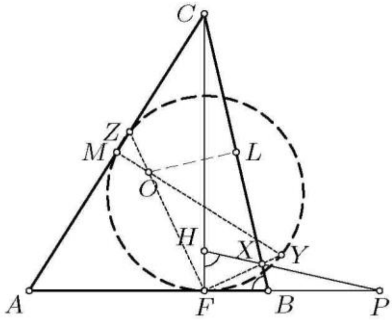
БМО 2008

1. Даден е разностран остроаголен триаголник ABC во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека O е центарот на опишаната кружница и H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека F е подножјето на висината повлечена од темето C. На правата AB е избрана точка P, различна од A, таква што $\overline{AF} = \overline{PF}$, а M е средината на страната AC. Нека X е пресекот на правите PH и BC, Y е пресекот на правите OM и FX, а Z е пресекот на правите OF и AC. Докажи, дека точките F, M, Y и Z лежат на иста кружница.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи $\measuredangle ZMY = 90^\circ$, доволно е да докажеме дека

$$\measuredangle ZFY = \measuredangle OFX = 90^\circ.$$



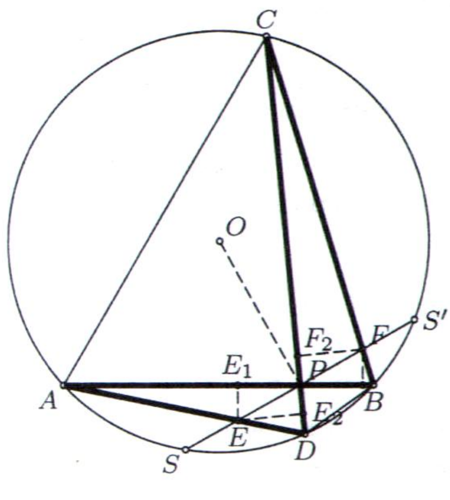
Нека X' е точка на страната BC таква што $\measuredangle OFX' = 90^\circ$ и нека L е средина на страната BC. Точките F и L се наоѓаат на кружницата k над дијаметар OX', а исто така и двете лежат на Ојлеровата кружница ω на триаголникот ABC, чиј центар K е средина на отсечката OH. Затоа FL како заедничка тетива на кружниците k и ω е нормална на JK, каде J е средината на OX'. Од $JK \parallel HX'$ следува дека $FL \perp HX'$. Оттука следува

$$\measuredangle FHX' = 90^\circ - \measuredangle CFL = 90^\circ - \measuredangle FCL = \measuredangle ABC = \measuredangle AHF = \measuredangle FHX,$$

па затоа $X \equiv X'$.

Втор начин. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Низ средината T на тетивата SS' на кружницата k се конструирани тетиви AB и CD, така што точките A и C се на иста страна на правата SS'. Нека AD и BC ја сечат SS' во точките E и F, соодветно. Тогаш $\overline{EP} = \overline{PF}$.

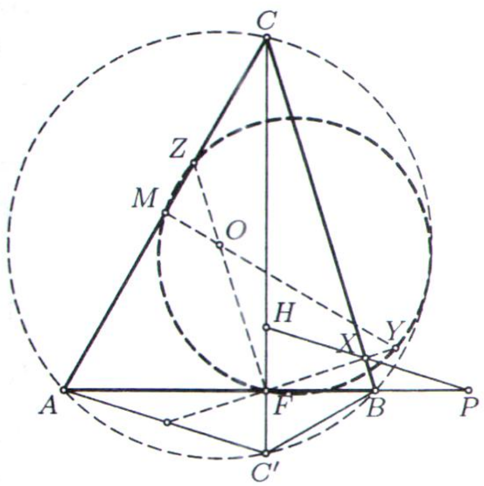


Доказ. Нека E_1 и E_2 се подножјата на нормалите од E на AB и CD, соодветно, а F_1 и F_2 се подножјата на нормалите од F на AB и CD, соодветно. Од $\triangle EPE_1 \sim \triangle FPF_1$

и $\triangle EPE_2 \sim \triangle FPF_2$ следува $\frac{\overline{EP}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{FF_1}}$ И $\frac{\overline{EP}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EE_2}}{\overline{FF_2}}$. Од $\triangle AEE_1 \sim \triangle CFF_2$ ($\measuredangle BAD = \measuredangle BCD$) и $\triangle DEE_2 \sim \triangle BFF_1$ ($\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$) следува $\frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{FF_2}}$ и $\frac{\overline{DE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{EE_2}}{\overline{FF_1}}$.

