

НЕОБИЧНИ ДОЖИВЉАЈИ ЈЕДНОГ ВАСИОНСКОГ ПУТНИКА¹

УВОД

1. У једном од раније објављених чланака („О низовима бројева“, МЛ III-1) говорили смо о природном бројном низу $1, 2, 3, \dots$, који почиње бројем 1 и у којем не постоји највећи природан број. На питање колико има чланова у природном низу може се одговорити само да је број тих чланова већи од сваког великог броја који можемо написати или замислити. Заиста, ако наведемо било који велики природан број, на пример 1 000 000 000 000 (један билион), увек можемо томе броју додати 1, па ћемо добити још већи природан број, новом броју поново додати 1 и тако наставити. Зато кажемо да природних бројева има бесконачно много.

Међу природним бројевима разликујемо парне и непарне. Паран број је онај број који се добија множењем броја 2 и неког природног броја. Тако је

$$2 = 2 \cdot 1, \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad \dots, \quad 28 = 2 \cdot 14, \quad \dots$$

Ако било који природан број обележимо са n , тада ћемо било који паран број обележити са $2n$. Непаран број је онај који се добија када се од парног броја одузме 1; зато било који непаран број обележавамо са $2n - 1$. На основу тога, низ непарних природних бројева $1, 3, 5, \dots, 19, \dots$, можемо записати у облику:

$$2 \cdot 1 - 1, \quad 2 \cdot 2 - 1, \quad 2 \cdot 3 - 1, \quad \dots, \quad 2 \cdot 10 - 1, \quad \dots$$

2. Очигледно је да парних бројева има бесконачно много и да, исто тако, и непарних бројева има бесконачно много. Дакле, скуп свих природних бројева је бесконачан (обележићемо га са N), скуп свих парних бројева је бесконачан (обележићемо га са N_2) и скуп свих непарних бројева је бесконачан (обележићемо га са N_1). При томе, скуп N свих природних бројева садржи у себи оба скупа N_2 и N_1 .

Замислимо да смо почели да исписујемо редом све природне бројеве и да смо, после тога, прецртали све парне бројеве. На тај начин смо из бесконачног скупа N одстранили бесконачан скуп N_2 парних бројева, а преостео нам је бесконачан скуп N_1 непарних бројева. То нам показује да бесконачни скупови могу понекад да се чудно понашају: од бесконачног скупа „одузели смо“ бесконачан скуп и остео нам је опет бесконачан скуп!

На неким својствима бесконачних скупова заснива се једна лепа прича о чудноватим доживљајима необичног путника Јона Тихога, који је на својим путовањима по васиони упознао многе нове светове и њихове становнике и своје доживљаје описао у свом „Звезданом дневнику“. Донећемо један одломак те приче који носи наслов **Необичан хотел**.

НЕОБИЧАН ХОТЕЛ²

... Једног јутра пробудило ме је звоњење телефона.

— Драги Јоне, неодложан задатак! — зачуо сам глас свог старог пријатеља и колеге са међузвезданих путовања професора Тарантоге. — Астрономи су открили у васиони неки чудан објекат, који се као тајанствена црна линија вуче од једне до друге галаксије. Нико не зна шта је то. Најјачи телескопи и радиотелескопи, постављени на ракетама, не могу нам помоћи да откријемо тајну. Сместа полети у правцу маглине $ACD-1587!$

Следећег дана враћена ми је са оправке моја стара фотонска ракета (тј. ракета која се креће брзином светлости), на којој сам одмах монтирао убрзивач времена и електронског робота који је знао све језике којима се говори у космосу и све приче о посетиоцима звезда (то ме је обезбедило од досаде бар за пет година путовања) и полетео сам у задатом правцу.

Кад је робот био већ исцрпео сву залиху својих прича и почео опет испочетка (а нема ничег горег него слушати електронског робота који по дести пут понавља стару причу), у даљини сам угледао циљ свог путовања. Маглине које су заклањале тајанствену линију биле су иза мене, а преда мном је стајао ... хотел „Космос“, за који дотле нисам

² Преведено из књиге Н. Ј. Виленкина: „Приче о скуповима“, Москва 1965.

био чуо. Убрзо сам сазнао да су међузвездане луталице Вигонти, којима сам ја некад саградио невелику планету, раскомадали и ту планету на ситне комадиће и поново остали без свог станишта. Тада, да не би више били приморани да лутају по туђим галаксијама, решили су да подигну једну огромну зграду — хотел за све који путују и тумарају васионом. Тај се хотел протегао кроз скоро све галаксије. Кажем „скоро све“ зато што су Вигонти раставили на делове неке ненастањене галаксије, а од сваке од преосталих галаксија одвукли су по неколико лоше постављених сазвежђа.

