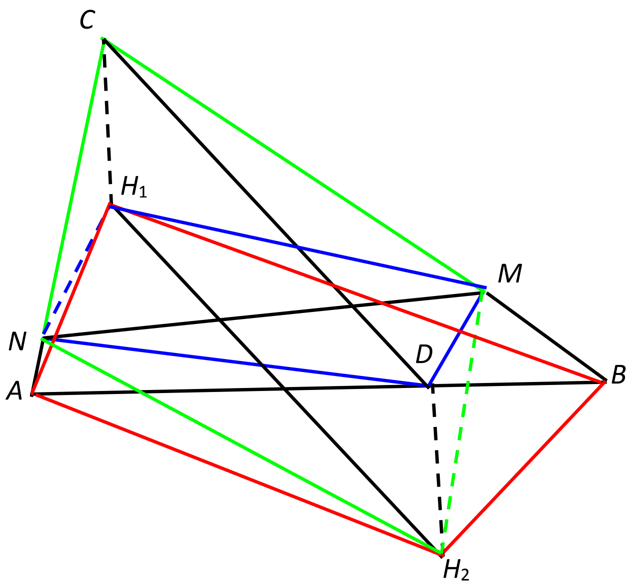
VIII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2012

17 января 2012 года, 9.00–13.30
Первый день

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть $D\in AB$, $DM\perp BC$ ($M\in BC$) и $DN\perp AC$ ($N\in AC$). Докажите, что площадь четырехугольника AH_1BH_2 не зависит от положения точки D на стороне AB, где H_1 и H_2 ортоцентры треугольников MNC и MND соответственно.



Решение. Поскольку $NH_1\perp BC$ (высота) и $DM\perp BC$ (по условию), то $NH_1 \| DM$. А также $MH_1\perp AC$ (высота) и $DN\perp AC$ (по условию). Таким образом, $MH_1 \| DN$ и, следовательно, $NDMH_1$ – параллелограмм. Аналогично можно показать, что $NCMH_2$ является параллелограммом и, следовательно, $CN=MH_2$.

С другой стороны, $CH_1\perp MN$ и $DH_2\perp MN$, отсюда $CH_1 \| DH_2$. Значит, стороны треугольника CNH_1 параллельны сторонам треугольника H_2MD и $CN=MH_2$, следовательно, треугольники CNH_1 и H_2MD равны. Таким образом, $CH_1=DH_2$, отсюда вместе с тем, что $CH_1 \| DH_2$ имеем CH_1H_2D – параллелограмм. Следовательно, $H_1H_2=CD$.

Положим $\phi=\angle ADC$, тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot sin\phi$ и, наконец,

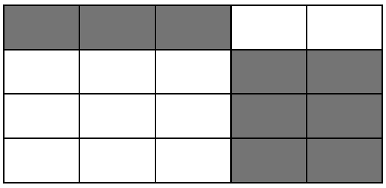
$$S_{AH_1BH_2}=\frac{1}{2}AB\cdot H_1H_2sin\phi=\frac{1}{2}AB\cdot CDsin\phi=S_{ABC},$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Множество клеток таблицы $n\times n$ назовем *удобным*, если в каждой строке и каждом столбце таблице есть по крайне мере две клетки этого множества. При каждом $n\geq 5$ найдите наибольшее m, для которого найдется удобное множество из m клеток, которое перестает быть удобным при удалении любой из его клеток.

Ответ: $4n–8$.

Решение. Пример удобного множества может быть построен так:



Множество S состоит из всех клеток двух строк и всех клеток двух столбцов, кроме клеток, лежащих на пересечении этих строк и столбцов.

Докажем, что $m \leq 4n-8$.

Пусть S – множество клеток, удовлетворяющее условию задачи.

Назовем линию (строку или столбец) *редкой*, если в ней содержится только две клетки из S. Очевидно, что любая клетка из S принадлежит редкому столбцу или редкой строке, иначе эту клетку можно было бы удалить из S, и набор клеток остался бы удобным. Поэтому любая клетка из S принадлежит редкой линии. Следовательно, общее количество элементов S не превосходит удвоенного количества редких линий. Если и количество редких строк, и количество редких столбцов не больше $n-2$, то в S не больше $2(n-2+n-2)=4n-8$ клеток. Если количество редких линий одного направления, скажем, строк, равно n, то количество всех клеток в S равно $2n<4n-8$. Наконец, если количество редких линий одного направления, например, строк, равно $n-1$, а количество редких линий другого направления не больше $n-1$, то общее количество клеток в S не превосходит $2(n-1)+n-1=3n-3 \leq 4n-8$, что и требовалось доказать.