Бидејќи $\overline{SP} = \overline{SP'}$, користејќи го степенот на точките E и F добиваме

$$\left(\frac{\overline{EP}}{\overline{PF}}\right)^2 = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{FF_1}} \cdot \frac{\overline{EE_2}}{\overline{FF_2}} = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{FF_2}} \cdot \frac{\overline{EE_2}}{\overline{FF_1}} = \frac{\overline{AE}\cdot\overline{DE}}{\overline{CF}\cdot\overline{BF}} = \frac{\overline{SE}\cdot\overline{S'E}}{\overline{SF}\cdot\overline{SF}} = \frac{\overline{SP}^2-\overline{EP}^2}{\overline{SP}^2-\overline{FP}^2} = 1, \text{ т.е. } \overline{EP} = \overline{PF}. \ \blacksquare$$



Бидејќи $\measuredangle YMZ = \measuredangle OMC = 90^\circ$, доволно е да се докаже дека $\measuredangle YFZ = 90^\circ$, т.е. дека $OF \perp FX$.

Нека C' е втората пресечна точка на правата CF и кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Тогаш C' и H се симетрични во однос на F. Нека правата нормална на OF во точката F ги сече AC' и BC во точките T' и T, соодветно. Според лемата $\overline{FT'} = \overline{FT}$. Бидејќи A, T', C' се колинеарни, колинеарни се и точките P, T, H симетрични на овие точки во однос на точката F, односно точката T е пресечната точка на правите BC и PH. Според тоа, $T \equiv X$, па затоа $OF \perp FX$.

Трет начин. Нека ознаките се исти како во вториот начин на решавање. Нека α, β, γ се аглите на триаголникот во темињата A, B, C, соодветно, а R е радиусот на опишаната кружница. Доволно е да се докаже дека $OF \perp FX$, што следува од $\measuredangle OFA + \measuredangle XFP = 90^\circ$.

Навистина, ако C_1 е средина на страната AB, од $\triangle OFC_1$ (бидејќи $\overline{AC} > \overline{BC}$ важи $F - C_1 - A$) следува

$$\operatorname{tg}\measuredangle OFA = \operatorname{tg}\measuredangle OFC_1 = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{FC_1}} = \frac{R\cos\gamma}{\frac{c}{2} - a\cos\beta} = \frac{R\cos\gamma}{R\sin\gamma - 2R\sin\alpha\cos\beta}$$

$$= \frac{\cos\gamma}{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Исто така

$$1 = \frac{\overline{XP}}{\overline{XF}} \cdot \frac{\overline{XF}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{XC}}{\overline{XP}} = \frac{\sin\measuredangle XFP}{\sin\measuredangle FPX} \cdot \frac{\sin\measuredangle XCF}{\sin\measuredangle XFC} \cdot \frac{\sin\measuredangle XPC}{\sin\measuredangle PCX}$$

(теорема на Чева во тригонометриски облик за $\triangle CFP$ во точката X) и бидејќи

$\measuredangle XFC = 90^\circ - \measuredangle XFP$, $\measuredangle FPX = \measuredangle HAB = 90^\circ - \beta$ ($\triangle APH$ е рамнокрак),

$\measuredangle XCF = 90^\circ - \beta$, $\measuredangle PCX = 2\measuredangle FCA - \measuredangle BCA = 2(90^\circ - \alpha) - \gamma = \beta - \alpha$,

$\measuredangle XPC = \measuredangle ABC - \measuredangle XCF = \measuredangle HAC = 90^\circ - \gamma$ ($\triangle APC$ е рамнокрак),

следува дека

$$\operatorname{ctg} \measuredangle XFP = \frac{\sin \measuredangle XPC}{\sin \measuredangle PCX} = \frac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Според тоа, $\operatorname{tg} \measuredangle OFA = \operatorname{ctg} \measuredangle XFP$, па затоа $\measuredangle OFA + \measuredangle XFP = 90^\circ$.

Четврт начин. Нека ознаките се како во вториот начин. Нека конфигурацијата од условот на задачата е сместена во комплексната рамнина така што точката O е во координатниот почеток и кружницата опишана околу $\triangle ABC$ е единечна. Нека точките A, B, C, H, F, P, X имаат афикси a, b, c, h, f, p, x. Важи $|a| = |b| = |c| = 1$ и $h = a + b + c$.

