Илија Јанев

МЕТОД НА НЕОДРЕДЕНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Некои математички задачи се решаваат многу едноставно, додека обратното барање понекогаш претставува непремостива пречка. На сите ни е јасно дека квадрирањето е многу полесно, одколку коренувањето, кубирањето секој од нас лесно го извршува, додека барањето кубен корен многумина од нас веќе го заборавиле. Слично, множењето на два полинома не претставува посебна тешкотија, додека обратната задача - разложувањето на множители е далеку посложено. Секој од нас може лесно и брзо да ја одреди разликата на дропките $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{k+1}$, и ќе добие $\frac{1}{k^2+k}$. Но, да се запрашаме колкумина од нас би ја решиле обратната задача: да ја претставиме дропката $\frac{1}{k^2+k}$ како збир на две дропки. Очигледно, оваа задача е посложена и е "нестандардна".

Оваа и слични на неа задачи се решаваат со т.н. **метод на неодредени коефициенти**. Тој се базира на теоремата за идентични полиноми: *Два полинома се идентични, ако и само ако им се еднакви соодветните коефициенти.*

Методот на неодредени коефициенти се употребува тогаш, кога во резултатот при трансформирањето на даден израз се добива друг израз од познат вид со коефициенти кои треба да се одредат. Да го покажеме тоа на конкретни примери.

Пример 1. Подреди го полиномот $2x^3+5x^2+3$ по степените на $x+1$.

Решение. Треба да одредиме полином $P(x+1)$, таков што ќе биде идентичен на дадениот. Притоа, полиномот $P(x+1)$ ќе биде од трет степе, т.е.

$$P(x+1)=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D\,,$$

чии неодредени коефициенти A, B, C и D треба да ги одредиме, така што да важи идентитетот:

$$A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D\equiv 2x^3+5x^2+3. \tag{1}$$

Прво левата страна на идентитетот ја подредуваме по степените на x и добиваме:

$$Ax^3+(3A+B)x^2+(3A+2B+C)x+A+B+C+D\equiv 2x^3+5x^2+0\cdot x+3\,.$$

Изедначувајќи ги коефициентите пред соодветните членови го добиваме системот:

$$\begin{cases} A=2 \\ 3A+B=5 \\ 3A+2B+C=0 \\ A+B+C+D=3\,, \end{cases}$$

од каде што: $A=2,\ B=-1,\ C=-4,\ D=6$. Следствено,

$$P(x+1)=2(x+1)^3-(x+1)^2-4(x+1)+6\,.$$

Да забележиме дека од идентитетот (1) можевме веднаш да го одредиме главниот коефициент A, со што би се упростила постапката за одредување на останатите коефициенти.

Равенките за одредување на коефициентите можеме да ги добиеме и на друг начин - со давање на одредени вредности на аргументот x.

Да го покажеме тоа на истиот пример. Значи, треба да важи идентитетот:

(2) $$2(x+1)^3 + A(x+1)^2 + B(x+1) + C \equiv 2x^3 + 5x^2 + 3.$$

За одредување на коефициентите A, B и C во (2) заменуваме:

за $x=-1$ и добиваме: $C = -2+5+3$

за $x=1$ и добиваме: $16+4A+2B+C = 2+5+3$

за $x=0$ и добиваме: $2+A+B+C = 3$,

од каде што: $C=6$, $A=-1$, $B=-4$.

Значи, $P(x+1) = 2(x+1)^3 - (x+1)^2 - 4(x+1) + 6$.

Пример 2. Со методот на неодредени коефициенти изведи ја формулата за куб на трином.

Решение. Бидејќи $(x+y+z)^3$ е симетричен полином од трет степен со три променливи, имаме:

(3) $$(x+y+z)^3 = A\left(x^3+y^3+z^3\right) + B\left(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y\right) + Cxyz,$$

каде што A, B и C се бараните коефициенти.

Очигледно е дека $A=1$ (Зошто? Инаку до тој резултат се доаѓа ако во (3) ставиме: $x=1$, $y=z=0$.). Понатаму: за $x=y=1$, $z=0$ добиваме: $8=2A+2B$; од тука $B=3$, за $x=y=z=1$ добиваме: $27=3A+6B+C$; од тука $C=6$.

Следствено,

$$(x+y+z)^3 = x^3 = y^3 + z^3 + 3\left(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2\right) + 6xyz.$$

Посебно голема примена на методот на неодредени коефициенти имаме кај рационалните функции $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ при нивното разложување на прости дропки.

Се докажува дека: ***секоја правилна рационална функција може да се претстави на единствен начин како збир од прости дропки***.

