УПАРИВАЊЕ У БИПАРТИТНИМ ГРАФОВИМА

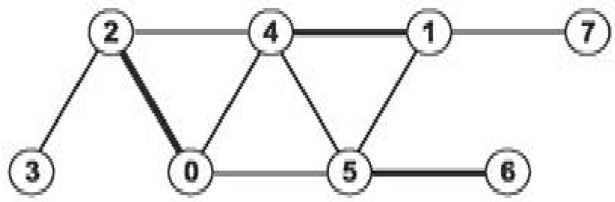
Павле Мартиновић, Београд

Увод и дефиниције

У графовима се можемо срести са разним интересантним проблемима од којих је велик број тежак и није нам познато како да их брзо решимо. У ту категорију спадају проблеми најдужег пута, највеће клике, хроматског броја итд. У овом чланку ће бити представљен један од најпознатијих графовских проблема: проблем максималног упаривања у графу.

Две гране графа су *независне* ако немају заједничких чворова. *Упаривање* је скуп грана такав да су сваке две независне. У формалном запису, то је скуп $M = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\} \subset E$ такав да је $e_i \cap e_j = \emptyset$ за све $i \neq j$.

Нека је G граф са скупом чворова $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и скупом грана $E = \big\{\{0, 2\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\big\}$ (сл. 1). Тада је $M = \big\{\{0,2\}, \{1,4\}, \{5,6\}\big\}$ (подебљане гране) једно упаривање у G.



Сл. 1.

За дати граф G и дато упаривање M у њему, уводимо неколико нових појмова које ћемо касније користити.

Чвор v је *упарен* у M уколико је крај неке гране из M. У противном, v је *неупарен* у M. На пример, у горњем графу чвор 5 је упарен у наведеном упаривању M, док чвор 3 није.

Упаривање M је *максимално* уколико је $|M| \geq |M'|$, за свако друго упаривање M'. ($|M|$ означава број грана у упаривању M.) *Савршено* или *перфектно упаривање* је упаривање у којем је сваки чвор графа G упарен. На пример, у графу горе, упаривање M није максимално, док је упаривање $M' = \big\{\{0,4\}, \{1,7\}, \{2,3\}, \{5,6\}\big\}$ савршено. Очигледно, свако савршено упаривање је максимално, а обратно не мора да важи.

Нека је M упаривање у графу G. За пут $P = v_1 v_2 \ldots v_k$ графа G кажемо да *наизменични* или *алтернирајући* с обзиром на M ако за његове гране важи: $v_1v_2 \in M$, $v_2v_3 \notin M$, $v_3v_4 \in M$, $v_4v_5 \notin M$, … или $v_1v_2 \notin M$, $v_2v_3 \in M$, $v_3v_4 \notin M$, $v_4v_5 \in M$, … . Такав пут још зовемо M-*наизменични* или M-*алтернирајући*. Пут $2-0-4-1-7$ је један M-*наизменични* пут у графу на сл. 1.

Повећавајући пут с обзиром на упаривање M или M-повећавајући пут је M-*наизменични* пут чији крајњи чворови нису упарени M. Очигледно, сваки повећавајући пут је непарне дужине. У графу на сл. 1, пут $3-2-0-4-1-7$ је M-повећавајући.

Проблем максималног упаривања је проблем налажења максималног упаривања у датом графу. Проблем је решен за општи случај. Едмондсов алгоритам, чија је сложеност $O(|E||V|^2)$, налази максимално упаривање за произвољан граф. Међутим, алгоритам је преопширан за овај чланак. Ми ћемо се искључиво бавити овим проблемом у тзв. бипартитим графовима.

Граф G је *бипартитан* ако се његов скуп чворова може поделити на два непразна дисјунктна подскупа (црни и бели чворови) тако да свака грана графа G спаја један црни и један бели чвор.

Можемо видети да се у великом броју практичних проблема у којима се јавља проблем упаривања, појављују управо бипартитни графови. На пример, проблем расподеле послова (job assignment), проблем формирања брачних парова (marriage problem) итд.

Испоставља се да се у бипартитним графовима, проблем максималног упаривања знатно лакше и брже решава.

Бержова теорема

Ово тврђење које потиче од француског граф-теоретичара Бержа је клучно за испитивања максималних упаривања.