Но што се тиче тог хотела, свака им част! У свакој соби биле су чесме са хладном и врелом плазмом. Ко је хтео, могао је увече да се разаспе у прах; сутрадан изјутра портир је све госте поново састављао према атомској схеми сваког од њих.

А што је најглавније, у хотелу је било бесконачно много соба. Вигонти су се надали да одсад нико више неће чути ону реченицу, која им је током дигих лутања била много дојадила: „нема слободних соба“.

Па и поред свега тога, ја нисам имао среће. Кад сам ушао у пријемно одељење, прво што сам спазио био је плакат: „Делегати конгреса космозоолога треба да се пријаве на 127. спрату“. Како су космозоолози дошли из свих галаксија, а ових има бесконачно много, све собе су већ биле заузете и за мене није више било места. Додуше, шеф пријемне канцеларије покушавао је да неке космозоологе мало стесни и да мене смести код њих, али када сам сазнао да један од њих сматра да је за њега нормална собна температура 860° , најучтививије сам се одрекао тако „пријатног“ суседства.

Срећом, директор хотела био је један Вигонт који је добро памтио услуге које сам ја некада учинио том племену. Он се заузео да добијем смештај у хотелу, јер бих, да сам остао да преноћим у међузвезданом простору, могао добити запаљење плућа. Пошто је мало размислио, он је ракао шефу пријемне канцеларије:

— Сместите га у собу број 1.

— А где да преселим госта који је сада тамо? — зачуђено је упитао шеф.

— Њега преселите у собу број 2. Госта из броја 2 отпремите у број 3, оног из броја 3 у број 4, и тако даље.

Тек тада сам схватио шта значе необична својства тог хотела. Кад би у њему било само коначно много соба, тада би се гост из последње собе морао пребацити у међузвездани простор. А како је хотел имао бесконачно много соба, било је места за све, те сам ја тако успео да се сместим, а да ниједан космозоолог није изгубио своје место.

Следећег јутра нисам се нимало зачудио кад су ме замолили да се преселим у собу број 1 000 000. До тога је морало доћи јер су са задоцњењем пристигли космозоолози из галаксије ВСК-3472, те је требало сместити још 999 999 гостију. Али, кад сам трећег дана боравка пошао у администрацију да платим собу, све ми се смркло пред очима. Пред шалтером се отегао ред чији се крај губио негде око Магеланових облака.

— Мењам две марке маглине Андромеде за марку Сиријуса!

— Ко има марку Ерпеје из 57. године космичке ере?

У недоумици обратио сам се шефу администрације:

— Ко су ови?

— Међугалактички конгрес филателиста.

— Има ли их много?

— Бесконачно много, по један представник сваке галаксије.

— Па, како ћете их сместити кад космозоолози одлазе тек сутра?

— Не знам, то ћу сада изнети на кратком састанку код директора.

Али, испоставило се да је тај проблем веома компликован и кратки састанак одужио се читав сат. Најзад, шеф администрације изашао је из директорове канцеларије и почео да пресељава госте. Прво је наредио да се гост из собе 1 пресели у собу број 2. Мене је то зачудило, јер сам из стеченог искуства претходног дана знао да такво пресељавање ослобађа само једну собу, а сада је требало сместити ни мање ни више него бесконачан скуп филателиста! Међутим, шеф администрације је наставио да командује:

— А госта из собе 2 преселите у број 4, оног из броја 3 у број 6, и уопште госта из собе број n у собу број $2n$.

Сада ми је његов план постао јасан: на тај начин он је ослободио бесконачан скуп соба с непарним бројевима, тако да је у те собе могао сместити све филателисте. И тако су у свим собама с парним

бројевима били космозоолози, а све собе с непарним бројевима заузели су филателисти (што се мене тиче, ја сам се за три дана толико спријатељио с космозоолозима, да су ме изабрали за почасног председника свог конгреса; заједно са свим космозоолозима морао сам да напустим собу број 1 000 000 у којој сам дотле био и да се преселим у собу број 2 000 000). А један мој познаник филателист, који је у реду пред шалтером био 574. добио је собу број 1147. Уопште, филателист који је у реду заузимао n -то место, добио је собу с бројем $2n - 1$.

Следећег дана ситуација са собама постала је лакша — конгрес космозоолога је био завршен и они су отпутовали. Ја сам прешао у директоров стан, где је била једна слободна соба. Али, оно што је добро за госте, није увек добро и за администрацију. После неколико дана приметим сам да је мој гостољубиви домаћин нерасположен.

— Шта Вам је? — упитао сам.

— Половина соба су празне. Финансијски план подбацује.

Истина, ја нисам одмах разумео о каквом је финансијском плану реч, јер су преостали гости плаћали за бесконачно много соба, али сам ипак дао један савет:

— А Ви преселите госте тако да све собе буду заузете.