Бидејќи F припаѓа на AB, а CF е нормална на AB, важи

$$\frac{f-a}{\overline{f}-\overline{a}} = \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = -ab = \frac{f-c}{\overline{f}-\overline{c}},$$

па затоа $f + ab\overline{f} = a + b$ и $f - ab\overline{f} = c - ab\overline{c}$, т.е. $f = \frac{1}{2}(a + b + c - ab\overline{c})$. Бидејќи $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FP}$ следува $p = 2f - a = b + c - ab\overline{c}$. Точката X припаѓа на BC, па затоа $\frac{x-b}{\overline{x}-\overline{b}} = \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = -b$, т.е. $\overline{x} = \frac{b+c-x}{bc}$. Точката X припаѓа на PH, па затоа

$$\frac{p-x}{\overline{p}-\overline{x}} = \frac{p-h}{\overline{p}-\overline{h}} = \frac{b+c-ab\overline{c}-a-b-c}{\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}\overline{b}c-\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}} = \frac{-a\overline{c}(b+c)}{-\overline{a}\overline{b}(c+b)} = \frac{a^2b}{c},$$

од каде следува

$$\begin{aligned} p - x &= \frac{a^2b}{c}(\overline{b} + \overline{c} - \overline{a}\overline{b}c - \frac{b+c-x}{bc}) \\ &= \frac{1}{c^2}(a^2c + a^2b - ac^2 - a^2b - a^2c + a^2x) \\ &= \frac{1}{c^2}(-ac^2 + a^2x), \end{aligned}$$

односно $x = \frac{1}{a^2+c^2}(c^2p + ac^2) = \frac{2fc^2}{a^2+c^2}$. Доволно е да се докаже дека $OF \perp FX$, што е еквивалентно со $\frac{f-0}{\overline{f}-0} = -\frac{f-x}{\overline{f}-\overline{x}}$, т.е. $x\overline{f} + \overline{x}f = 2|f|^2$. Последното равенство е точно бидејќи

$$x\overline{f} + \overline{x}f = \frac{2fc^2}{a^2+c^2}\overline{f} + \frac{2\overline{f}\overline{c}^2}{\overline{a}^2+\overline{c}^2}f = 2|f|^2\left(\frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) = 2|f|^2.$$

Петти начин. Нека ознаките се како во вториот начин на решавање. Земаме правоаголен координатен систем со координатен почеток во точката F, а правите AB и FC се оските x и y, соодветно. Нека $A(-a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$ ($a, b, c > 0$ и како $\overline{AC} > \overline{BC}$, добиваме $a > b$). Равенката на правата BC е $y = -\frac{c}{b}(x - b)$, а нормалата на оваа права која ја содржи точката A е

$y=\frac{c}{b}(x+a)$. Пресекот на оваа нормала со $y-$оската е $H(0,\frac{ab}{c})$. Бидејќи во остроаголен триаголник растојанието од точката O до страната AB е двапати помало од растојанието меѓу точките C и H, следува дека $O(\frac{b-a}{2},\frac{c^2-ab}{2c})$.

Понатаму, $P(a,0)$, равенката на правата PH е $y=-\frac{b}{c}(x-a)$, па пресекот на правите BC и PH е $X(\frac{b(ab-c^2)}{b^2-c^2},\frac{bc(b-a)}{b^2-c^2})$. Конечно, доволно е да се докаже дека $OF\perp FX$, што следува од

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FO}\cdot\overrightarrow{FX}&=(\frac{b-a}{2},\frac{c^2-ab}{2c})\cdot(\frac{b(ab-c^2)}{b^2-c^2},\frac{bc(b-a)}{b^2-c^2})\\&=\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b(ab-c^2)}{b^2-c^2}+\frac{c^2-ab}{2c}\cdot\frac{bc(b-a)}{b^2-c^2}=0.\end{aligned}$$

2. Дали постои низа позитивни броеви $a_1,a_2,\dots$ кои ги задоволуваат условите

1) $\sum_{i=1}^{n}a_i\le n^2$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и

2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\le 2008$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. *Прв начин*. Нека претпоставиме дека таква низа постои. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{1}{a_{n+1}}+\dots+\frac{1}{a_{2n}}\ge\frac{n^2}{a_{n+1}+\dots+a_{2n}}\ge\frac{n^2}{a_1+\dots+a_{2n}}\ge\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4},$$

за секој $n\in\mathbb{N}$. Меѓутоа, од тука следува $\sum_{i=1}^{2^k}\frac{1}{a_i}\ge\frac{k}{4}$, за $k=1,2,\dots$, што противречи на условот 2).

Втор начин. Нека $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$, за $n\in\mathbb{N}$. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона, па ако е ограничена таа е конвергентна. Но конвергентна низа реални броеви е Кошиева, па затоа постои $n_0\in\mathbb{N}$ таков што $0<x_n-x_m<\frac{1}{4}$, кога $n>m\ge n_0$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\sum_{i=n_0+1}^{2n_0}a_i\ge\frac{n_0^2}{\sum_{i=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{a_i}}=\frac{n_0^2}{x_{2n_0}-x_{n_0}}>4n_0^2=(2n_0)^2\ge\sum_{i=1}^{2n_0}a_i>\sum_{i=n_0+1}^{2n_0}a_i,$$

што не е можно. Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена.