Теорема. (Берж 1957) *Упаривање A је максимално у графу G ако и само ако у G не постоји A-повећавајући пут.*

Доказ. ($\Leftarrow$) Прво ћемо доказати да уколико не постоји A-повећавајући пут, тада је упаривање A максимално. Нека је кардиналност упаривања A једнака k, тј. $|A| = k$

Претпоставимо супротно. Тада постоји максимално упаривање B такво да је $|B| = m > k$. Посматрајмо сада подграф G' графа G индукован скупом грана које су у тачно једном од упаривања A и B. Како упаривање чине независне гране, из сваког чвора графа G' излази тачно једна грана (из A или из B) или тачно две гране (једна из A и једна из B). Дакле, степен сваког чвора у G' је 1 или 2. За такве графове важи следеће тврђење чији доказ остављамо читаоцима за вежбу.

Лема. *Ако је степен сваког чвора графа* G 1 *или* 2, *тада је свака компонента повезаности графа* G *пут или циклус.*

□

Из ове леме следи да су компоненте графа G' наизменични путеви или наизменични циклус. Наизменични циклуси су, очигледно, парних дужина, па садрже једнак број грана из упаривања A и B. Исто важи за путеве парне дужине. Остају путеви непарних дужина. Сваки од њих почиње и завршава се гранама из истог упаривања, A или B. Како је $m > k$, постоји бар један пут који почиње и завршава се гранама из B. Међутим, тај пут је A-повећавајући, што је супротно претпоставци.

($\Rightarrow$) Докажимо сад да ако је упаривање A максимално у G, тада G не садржи A-повећавајући пут.

Претпоставимо да G садржи A-повећавајући пут

$$P = v_1 v_2 v_3 v_4 \dots v_{2k-1} v_{2k}.$$

Ако са e_i, $i = 1, 2, \dots, 2k-1$, означимо грану $\{v_i, v_{i+1}\}$, тада $e_1 \notin A$, $e_2 \in A$, $e_3 \notin A$, … , $e_{2k-2} \in A$, $e_{2k-1} \notin A$. Посматрајмо скуп грана

$$C = A \setminus \{e_2, e_4, \dots, e_{2k-2}\} \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{2k-1}\}.$$

Очигледно је $|C| = |A| + 1$. С друге стране, лако се види да су сваке две гране из C независне. Према томе, C је упаривање у G које има једну грану више од A, што је у контрадикцији са максималношћу A.

□

Бержову теорему ћемо користити у конструкцији првог полиномног алгоритма за налажење највећег упаривања у бипартитном графу.

Упаривање у бипартитном графу

Нека је A упаривање у бипартитном графу G. Приказаћемо алгоритам који у сложености $O(|E|)$ проверава да ли у G постоји A-повећавајући пут.

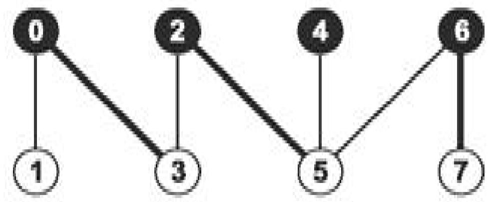
Нека је S скуп свих неупарених чворова једне боје (нпр. беле). Сада из њих колективно можемо да пустимо алгоритам DFS (претрага графа по дубини). Граф G претражујемо на следећи начин:

– ако смо у црном чвору, онда наш следећи корак у претрази мора да буде ка белом чвору кроз грану из упаривања A;

– ако смо у белом чвору, можемо ићи у дубину по било којој грани која није из упаривања A.

Ако у неком тренутку стигнемо до било ког неупареног црног чвора, то значи да смо нашли A-повећавајући пут. На овај начин ћемо сваку грану обићи највише једном (код претрага графа у дубину никад не улазимо у чворове у којима смо већ раније били), па је сложеност оваквог процеса једнака $O(|E| + |V|)$.

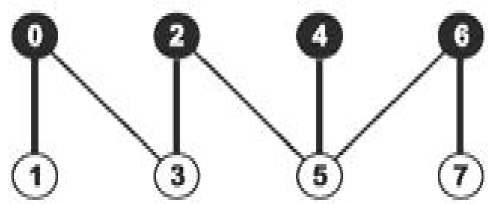
Ево једног конкретног примера. Нека је G бипартитан граф са сл. 2 и нека је $A = \{\{0,3\}, \{2,5\}, \{6,7\}\}$ (подебљане гране) једно упаривање у G.



Сл. 2.