Задача 3. Многочлены P, Q, R с вещественными коэффициентами таковы, что $P(Q(x))+P(R(x))=const$. Докажите, что $P(x)=const$ или $Q(x)+R(x)=const$.

Решение. Предположим, что $P(x) \neq const$. Заменяя, если нужно, многочлен $P(x)$ многочленом $P(-x)$, мы можем считать, что старший коэффициент многочлена Q положителен. Точно так же мы можем считать, что положителен старший коэффициент многочлена P. Тогда при достаточно больших x многочлен P возрастает и принимает сколь угодно большие по величине положительные значения. Следовательно, сколь угодно большие положительные значения принимает $P(Q(x))$, тогда $P(R(x))$ при больших x принимает отрицательные значения. Поэтому степень P нечётна.

Лемма. *Для каждого многочлена P многочлен нечётной степени существует такое c_0, что для $c>c_0$ многочлен $P(x)+P(c-x)$ неограниченно возрастает при положительных x, а для $c<c_0$ многочлен $P(x)+P(c-x)$ неограниченно убывает при положительных x.*

Доказательство. Пусть a_{2k+1} и a_{2k} – старшие коэффициенты многочлена P:

$$P(x)=a_{2k+1}x^{2k+1}+a_{2k}x^{2k}+\ldots$$

Тогда, отбрасывая члены степени ниже $2k$, находим

$$P(x)+P(c-x)=a_{2k+1}x^{2k+1}+a_{2k}x^{2k}+\ldots-a_{2k+1}x^{2k+1}+(2k+1)cx^{2k}+\ldots+a_{2k}x^{2k}+\ldots=(a_{2k}+(2k+1)c)x^{2k}+\ldots,$$

то есть при $c > c_0 = -\frac{a_{2k}}{2k+1}$ многочлен $P(x)+P(c-x)$ имеет положительный старший коэффициент, а при $c<c_0$ – отрицательный, откуда и следует утверждение леммы.

Предположим теперь, что многочлен $Q(x)+R(x)$ – непостоянный. Тогда при всех достаточно больших $x>0$ либо всегда $Q(x)+R(x)>c>c_0$, либо всегда $Q(x)+R(x)<c<c_0$. Осталось заметить, что при достаточно больших по модулю x многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ возрастают, поэтому в первом случае $P(Q(x))+P(R(x))>P(Q(x))+P(c-Q(x))$ неограниченно возрастает, а во втором $P(Q(x))+P(R(x))<P(Q(x))+P(c-Q(x))$ неограниченно убывает, что противоречит условию задачи.

Альтернативное решение. Пусть $P(x)\neq const$. Положим

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x + a_n,$$

где $n \geq 1$. Тогда

$$P(Q(x) + P\big(R(x)\big) = Q^n + a_1Q^{n-1}+\ldots+a_{n-1}Q + R^n + a_1R^{n-1}+\ldots+a_{n-1}R = c \qquad (1)$$

Если $deg\, Q \neq degR$, то для определенности, не теряя общности, положим $deg\, Q > degR$, отсюда,

$$1 + \frac{a_1}{Q}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{Q^{n-1}} + \frac{R^n}{Q^n} + a_1\frac{R^{n-1}}{Q^n}+\ldots = \frac{c}{Q^n}.$$

Последнее равенство невозможно, потому что при x стремящимся к бесконечности левая часть этого равенства стремится к 1, а правая – к нулю. Следовательно, $deg\, Q = degR$, и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a_1}{Q}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{Q^{n-1}} + \frac{R^n}{Q^n} + a_1\frac{R^{n-1}}{Q^n}+\ldots\right) = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\frac{c}{Q^n} = 0,$$

где a, b старшие коэффициенты R, Q соответсвенно. Отсюда следует, что число n нечетно и $b = -a$. Значит,

$$Q(x) = ax^l + Q_1(x), R(x) = -ax^l + R_1(x),$$

где

$$l = deg\,Q = degR, degQ_1 < l, degR_1 < l.$$

Перепишем (1) в следующем виде

$$(Q+R)(Q^{n-1} - Q^{n-2}R + \cdots - QR^{n-2} + R^{n-1}) + a_1(Q^{n-1} + R^{n-1}) + \ldots - c = 0$$

или

$$(Q_1+R_1)(Q^{n-1} - Q^{n-2}R + \ldots - QR^{n-2} + R^{n-1}) + a_1(Q^{n-1} + R^{n-1}) + \ldots - c = 0. \quad (2)$$

Рассматривая суммы вида $(-1)^{k-1}Q^{n-k}R^{k-1}$ во второй скобке, имеем, что $(-1)^{k-1}a^{n-k}(-a)^{k-1}x^{l(n-1)} = a^{n-1}x^{l(n-1)}$. Далее, старший коэффициент многочлена $a_1(Q^{n-1} + R^{n-1})$ равен $a_1 \cdot 2a^{n-1}$. Таким образом, из равенства (2) следует, что

$$(Q_1+R_1)\left(na^{n-1}x^{l(n-1)} + b_1x^{ln-l-1} + b_2x^{ln-l-2} + \cdots\right) +$$

$$+a_1 \cdot 2a^{n-1}x^{l(n-1)} + c_1x^{ln-l-1} + c_2x^{ln-l-2} + \ldots + \ldots - c = 0,$$

что невозможно, если $(Q_1+R_1)na^{n-1} \neq a_1 \cdot 2a^{n-1}$. Значит,

$$Q_1 + R_1 = -\frac{2a_1}{n} \text{ и } Q(x) + R(x) = -\frac{2a_1}{n} \text{ является постоянной.}$$

VIII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2012

18 января 2012 года, 9.00–13.30
Второй день

Задача 4. Существуют ли целые числа *m*, *n* и функция *f*: $R \to R$, одновременно удовлет-воряющие следующим двум условиям (здесь *R* обозначает множество действительных чисел):

i) $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$ для любого $x \in R$;

ii) $m \le n$ и $f(m) = n$?

Ответ: таких m, n, f не существует.

Решение. Пусть дана функция $f: R \to R$ такая, что

$$f\big(f(x)\big) = 2f(x) - x - 2, \forall x \in R \qquad (3).$$

Докажем, что не существует таких m, k, что $k \geq 0$ и

$$f(m) = m + k \qquad (4)$$

Предположим противоположное.

1. Пусть сперва $k = 0$, тогда (4) запишется в виде $f(m) = m$. Положим $x = m$ в равенстве (3), тогда $m = f(m) = f\big(f(m)\big) = 2f(m) - m - 2 = 2m - m - 2$, или $m = m - 2$, что невозможно.
2. Пусть теперь $k = 1$, тогда имеем

$$f(m) = m + 1 \;\; \to \;\; f(m+1) = f\big(f(m)\big) = 2f(m) - m - 2 = 2(m+1) - m - 2$$

или

$$f(m+1) = m.$$

Однако

$$m + 1 = f(m) = f\big(f(m+1)\big) = 2f(m+1) - (m+1) - 2 = 2m - m - 3 = m - 3,$$

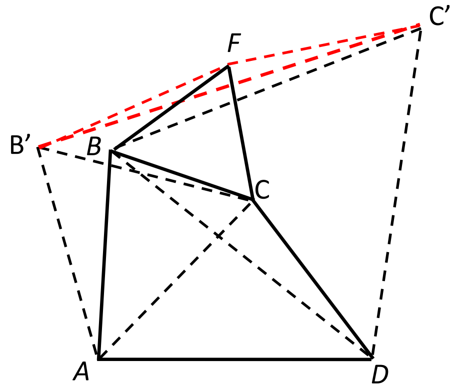
то есть пришли к противоречию.

Предположим, что для некоторого $k \geq 2$ существует m такое, что равенство (4) верно. Выберем наименьшее возможное число из таких k. Имеем

$$f(m) = m + k \; \to f(m+k) = f\big(f(m)\big) = 2f(m) - m - 2 = 2(m+k) - m - 2 = (m+k) + (k-2).$$

Обозначим $m_1 = m + k,\; k_1 = k - 2,$ тогда $f(m_1) = m_1 + k_1$. Это противоречит минимальности k, если $k_1 \geq 2$. Но если $k_1 < 2$, то $k_1 = 0$ or $k_1 = 1$, которые также невозможны. Что и требовалось доказать.

Задача 5. На диагоналях выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ACB' и BDC', причем точки B и B' лежат по одну сторону от AC, а точки C и C' лежат по одну сторону от BD. Найдите $\angle BAD + \angle CDA$, если известно, что $B'C' = AB + CD$.



Решение. Построим равносторонний треугольник BCF, как показано на чертеже. Тогда $\angle FBC = 60^0 = \angle C'BD$ и следовательно $\angle FBC' = \angle CBD$. Так как $BF = BC$ и $BC' = BD$, имеем $\Delta BFC' \cong \Delta BCD$. Откуда $FC' = CD$ и $\angle BFC' = \angle BCD$. Аналогично, $B'F = AB$ и $\angle B'FC = \angle ABC$. Из равенства $B'C' = AB + CD$ следует равенство $B'C' = B'F + FC'$ значит точка F лежит на отрезке $B'C'$. Но тогда $\angle B'FC + \angle BFC' = 180^0 + \angle BFC = 240^0$. Получаем, что $\angle BCD + \angle ABC = \angle BFC' + \angle B'FC = 240^0$ и, следовательно, $\angle BAD + \angle CDA = 120^0$.

Задача 6. Найдите все целочисленные решения уравнения: $2x^2 - y^{14} = 1$.

Ответ: $x=\pm1$, $y=\pm1$.

Решение. Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. *Если $a>1$ – целое число, то $a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1$ не является квадратом целого числа*.

Доказательство. Если $a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1$ – точный квадрат, то

$$256(a+1)^2(a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1)=256(a^8+a^7+a+1)$$

– также точный квадрат, что невозможно, так как при $a\geq3$ имеем

$$(16a^4+8a^3-2a^2+a-1)^2<256(a^8+a^7+a+1)<(16a^4+8a^3-2a^2+a)^2$$

а при $a=2$ имеем $a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1=43$.

Лемма 2. *Если a – целое число, то* $(a+1,\ a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1)$ *равно* 1 *или* 7.

Доказательство. Разность

$$a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1-7=(a^6-1)-(a^5+1)+(a^4-1)-(a^3+1)+(a^2-1)-(a+1)$$

делится на $a+1$, поэтому, если $(a+1, a^6–a^5+a^4–a^3+a^2–a+1)=d$, то 7 делится на d.

Возвращаясь к решению задачи, находим

$$2x^2=(y^2+1)(y^{12}–y^{10}+y^8–y^6+y^4–y^2+1).$$

Так как y^2+1 не кратно 7 при целых y, согласно лемме 2

$$(y^2+1, y^{12}–y^{10}+y^8–y^6+y^4–y^2+1)=1,$$

поэтому одно из этих двух чисел – квадрат, а другое – удвоенный квадрат. Но число $y^{12}–y^{10}+y^8–y^6+y^4–y^2+1$ нечетно, и, следовательно, $y^{12}–y^{10}+y^8–y^6+y^4–y^2+1=v^2$. По лемме 1 $y^2\leq 1$, значение $y=0$ не удовлетворяет условию, следовательно, $y=\pm 1$ и $x=\pm 1$.

Альтернативное решение. Имеем

$$2x^2=(y^2+1)(y^{12}–y^{10}+y^8–y^6+y^4–y^2+1).$$

Если сомножители имеют общий делитель d, то $y^2\equiv -1 (mod\ d)$ и

$$0\equiv y^{12}–y^{10}+y^8–y^6+y^4–y^2+1 \equiv(–1)^6–(–1)^5+(–1)^4–(–1)^3+(–1)^2–(–1)+1\equiv 7\ (mod\ d)$$

откуда $7|d$, С другой стороны, y^2+1 не делится на 7 при целых y, поэтому сомножители взаимно просты. Отсюда следует, что один из сомножителей – квадрат, а другой – удвоенный квадрат. Первый сомножитель y^2+1 может быть квадратом только при $y=0$, что невозможно. Поэтому квадратом является

$$y^{12}–y^{10}+y^8–y^6+y^4–y^2+1=t^6–t^5+t^4–t^3+t^2–t+1,$$

где $t=y^2$. С другой стороны, при $t\geq 4$

$$\left(t^3-\frac{t^2}{2}+\frac{3t}{8}-\frac{5}{16}\right)^2<t^6-t^5+t^4-t^3+t^2-t+1<\left(t^3-\frac{t^2}{2}+\frac{3t}{8}-\frac{1}{4}\right)^2,$$

раскрывая скобки, получаем

$$t^6-t^5+t^4-t^3+\frac{29}{64}t^2-\frac{15}{64}t+\frac{25}{256}<t^6-t^5+t^4-t^3+t^2-t+1<$$

$$< t^6 - t^5 + t^4 - \frac{7}{8}t^3 + \frac{25}{64}t^2 - \frac{3}{16}t + \frac{1}{16},$$

что эквивалентно неравенствам $\frac{35}{64}t^2 - \frac{49}{64}t + \frac{231}{256} > 0$ и $\frac{t^3}{8} - \frac{39}{64}t^2 + \frac{13}{16}t - \frac{15}{16} > 0$, первое из которых имеет место всегда, а второе – при всех $t \geq 4$.

Таким образом, при $t \geq 4$ выражение $t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ заключено между квадратами двух последовательных дробей со знаменателем 16, следовательно, не может быть квадратом целого числа. Поэтому $t = y^2 < 4$. Из оставшихся возможных значений y условию задачи удовлетворяют только $y = 1$ и $y = -1$.