Испоставило се да је то сасвим просто учинити. Филателисти су заузимали само собе с непарним бројевима: 1, 3, 5, 7, итд. Госта из собе број 1 оставили су на миру. Госта из броја 3 преселили су у број 2, госта из броја 5 у број 3, госта из броја 7 у број 4, итд. Уопште, гост из собе број $2n - 1$ пресељава се у собу број n . Пошто је то завршено, све собе су опет биле попуњене иако није дошао ниједан нови гост.

Али, директорове бриге нису се тиме завршиле, а ево зашто. Вигонти се нису задовољили тиме да саграде хотел „Космос“. Неуморни градитељи саградили су још бесконачно много хотела, од којих је сваки имао по бесконачно много соба. При томе, они су раставили на делове толико много галаксија да се нарушила међугалактичка равнотежа, а то је могло да изазове веома тешке последице. Зато им је било предложено да затворе све хотеле осим нашег и да коришћени грађевински материјал врате одакле су га узели. Али, извршење тог задатка није било нимало лако, јер су сви хотели — а међу њима и наш — били пуни гостију, а требало је госте из бесконачно много

хотела, од којих сваки има бесконачно много гостију, преселити у један хотел који је већ био пун!

— Ја више не могу! — повикао је директор. — Најпре сам у пун хотел сместио једног госта, затим сам сместио још 999 999 гостију, после тога још бесконачно много гостију, а сада од мене траже да у тај хотел сместим још бесконачно много бесконачних скупова гостију. Не, хотел није од гуме, нека сместе госте где год хоће, овде за њих нема места!

Но, наредба је наредба и кроз пет дана требало је све припремити за пријем нових гостију. Тих дана нико у хотелу није радио; сви су мислили како да реше тај проблем. Био је објављен и наградни конкурс — с туристичким путовањем по једној галаксији као наградом. Било је предложено неколико на први поглед добрих решења, али се убрзо проверавањем открило да ти предлози не решавају постављени проблем. Дошао је ред и на мене да покажем да нисам узалуд пет година учио математику у Звезданој академији.

— Треба искористити просте бројеве којих, као што знате, има бесконачно много! Сместите госте првог хотела у собе које редом имају бројеве: 2, 4, 8, 16, ..., госте другог хотела у собе које редом имају бројеве: 3, 9, 27, 81, ..., госте трећег хотела у собе које редом имају бројеве: 5, 25, 125, 625, ..., госте четвртог хотела у собе које редом имају бројеве: 7, 49, 343, 2401, ..., и тако даље.

— А да не испадне на тај начин да једну исту собу добију два госта? — упита директор.

— Не, то је искључено! Јер, ако узмемо било која два проста броја, тада су и њихови квадрати, и њихови кубови, и њихови четврти степени, ... различити међу собом. Уопште, било који степен једног простог броја, увек је различит од било ког степена другог простог броја. Зато ће на тај начин сваки гост добити засебну собу.

Директор је прихватио моје решење и одмах је успео да га још више упрости користећи као полазне бројеве не све просте бројеве, како сам ја предложио, већ само бројеве 2 и 3. Наиме, он је решио да госте из првог хотела смести редом у собе с бројевима:

$2 \cdot 3$ (за првог госта), $2^2 \cdot 3$ (за другог госта), $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3$, ...

Госте из другог хотела сместио је редом у собе с бројевима:

$2 \cdot 3^2$, $2^2 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3^2$, $2^4 \cdot 3^2$, ...

Госте из трећег хотела сместио је редом у собе с бројевима:

$$2 \cdot 3^3, 2^2 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3, \dots$$

Госте из десетог хотела хотела сместио је редом у собе с бројевима:

$$2 \cdot 3^{10}, 2^2 \cdot 3^{10}, 2^3 \cdot 3^{10}, 2^4 \cdot 3^{10}, \dots \text{ итд.}$$

При томе је сваки гост добио засебну собу.

Овакво решење је све одушевило, јер је био решен проблем који је свима изгледао нерешив. Али, награду нисмо добили ни ја ни директор, јер је и моје и директорово решење остављало много празних соба. По мом предлогу, остајале би празне собе чији број није степен неког простог броја, а директорово решење оставило је празне све собе чији број не може да се напише у облику производа $2^m \cdot 3^n$, где су m и n природни бројеви.

Најбоље решење, које је омогућило да се сви становници космичких хотела сместе у хотелу „Космос“ и да при томе ниједна соба у овом хотелу не буде празна, а сваки гост да добије засебну собу, нашао је један од филателиста, председник Математичке академије галаксије Лабуда. О томе решењу говорићемо другом приликом. А сада ми преостаје само да се опростим са својим домаћинима и да се својом фотонском ракетом вратим на Земљу, где треба да свим космонаутима испричам о новом пристаништу у космосу. Осим тога, желим да се са најистакнутијим математичарима Земље и са својим пријатељем професором Тарантогом поразговарам о својствима бесконачних скупова.

. XXIX 6