Пошто је чвор 1 једини неупарени бели чвор, претрагу у дубину почињемо само из њега. Идемо гранама $\{1,0\}$, $\{0,3\}$, $\{3,2\}$, $\{2,5\}$ до белог чвора 5. Одатле можемо наставити било којом од грана $\{5,4\}$ и $\{5,6\}$. Ако наставимо граном $\{5,6\}$, и потом граном $\{6,7\}$, не наилазимо ни на један неупарен чвор. Међутим, претрагом кроз грану $\{5,4\}$ наилазимо на неупарени црни чвор 4. То смо смо нашли A-повећавајући пут $1 - 0 - 3 - 2 - 5 - 4$.

Сходно Бержовој теореми, добијамо веће упаривање
$B = \{\{0,1\}, \{2,3\}, \{5,4\}, \{6,7\}\}$ (сл. 3).



Сл. 3.

Примењујући исти алгоритам на упаривање B констатујемо да не постоји B-повећавајући пут у G. На основу Бержове теореме, B је максимално упаривање.

У општем случају, наведени алгоритам се понавља док год постоји повећавајући пут и док год повећавајући пут постоји, овај алгоритам ће га наћи. Тако добијамо нови алгоритам који ради у сложености
$O(VelicinaUparivanja * |E|)$, што је $O(|V| \cdot (|E| + |V|))$.

ПИТАЊЕ. Зашто овај алгоритам не ради за небипартитне графове?

Алгоритам Хопкрофта и Карпа

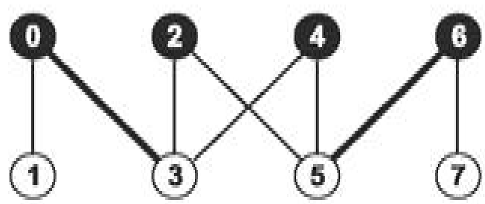
Сада ћемо представити алгоритам који ради у бољој сложености од претходног. Представља надоградњу претходног, као и доказа Бержове теореме.

Процес рада самог алгоритма је јако сличан претходном. Разликује се у томе што се користи BFS (претрага по ширини), уместо DFS (претрага по дубини). То значи да ће сви неупарени бели чворови бити на дубини 0. Сви њихови суседи су на дубини 1. Сви суседи тих чворова у које води грана из упаривања су на дубини 2 и тако даље. Процес претраге по дубини се прекида кад на некој дубини нађемо неупарени црни чвор. Нека је то дубина k.

Сада посматрамо све неупарене црне чворове на дубини k. Ово значи да постоји повећавајући пут дужине тачно k. Сада ћемо из неупарених белих чворова пуштати претрагу по дубини и узимати дијскунтне повећавајуће путеве дужине k докле можемо. То значи да ћемо пуштати претрагу у дубину из сваког неупареног белог чвора, при чему ћемо увек повећавати дубину и нећемо улазити ни у један чвор више од једном. Кад нађемо те путеве, у сваком од њих ћемо извршити промену грана као у Бержовој теореми. Тако ћемо величину упаривања повећавати за по 1.

Како ниједан чвор нисмо прошли двапут, временска сложеност је $O(|E| + |V|)$, како за прву претрагу по ширину тако и за даљу по дубини. Овај процес ћемо понављати све док год налазимо повећавајуће путеве.

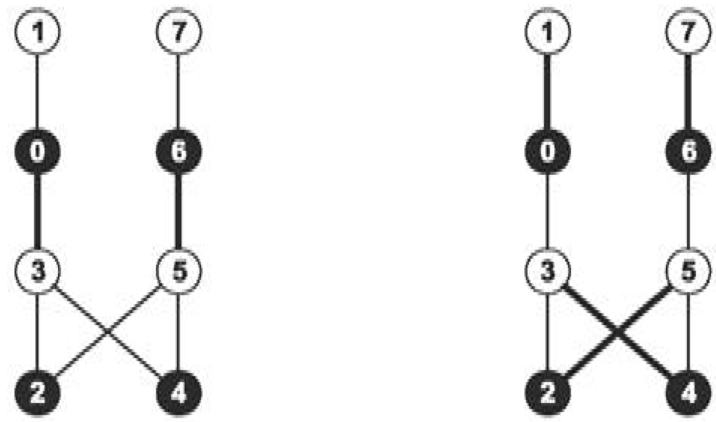
Ево илустрације овог алгоритма. Нека је G бипартитан граф на сл. 4 и нека је $A = \{\{0,3\}, \{6,5\}\}$ (подебљане гране) једно упаривање у G.



Сл. 4.

