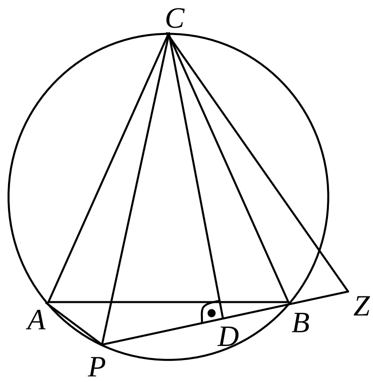
ЈБМО 2002

1. Нека ABC е рамнокрак триаголник така што $\overline{AC}=\overline{BC}$ и P е точка од лакот AB од опишаната кружница, на кој не ја содржи точката C. Нека D е точка од правата PB така што правата CD е нормална на PB. Докажи дека $\overline{PA}+\overline{PB}=2\overline{PD}$.



Решение. На правата PB избираме точка Z така што $\overline{BZ}=\overline{AP}$ и B е меѓу P и Z. Триаголниците PAC и ZBC се складни, бидејќи

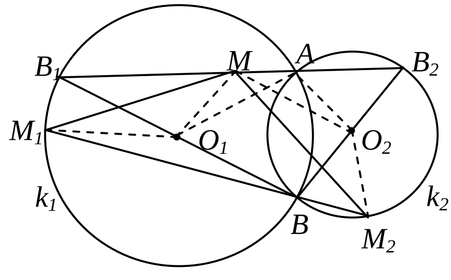
$$\overline{AC}=\overline{BC},\ \measuredangle PAC=180°-\measuredangle PBC=\measuredangle ZBC,\ \overline{AP}=\overline{BZ}.$$

Од оваа складност следува $\overline{CP}=\overline{CZ}$, односно триаголникот PZC е рамнокрак, па висината CD спуштена од врвот, ја полови неговата основа. Конечно, $2\overline{PD}=\overline{PZ}=\overline{PB}+\overline{BZ}=\overline{PB}+\overline{PA}$.

2. Две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси имаат две заеднички точки A и B и нивните центри O_1 и O_2 се наоѓаат на различни страни од правата AB. Нека B_1 и B_2 се точки од k_1 и k_2, соодветно, кои се дијаметрално спротивни точки на точката B. Точките M_1 од k_1 и M_2 од k_2 се избрани така што $\measuredangle AO_1M_1=\measuredangle AO_2M_2<180°$, B_1 е внатрешна точка за $\measuredangle AO_1M_1$ и B е внатрешна точка за $\measuredangle AO_2M_2$. Нека M е средина на отсечката B_1B_2. Докажи дека $\measuredangle MM_1B=\measuredangle MM_2B$.

Решение. Точките B_1, A и B_2 се колинеарни, бидејќи

$$\measuredangle B_1AB=90°=\measuredangle BAB_2.$$



Од M средина на B_1B_2 и O_1 средина на B_1B, следува дека MO_1 е средна линија во триаголникот B_2BB_1, од каде

$$\overline{MO_1}=\tfrac{1}{2}\overline{BB_2}=\overline{AO_2}.$$

На сличен начин, $\overline{MO_2} = \frac{1}{2}\overline{BB_1} = \overline{AO_1}$. Од тука следува дека триаголниците MO_1A и AO_2M се складни, од каде следува $\measuredangle MO_1A = \measuredangle AO_2M$. Затоа,

$$\measuredangle MO_1M_1 = \measuredangle AO_1M_1 - \measuredangle AO_1M = \measuredangle AO_2M_2 - \measuredangle AO_2M = \measuredangle MO_2M_2 ,$$

и земајќи ги во предвид равенствата $\overline{MO_1} = \overline{M_2O_2}$ и $\overline{MO_2} = \overline{M_1O_1}$, се добива дека триаголниците MO_1M_1 и M_2O_2M се складни, од каде $\overline{MM_1} = \overline{MM_2}$. Точките M_1, B и M_2 се колинеарни бидејќи

$$\measuredangle M_1BA + \measuredangle ABM_2 = \frac{1}{2}\measuredangle AO_1M_1 + \frac{1}{2}(360^\circ - \measuredangle AO_2M_2) = 180^\circ ,$$

па следува дека триаголникот M_1M_2M е рамнокрак, од каде добиваме $\measuredangle MM_1B = \measuredangle MM_2B$.

3. Определи ги сите природни броеви N кои ги задоволуваат следните услови:
   - N има точно 16 делители $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N$;
   - делителот со индекс d_5, т.е. d_{d_5} е еднаков на $(d_2 + d_4)d_6$.

Решение. Да забележиме најнапред дека N нема повеќе од 4 прости различни делители. Навистина, ако има пет или повеќе прости делители, тогаш ќе има облик $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, каде α_i се природни броеви и $k \geq 5$. Тогаш вкупниот број делители на N е еднаков на

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_k)$$

и овој број е поголем од 16 за $k \geq 5$. Понатаму, да заблежиме дека $d_2 = 2$. Имено, ако $d_2 > 2$, тогаш делителите d_2 и d_4 се непарни. Сега, бидејќи d_{d_5} е делител на N, од условот $d_{d_5} = (d_2 + d_4)d_6$ следува дека тоа е и $d_2 + d_4$. Но, $d_2 + d_4$ е парен број и како е делител на N добиваме дека $2 | N$. Значи, $d_2 = 2$.

