б. Од коцка со раб 3 см., отсечени се сите 8 темиња, така што новодобиеното тело има 24 темиња и сите негови рабови се со еднаква должина. Одреди го волуменот на новодобиеното тело.

Решение. Од равенките

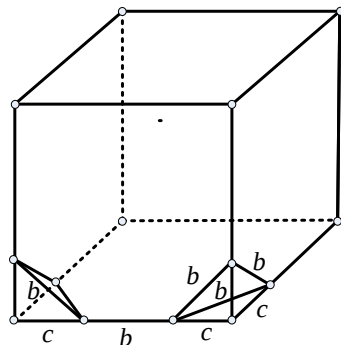
$$b + 2c = a = 3 \text{ и } b = c\sqrt{2},$$

добиваме дека $c = \frac{3(2-\sqrt{2})}{2} \text{ cm}$. Волуменот на секој

од 8-те тетраедри е

$$V_T = \frac{c^3}{6} = \frac{9(10-7\sqrt{2})}{8} \text{ cm}^3$$

Волуменот на коцката е



$$V_K = a^3 = 27 \text{ cm}^3.$$

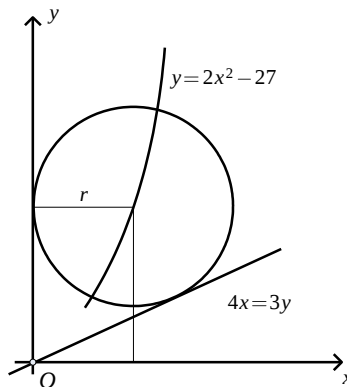
Конечно, волуменот на телото е

$$V = V_K - 8V_T = 63(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^3.$$

IV година

1АБ. Правите $x=0$ и $4x=3y$ се тангенти на кружница која се наоѓа во првиот квадрант и има центар на кривата $y=2x^2-27$. Најди го радиусот на кружницата.

Решение. Нека (a, b) се координатите на центарот на кружницата и r е нејзиниот радиус. Да забележиме дека кружницата лежи во полурамнината определена со правата $4x=3y$ и точката $(0, 1)$ (т.е. со позитивниот дел на y -оската), па важи $3a-4b > 0$. Бидејќи кружницата се наоѓа во првиот квадрант, следува дека $a > 0$ и $b > 0$. Од тоа што y -оската е тангента следува дека $r = a$, а бидејќи центарот се наоѓа на параболата $y = 2x^2 - 27$



следува дека $b = 2a^2 - 27 = 2r^2 - 27$, па координатите на центарот се $(r, 2r^2 - 27)$. Растојанието од центарот до y -оската е r а до правата $4x=3y$ е

$$\frac{3(2r^2-27)-4r}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{6r^2-4r-81}{5}.$$

Бидејќи двете прави се тангенти, следува дека $r = \frac{6r^2-4r-81}{5}$, и оттука добиваме $6r^2 - 9r - 81 = 0$. Решенија на последнава равенка се -3 и $\frac{9}{2}$, па бараниот радиус е $\frac{9}{2}$.

2АБ. Аглите на конвексниот n -аголник се $\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha$. Најди ги сите можни вредности за n и соодветните вредности за α .

Решение. Јасно е дека $n \geq 3$. Збирот на аглите во конвексниот n -аголник е $(n-2)\pi$ (n -аголникот можеме да го поделиме на $n-2$ триаголници). Од друга страна $\alpha + 2\alpha + \dots + n\alpha = \alpha(1+2+\dots+n) = \frac{n(n+1)}{2}\alpha$.

Од равенката, $(n-2)\pi = \frac{n(n+1)}{2}\alpha$ добиваме $\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)}$ и $n\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n+1} < \pi$. Но, тогаш $\frac{2(n-2)}{n+1} < 1$, т.е. $n < 5$. Сега за $n=3$ имаме $\alpha = \frac{\pi}{6}$, а за $n=4$ имаме $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

3А. Најди $a_1 a_2 \dots a_n$, ако $a_1 = 1$, $a_{n+1} a_n = 4(a_{n+1} - 1)$, за $n \geq 1$.

Решение. Бидејќи $a_{n+1} a_n = 4(a_{n+1} - 1)$, $a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n}$. Ако на двете страни одземеме 2, имаме $a_{n+1} - 2 = \frac{4}{4-a_n} - 2 = \frac{2(a_n-2)}{4-a_n}$. Оттука, $\frac{1}{a_{n+1}-2} = \frac{4-a_n}{2(a_n-2)} = \frac{1}{a_n-2} - \frac{1}{2}$. Па, низата $\{\frac{1}{a_n-2}\}$ е аритметичка прогресија со почетен член $\frac{1}{a_1-2} = -1$ и разлика $d = -\frac{1}{2}$. Значи, $\frac{1}{a_n-2} = -1 + (n-1)(-\frac{1}{2}) = -\frac{n+1}{2}$, од каде $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Конечно,

$$a_1 a_2 \dots a_n = (2 \cdot \frac{1}{2})(2 \cdot \frac{2}{3})(2 \cdot \frac{3}{4}) \dots (2 \cdot \frac{n}{n+1}) = \frac{2^n}{n+1}.$$

4А. Најди ги сите природни броеви n така што $\sum_{k=1}^n \frac{n}{k!}$ е цел број.

Решение. Бидејќи $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \frac{n! + n(n-1)! + \dots + n(n-1) + n + 1}{n!} = \frac{(n-1)S + n + 1}{n!}$, добиваме дека $\sum_{k=1}^n \frac{n}{k!} = \frac{(n-1)S + (n+1)}{(n-1)!}$. За бројот $\sum_{k=1}^n \frac{n}{k!}$ да биде цел треба $(n-1)! \mid (n-1)S + n + 1$. Бидејќи $(n-1) \mid (n-1)!$ и $n-1 \mid (n-1)S$ следува дека мора $n-1 \mid n+1$. Јасно $n-1 \mid n-1+2$ па оттука $n-1 \mid 2$. Значи $n=2$ и $n=3$.

3Б. Ако $x^2 = x+1, n \geq 2$ тогаш докажи дека $x^n = F_n x + F_{n-1}$ каде $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ за секој природен број n .

Решение. Ќе докажеме со помош на математичка индукција по n . За $n=2$ добиваме $x^2 = F_2 x + F_1 = x+1$.

Сега, нека претпоставиме за $n > 2$ е исполнето $x^{n-1} = F_{n-1} x + F_{n-2}$. Имаме

$$\begin{aligned} x^n &= x \cdot x^{n-1} = x(F_{n-1} x + F_{n-2}) = x^2 F_{n-1} + x F_{n-2} = (x+1) F_{n-1} + x F_{n-2} \\ &= x(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-1} = x F_n + F_{n-1}. \end{aligned}$$

4Б. Ако $n \mid a-b$ докажи дека $n^2 \mid a^n - b^n$. Дали важи обратното?

Решение. Бидејќи $n \mid a-b$ следува дека постои цел број c така што $a = nc + b$. Од Биномната формула добиваме

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (b + nc)^n - b^n = b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} nc + \binom{n}{2} b^{n-2} n^2 c^2 + \dots + \binom{n}{n} n^n c^n - b^n \\ &= n^2 (b^{n-1} c + \binom{n}{2} b^{n-2} c^2 + \dots + \binom{n}{n} n^n c^n). \end{aligned}$$

Значи, $n^2 \mid (a^n - b^n)$.

Обратно не важи бидејќи $3^n \equiv 1^4 \pmod{4^2}$ но 3 и 1 немаат ист остаток при делење со 4.