Видимо да су на дубини 0 неупарени бели чворови 1 и 7. По алгоритму, на дубини 1 су црни чворови 0 и 6, на дубини 2 бели чворови 3 и 5 и на дубини 3 црни чворови 2 и 4 (сл. 5(а)). Како смо нашли неупарене црне чворове на дубини 3, престајемо са са претрагом у ширину. У овом случају смо обишли цео граф, али то не мора увек да се деси. Сада из сваког чвора на дубини нула радимо претрагу у дубину, слично претходном алгоритму, и налазимо повећавајуће путеве $1-0-3-4$ и $7-6-5-2$.

Више не постоји могућности даље претраге јер смо истражили све гране. Стога у два добијена повећавајућа пута извршимо замену грана (сл. 5(б)) и тако повећамо укупну кардиналност упаривања за 2.



(а) (б)

Сл. 5.

Видимо да у свакој итерацији повећавамо величину упаривања за бар 1. Ако овај алгоритам понављамо докле год постоји повећавајући пут, временска сложеност ће бити боља од претходне или ће јој бити једнака. Међутим, испоставља се да је знатно боља. То се дешава јер у свакој итерацији која ради у сложености $O(|E| + |V|)$ можемо да нађемо велик број повећавајућих путева. Приметимо још, да у свакој итерацији овог алгоритма не повећавамо само величину упаривања, већ и *дужину најкраћег повећавајућег пута*. Наиме, у једној итерацији узимамо путеве дужине k докле год постоје, да би у следећој итерацији сваки повећавајући пут био дужине бар $k + 1$. Из тога следи да ће после $\sqrt{|V|}$ корака сваки повећавајући пут бити дужине бар $\sqrt{|V|}$. У том тренутку посматрамо, као и у доказу Бержове теореме, скуп грана који се појављује у тачно једном од упаривања, нашег и максималног упаривања. Наше упаривање треба да поправимо за онолико колико у том скупу постоји путева који имају непарнан број грана, са више грана из максималног упаривања (скупа B из доказа Бержове теореме). Лако се види да је сваки од тих путева увећавајући пут и да су они сви међусобно дисјунктни. Како је сваки повећавајући пут дужине барем $\sqrt{|V|}$, њихов укупан број је највише $\frac{|V|}{\sqrt{|V|}} = \sqrt{|V|}$. То значи да наше упаривање треба да поправимо за највише $\sqrt{|V|}$. То даље повлачи да ако поновимо итерације овог алгоритма још $\sqrt{|V|}$ пута, наћи ћемо највеће упаривање. Све у свему, алгоритам смо итерирали највише $\sqrt{|V|} + \sqrt{|V|} = 2\sqrt{|V|}$ пута што значи да цео алгоритам ради у временској сложености $O((|E| + |V|)\sqrt{|V|})$.

Ова оцена није увек оштра и за многе фамилије графова алгоритам ради знатно боље. На пример, за тзв. ретке графове (у којима је број грана близак броју чворова) очекивана сложеност је $O(|E|log|V|)$.

Поплочавање доминама

За крај ћемо представити један проблем који може ефикасно да се реши путем упаривања.

Дата је правоугаона табла $m \times n$ (сл. 6(а)) у којој су нека поља забрањена (означена са ×). Циљ је да се на таблу постави највећи могући број непреклапајућих домина, при чему свака домина заузима два незабрањена поља која имају заједничку страницу.

(а) (б)

Сл. 6.

Ако таблу обојимо као шаховску (сл. 6(б)), можемо јој придружити бипартитан граф G на следећи начин. Чворови су незабрањена поља, а два чвора су суседна ако одговарајућа поља имају заједничку страницу. Белим пољима одговарају бели чворови, а црним црни чворови. Граф G је очигледно бипартитан јер су суседи белих чворова искључиво црни и обратно. Тако бипартитан граф који одговара табли са сл. 6(б) има 7 белих и 6 црних чворова.

Свака домина покрива једно бело и једно црно поље, што одговара грани графа G. Како су домине непреклапајуће, одговарајуће гране су једно упаривање у G. Стога, највећи могући број непреклапајућих домина одговара максималном упаривању у G, па можемо применити алгоритам Хопкрофт-Карпа.

Додајмо да граф G има највише mn чворова и да је степен сваког чвора највише 4. Ако са V означимо број чворова, тада је број грана највише $2V$, те граф G спада у ретке. Из тога следи да ће Хопкрофт-Карпов алгоритам радити у очекиваној сложености $O(mn * log(mn))$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2019/20 година