Од условите на задачата следува $d_{d_5} = (2 + d_4)d_6$. Бидејќи $(2 + d_4)d_6 > d_6$ добиваме $d_5 > 6$, т.е.

$$d_5 \geq 7. \tag{1}$$

Понатаму, од $(2 + d_4) | d_{d_5}$ и $d_{d_5} | N$ следува $(2 + d_4) | N$. Бидејќи $2 + d_4 > d_4$, заклучуваме $2 + d_4 \geq d_5$. Затоа ако се земе предвид (1) добиваме

$$d_4 \geq 5. \qquad (2)$$

Сега, бидејќи $2+d_4 \geq d_5$ имаме две можности за d_5 и тоа: $d_5 = 2+d_4$ или $d_5 = 1+d_4$

Нека $d_5 = 1+d_4$. Од вториот услов следува $2+d_4 | N$, па затоа $d_6 = 2+d_4$Така d_4, d_4+1, d_4+2 се делители на N, од каде следува дека $3|N$, односно $d_3 = 3$. Бидејќи $6|N$ и $d_5 \geq 7$ мора да е $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 7$ и $d_6 = 8$, од каде следува дека $4|N$ и $d_4 = 4$, што е противречност со тоа дека претходно заклучивме дека $d_4 = 6$.

Така останува случајот $d_5 = 2+d_4$. Ги разгледуваме следните случаи:

i) Ако $4|N$, бидејќи $d_4 \geq 5$, добиваме $d_3 = 4$, од каде следува $8|N$. Бидејќи $d_5 \geq 7$, а како $d_6 > d_5$ добиваме $d_6 \geq 8$. Од кажаното следува $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. Сите овие случаи водат до контрадикција, имено

- ако $d_4 = 8$, мора да е $d_5 = 10$, од каде $5|N$ и $d_4 = 4$, што не е можно,
- ако $d_5 = 8$, имаме $d_4 = 6$, од каде $3|N$ и следствено $d_3 = 3$, што не е можно,
- ако $d_6 = 8$, тогаш $d_5 = 7$, па е $d_4 = 5$. Од тоа следува $d_2 d_4 = 10|N$. Но, $d_{d_5} = d_7 = (2+5)8 = 56 > 10$, што е невозможно.

Значи 4 не е делител на N, па заклучуваме дека d_3 е прост делител.

ii) Ако $3|N$, тогаш $d_3 = 3$. Бидејќи $d_2 d_3 = 6|N$ и $d_4 \geq 6$, мора $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 8$, па следува дека $4|N$, што не е можно.

Значи 3 не е делител на N, па заклучуваме дека $d_3 \geq 5$ и $d_4 \geq 7$.

Бидејќи N и $2+d_4$ не се деливи со 4, заклучуваме дека d_4 е непарен. Бидејќи $2+d_4$ и d_4 не се деливи со 3, добиваме дека $d_4 = 3k+2$, за некој цел број k и бидејќи d_4 е непарен следува дека $d_4 = 6l+5$, за некој цел број l. Бидејќи $d_5 \leq 16$, мора да е $7 \leq d_4 \leq 14$. Единствена можност е $d_4 = 11$ и $d_3 = 13$. Бидејќи $2d_3 | N$ и $2d_3 \geq d_4$, заклучуваме дека $d_3 \geq 6$. Бидејќи d_3 е прост и $d_3 < 11$, заклучуваме дека $d_3 = 7$. Конечно $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$.

4. Нека a, b, c се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме,

$$\left(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\right)^3 \geq \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}. \qquad (1)$$

Но, $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$ и

$$\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a),$$

па затоа

$$\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3^3 \cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива бараното неравенство.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\sqrt{2a(a+b)} \leq \frac{3a+b}{2}$, па затоа $a(a+b) \leq \frac{(3a+b)^2}{8}$. Аналогно се добиваат неравенствата

$$b(b+c) \leq \frac{(3b+c)^2}{8} \text{ и } c(c+a) \leq \frac{(3c+a)^2}{8}.$$

Оттука следува

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)} \geq \frac{16}{(3a+b)^2}+\frac{16}{(3b+c)^2}+\frac{16}{(3c+a)^2}. \qquad (1)$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$\sqrt{\frac{\frac{16}{(3a+b)^2}+\frac{16}{(3b+c)^2}+\frac{16}{(3c+a)^2}}{3}} \geq \frac{\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}}{3}$$

од кое после квадрирањето и множењето со 3 и од неравенството (1) добиваме

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)} \geq \frac{\left(\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}\right)^2}{3}. \qquad (2)$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\frac{\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}}{3} \geq \frac{3}{\frac{3a+b}{4}+\frac{3b+c}{4}+\frac{3c+a}{4}} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Конечно, од неравенството (2) и последното неравенство следува

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)} \geq \frac{\left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2}{3} = \frac{27}{(a+b+c)^2},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.