3. Нека n е природен број. Правоаголник со должини на страни $90n+1$ и $90n+5$ е поделен на единечни квадрати со страни паралелни на страните на правоаголникот. Нека S е множеството од сите темиња на овие единечни квадрати.

Докажи, дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

Решение. Нека поставиме координатен систем со координатен почеток во центарот O на правоаголникот и x оска паралелна на подолгата страна на правоаголникот. Множеството $\mathbb{P}$ од разгледуваните прави да го поделиме на две групи.

1) Прави кои не минуваат низ точката O. Има $(90n+2)+(90n+6)$ прави паралелни на една од координатните оски и овој број е делив со 4. За секоја од останатите прави кои минуваат низ точката O, правите кои се симетрични на неа во однос на координатните оски и во однос на точката O исто така припаѓаат на множеството $\mathbb{P}$, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества. Затоа, бројот на правите кои не минуваат низ точката O е делив со 4.
2) Прави кои минуваат низ точката O. Секоја права низ O која содржи некоја точка од S ја содржи и нејзината симетрична точка, па затоа припаѓа на $\mathbb{P}$, а нејзиниот коефициент на правец е рационален број $\frac{p}{q}$, каде p и q се непарни цели броеви такви што $|p|\leq 90n+1,\ 0<q\leq 90n+5$ и притоа $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Правите од оваа група ги делиме на три подгрупи:

   а) Две прави $l_1(x=y), l_2(x=-y)$.

   б) За секоја права која минува низ O со коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за $|p|\leq 90n+1$ и $0<q\leq 90n+1$, различна од l_1 и l_2, правите симетрични на неа во однос на правите x, l_1 и l_2 припаѓаат на множеството $\mathbb{P}$, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества.

   в) Остануваат правите кои минуваат низ O и имаат коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за кој $q\in\{90n+3, 90n+5\}$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(x,q)=1$ и $2\nmid x$ ако и само ако $\mathrm{NZD}(q,q-x)=1$ и $2\,|\,q-x$, заклучуваме дека непарни природни броеви кои се помали или еднакви на q и се заемно прости со q има исто колку што има и парни, па затоа нивниот број е $\frac{1}{2}\varphi(q)$. Според тоа, за $q=90n+3$ бројот на овие прави е $\varphi(90n+3)$, додека за $q=90n+5$ нивниот број е $\varphi(90n+4)-2$, бидејќи треба да се исклучат правите со коефициент на агол $\pm\frac{90n+3}{90n+5}$. Бидејќи $4\,|\,\varphi(3)\varphi(30n+1)=\varphi(90n+3)$ и $4=\varphi(5)\,|\,\varphi(90n+5)$, добиваме дека бројот на овие прави е од облик $4k-2$.

   Од а), б) и в) следува дека бројот на правите кои минуваат низ точката O е делив со 4.

Конечно, од 1) и 2) следува дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

4. Нека c е природен број. Низата $a_1, a_2, ...$ е дефинирана со

$$a_1 = c, a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3,$$

за секој природен број n. Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k \geq 1$ и $m \geq 2$ такви што бројот $a_k^2 + c^3$ е еднаков на $m-$тиот степен на некој природен број.

Решение. За $k > 1$ од рекурентната врска добиваме

$$a_k^2 + c^3 = a_{k+1} - a_k = a_k^2 + a_k - a_{k-1}^2 - a_{k-1} = (a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1} + 1) . \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека $d \mid a_k - a_{k-1}$ и $d \mid a_k + a_{k-1} + 1$. Тогаш $d \mid 2a_k + 1$ и $d \mid 2a_{k-1} + 1$. Но, од рекурентната релација следува

$$2(2a_k + 1) = (2a_{k-1} + 1)^2 + 4c^3 + 1,$$

па затоа $d \mid 4c^3 + 1$, а оттука следува дека $d \mid 2a_n + 1$, за секој $n < k$. Според тоа, $d \mid 2a_1 + 1 = 2c + 1$. Меѓутоа, тогаш $d \mid 2(4c^3 + 1) - (2c + 1)(4c^2 - 2c + 1) = 1$, т.е. $d = 1$.

Сега, ако $a_{k+1} - a_k$ е $m-$ти степен, од (1) следува дека и $a_k - a_{k-1}$ е $m-$ти степен. Постапката ја продолжуваме е заклучуваме дека $a_2 - a_1 = c^2(c+1)$ е $m-$ти степен, па од $\mathrm{NZD}(c^2, c+1) = 1$ следува дека c^2 и $c+1$ се $m-$ти степени. Меѓутоа, c не може да биде $m-$ти степен, па затоа m мора да биде парен број и уште повеќе $m = 2$. Значи, $c+1$ е точен квадрат. Конечно, ако $c+1$ е точен квадрат, тогаш и $c^2(c+1) = a_1^2 + c^3$ е точен квадрат.