Тоа разложување зависи од видот на корените на полиномот $Q(x)$. Ако $Q(x)$ има само реални и различни корени, т.е. ако $Q(x) = (x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)$, тогаш разложувањето на правилната нескратлива дропка е следното:

(*) $$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{C}{x-c}, \quad A\cdot B\cdots C \neq 0.$$

Ако при тоа некој од корените, на пример коренот a, е сложен од k-ти ред, тогаш наместо простата дропка $\dfrac{A}{x-a}$ во (*), ќе го имаме збирот:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}, \quad A_k \neq 0.$$

Ако пак $Q(x)$ има конјугирано комплексни корени, тогаш во разложувањето се јавуваат прости дропки од видот:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad p^2-4q<0, \quad AB \neq 0.$$

Според изнесеното би имале, на пример:

$$\frac{5x-7}{(2x-1)\cdot(x+2)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2-3x+4}{(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Со неколку конкретни примени ќе ја образложиме примената на методот на неодредени коефициенти при разложувања на рационалните функции на прости дропки.

Пример 3. Разложи ја на прости дропки функцијата $f(x)=\frac{1}{4x^2-1}$.

Решение. Бидејќи $4x^2-1=(2x-1)\cdot(2x+1)$, имаме

$$\frac{1}{4x^2-1}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1} \qquad /\cdot(2x-1)\cdot(2x+1)$$

$$1=A(2x+1)+B(2x-1) \quad \text{т.е.} \quad 1=2(A+B)x+A-B$$

Изедначувајќи ги коефициентите пред соодветните степени на x, добиваме

$$O=A+B,\quad 1=A-B,$$

од каде што : $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, па значи

$$\frac{1}{4x^2-1}=\frac{1}{2(2x-1)}-\frac{1}{2(2x+1)}.$$

Пример 4. Пресметај го збирот

$$A=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{1995\cdot1997}$$

Решение. Користејќи го резулататот од претходниот пример, т.е. идентитетот

$$\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right],$$

имаме:

$$A=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1995}-\frac{1}{1997}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1997}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1996}{1997}=\frac{998}{1997}.$$

Ако дропката не е правилна, т.е. ако степенот на $P(x)$ е поголем од степенот на $Q(x)$ ($st\ P>st\ Q$), тогаш прво вршиме делење на $P(x)$ со $Q(x)$ и добиваме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

а потоа вршиме разложување на правилната дропка $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Пример 5. Функцијата $f(x)\frac{x^3+2}{x^2-3x+2}$ претстави ја како збир на прости рационални функции.

Решение. Бидејќи степенот на броителот е поголем од степенот на именителот, прво треба да извршиме делење; имаме:

$$\begin{array}{l}
(x^3+2):(x^2-3x+2)=x+3\\
\underline{\pm x^3\mp3x^2\pm2x\quad}\\
\quad 3x^2-2x+2\\
\underline{\quad\pm3x^2\mp9x\pm6\quad}\\
\qquad 7x-4
\end{array}$$

Значи добиваме: $\frac{x^3+2}{x^2-3x+2} = x+3+\frac{7x-4}{x^2-3x+2}$, каде што треба правилната

дропка $\frac{7x-4}{x^2-3x+2}$ да ја разложиме на прости дропки.

Од $x^2-3x+2=0$ добиваме $x=1$ и $x=2$, па имаме:

$$\frac{7x-4}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$7x-4 = (A+B)x - 2A - B$$

Со изедначување на коефициентите пред соодветните членови добиваме:

$$A+B=7 \quad \text{и} \quad -2A-B=-4; \quad \text{т.е.} \quad A=-3, \quad B=10.$$

Значи:

$$\frac{x^3+2}{x^2-3x+2} = x+3-\frac{3}{x-1}+\frac{10}{x-2}$$

Пример 6. Разложи ја на прости дропки функцијата .

$2x-10$

Решение. Бидејќи $x^4-1=(x^2-1)\cdot(x^2+1)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$, имаме:

$$\frac{2x-10}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2x-10 = A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + (Cx+D)\cdot(x^2-1)$$

$$= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + A-B-D$$

Со изедначување на коефициентите пред соодветните членови го добиваме системот равенки:

$$\begin{aligned} A+B+C&=0 \\ A-B+D&=0 \\ A+B-C&=2 \\ A-B-D&=-10, \end{aligned}$$

од каде што: $A=-2$, $B=3$, $C=-1$, $D=5$, па значи:

$$\frac{2x+10}{x^4-1} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{x-5}{x^2+1}.$$

Очигледно, многу полесно ќе беше ако требаше да ги собереме простите дропки на десната страна на последното равенство. Стори го тоа сам; така ќе извршиш проверка на резултатот.

На крајот ви нудиме неколку задачи за вежба.

1. Со примена на методот на неодредени коефициенти трансформирај го полиномот x^2+4x-3 во видот $(x-\alpha)^2+\beta$.

2. Подреди го полиномот x^3-3x^2+4 по степените $x-1$.

3. Разложи ја на прости дропки функцијата:

а) $\frac{25}{(x-2)\cdot(x+3)^2}$ б) $\frac{3x-7}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$

4. Пресметај го збирот:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$; б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$.

Одговори. **1.** $(x-2)^2-7$. **2.** $(x-1)^3-3\cdot(x-1)+2$ **3.** а) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}-\frac{5}{(x+3)^2}$

3. б) $\frac{1}{1-x}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{2x+5}{(x^2+1)^2}$ **4.** а) $\frac{n}{n+1}$ **4.** б) $\frac{n}{3n+1}$

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија