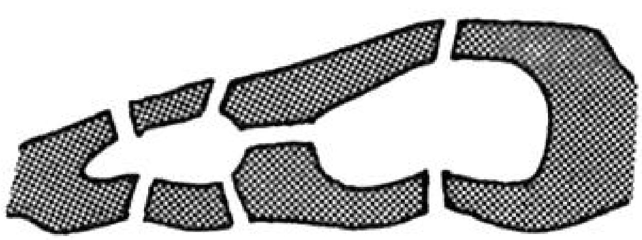
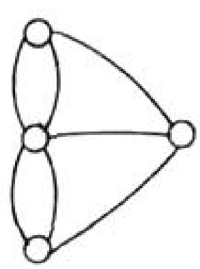
Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

NEŠTO O GRAFOVIMA I NJIHOVOJ UPOTREBI

Začeci teorije grafova javljaju se u 18. stoleću. Stari grad Kenigsberg (poznat takođe po tome što se tamo nalaze posmrtni ostaci velikog filozofa Kanta) bio je ukrašen sa sedam mostova koji su povezivali obale reke Pregela sa ostrvima u njoj (sl. 1). Meštane Kenigsberga je prilično dugo zaokupljalo sledeće pitanje: Da li je moguće preći preko svih mostova tako da se pređe preko svakog mosta samo jedanput? Pokušajte!



Sl. 1

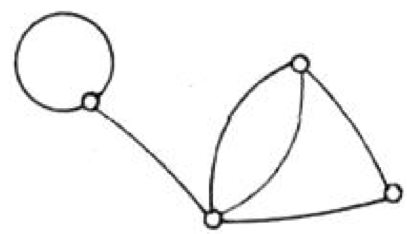


Sl. 2

Za ovaj problem sazano je i tada najveći matematičar *Leonard Ojler* (1707 — 1783). On je ovaj problem pojednostavio tako što je obale i ostrva označio kružićima, pa ih je povezao linijama koje predstavljaju mostove (sl. 2). Takvu shemu nazivamo graf. Još neki od grafova su prikazani na slimkama 3 i 5.

Kao što vidimo, svaki graf je sastavljen od mnoštva kružića ili *tačaka* grafa, koje su međusobno poparno povezane mnoštvom linija ili *spojnica.* Umesto reči tačka (grafa) i spojnica često se upotrebljavaju i reči *čvor* i *grana*. Tačke koje vezuju spojnice nazivamo *krajevima* spojnica. To ,da spojnica p ima krajeve u tačkama u i v beležićemo ovako: $p\,(u;v)$.

Primer: Graf na sl. 3 je određen skupom tačaka $T=\{x, y, z, w\}$ i skupom spojnica $P=\{a(x;x),\ b\,(x;y),\ c\,(y;z),\ d\,(z;w),\ e\,(w,y)\ \mathrm{f}\ (w;y)\}$. Među spojnicama privukla je našu pažnju pre svega spojnica $a\ (x;x)$ koja ima za oba kraja istu tačku x. Takve spojnice nazivamo *petlje*.



Sl. 3

Broj spojnica koje imaju krajeve u tački t pokazuje kolikostruka je ta tačka i obeležavamo ga sa $k\ (t)$. Petlje uzimamo u obzir pri određivanju broja k dvaput. Tako važi za graf na sl. 3:

$$k\,(x)=k\,(w)=3, \quad k\,(y)=4, \quad k\,(z)=2.$$

Postavimo se u neku tačku grafa. Time što ćemo se po spojnici koja ima kraj u toj tački premestiti u njen drugi kraj možemo »putovati« po grafu od tačke do tačke. Niz spojnica koje pri tome prelazimo nazivamo *put* po grafu.

Za graf na sl. 3 su , na primer, nizovi spojnica: $P_1=a,b,c,d,e,e,f$ i $P_2=c$; niz $P_3=b,a,e$ ne postoji.

Svaki put ima svoj *početak* i svoj *kraj*. Put P_1 ima početak u tački x i završetak u tački y, zbog čega pišemo $P_1(x,y)$. Za početak puta P_2 možemo izabrati koji bilo od krajeva spojnice c. Za to, da put po grafu bude potpuno određen, moramo uopšte uzev pored niza spojnica označiti i njegov početak.

Ako postoji put iz tačke u (početak) do tačke v (kraj), kažemo da je tačka v *dostupna* iz tačke u. Ako su sve tačke grafa međusobno dostupne, reći ćemo da je graf *povezan*.

Graf na sl. 3 je povezan; ako pak »zbrišemo« spojnicu *b*, dobijamo nepovezan graf, jer tačka *x* nije više dostupna iz drugih tacaka grafa.

Sada znamo o grafovima već toliko, da možemo pratiti rešenje zadatka o kenigsberškim mostovima, koji ćemo svesti na grafove ovako:

Da li postoji na datom grafu put koji sadrži svaku spojnicu tačno jedanput?

Takav put zovemo *Ojlerov put*. Rešenje postavljenog zadatka daje sledeći iskaz:

Na grafu postoji Ojlerov put tada i samo tada ako je isti povezan i ima najviše dve neparne tačke (tačke u kojima se stiče neparan broj spojnica).

Ako postoje dve neparne tačke (a na grafu postoji uvek paran broj neparnih tačaka), jedan je početak, a drugi kraj Ojlerovog puta. Ako su pak sve tačke parne, Ojlerov put je zatvoren i predstavlja zatvorenu krivu, i tada se njegov početak i kraj poklapaju; za početak puta možemo izabrati proizvoljnu tačku.

Obrazložićemo najpre stav: ako na datom grafu postoji Ojlerov put, onda na grafu ima najviše dve neparne tačke. Zamislimo da je graf nacrtan kredom. Uzmimo u ruke sunđer i sleđimo Ojlerov put po grafu. Pređeni put za sobom brišimo. Kad pređemo celi put, biće sve spojnice grafa zbrisane i sve će tačke biti nultostruke, biće, dakle parne. Očigledno, pri svakom prolazu kroz tačku brišemo po dve spojnice, onu po kojoj smo došli, i onu po kojoj smo tačku napustili. Prema tome, posle prolaza kroz tačku ostaje svaka parna tačka parna, a neparna neparna. Samo na početku puta i na kraju puta možemo da izmenimo parnost tačke, jer samo u ta dva slučaja brišemo u datoj tački po jednu spojnicu. Pošto na kraju moraju biti sve tačke parne, zaključujemo da na početku imamo najviše dve neparne tačke.

Neka sada graf zadovoljava navedeni uslov, tj, neka ima najviše dve neparne tačke. Kako dobijamo Ojlerov put? Ako na grafu postoje neparne tačke, počinjemo kod jedne od njih i putujemo po grafu. Pošto u svakoj parnoj tački put možemo nastaviti, zaustavićemo se pre a posle u drugoj neparnoj tački. Na celom nepređenom delu grafa su sada sve tačke parne. To važi takođe u slučaju kada u početku nema na grafu nijedne neparne tačke. U oba slučaja izabiremo proizvoljnu tačku koja će predstavljati kraj još nepređene spojnice i počinjemo putovanje. Pošto su na ovom putu sve tačke parne, putovanje ćemo završiti u početnoj tački – dobijeni put je, dakle, zatvorena kriva. To ponavljamo dok ne pokrijemo zatvorenim krivima sav graf. U cilju povezanosti grafa možemo dobijene zatvorene krive (i put) da zdru-

žimo u jednu jedinu zatvorenu krivu (put). Osnovna zamisao združivanja je prikazana na sl. 4.

Sl. 4

Putem ovakvog razmišljanja je Ojler okončao pomenuto traženje. Svoje zaključke je objavio u raspravi: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Petropolitanae VIII, 1736 (1741), p. 128—140. Zadatak o kenigsberškim mostovima nije rešiv jer ogovarajući graf ima četiri neparne tačke.

Ovakve zadatke srećemo u enigmatskim rubrikama često pod naslovom »nacrtaj jednim potezom«. Takvi zadaci nam sad već neće pričinjavati teškoće. Ali šta, ako ima više od dve neparne tačke? Sa kokoliko najmanje poteza možemo nacrtati takav graf? Odgovor daje iskaz:

Povezani graf sa $2m$ neparnih tačaka možemo pokriti (=svaka spojnica ulazi u neki put) sa m odvojenih (=svaka spojnica ulazi najviše jedanput) puteva.

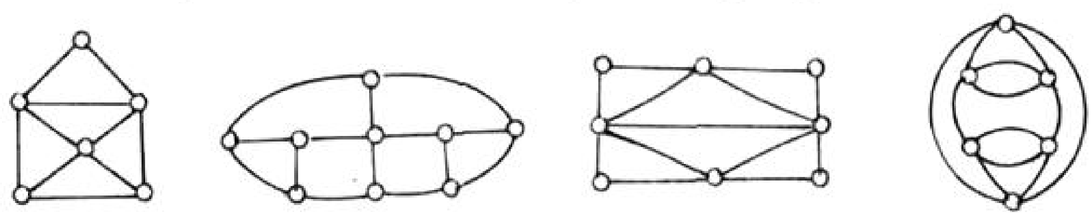
Zadaci

1. Nacrtaj graf, određen skupom tačaka $T=\{x,y,z,u,v\}$ i skupom spojnica $P=\{a(z;y),\ b(y;v),\ c(v;z),\ d(u;z),\ e(u;v)\ f(u;y),\ g(v;v)\}$.

2. Nacrtaj povezani graf sa pet tačaka, čija je višestrukost 2.

3. Na svakom grafu ima paran broj neparnih tačaka. Dokaži.

4. Svaki od grafova na sl. 5 nacrtaj putem što manje poteza (potez=neprekinuta crta), pri čemu svaku crtu treba preći samo jedanput.



Sl. 5a Sl. 5b Sl. 5c Sl. 5d

5. Pravilan n-tougaonik sa svojim dijagonalama je zapravo graf sa n tačaka (temena). Ako je n neparan broj, lako ga možemo nacrtati prema Ojlerovom stavu putem n poteza. Pokušaj nacrtati jednim potezom pravilni sedmougaonik sa svima njegovim dijagonalama.

(«*Presek*«, *VI/1—Po članku D. Bezka priredio V. Bagatelj—Preveo P. D.*)