Osječki matematički list 15 (2015), 1-11

Baricentričke koordinate 1 – Afina svojstva

Vladimir Volenec *

Sažetak

Baricentričke (ili arealne) koordinate bilo koje točke s obzirom na dani trokut u euklidskoj ravnini definiraju se uz pomoć vektorskog računa. Definiraju se i baricentričke koordinate bilo kojeg pravca. Izračunavaju se baricentričke koordinate spojnice dviju različitih točaka i sjecišta dvaju različitih pravaca, te orijentirana površina bilo kojeg trokuta pomoću baricentričkih koordinata njegovih vrhova.

Ključne riječi: *trokut, baricentričke koordinate*

Barycentric coordinates 1 – Affine properties

Abstract

In this paper, barycentric (or areal) coordinates of any point with respect to a given triangle in the Euclidean plane are defined by means of vector calculus. Barycentric coordinates of any line are also defined. Barycentric coordinates of the joining line of two different points and the intersection of two lines and the oriented areas of any triangle are calculated by using barycentric coordinates of its vertices.

Keywords: *triangle, barycentric coordinates*

*Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička cesta 30, HR-10 000 Zagreb, email: volenec@math.hr

Neka je dan trokut ABC. Za bilo koju točku P u ravnini neka je sa $\mathbf{P}$ označen njezin radijusvektor s obzirom na neko ishodište. Tada za bilo koje dvije točke P, Q vrijedi jednakost $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$. Za danu točku P jednoznačno su određeni brojevi y i z tako da je $\overrightarrow{AP} = y \cdot \overrightarrow{AB} + z \cdot \overrightarrow{AC}$, tj. $\mathbf{P} - \mathbf{A} = y(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + z(\mathbf{C} - \mathbf{A})$. Ako stavimo $x = 1 - y - z$, tj.

$$x + y + z = 1 \tag{1}$$

tada imamo

$$\mathbf{P} = x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C}. \tag{2}$$

Brojevi x, y, z, takvi da vrijede jednakosti (1) i (2), su jednoznačno određeni točkom P i trokutom ABC i ne ovise o izboru ishodišta. Te brojeve zovemo **apsolutne baricentričke koordinate** točke P s obzirom na trokut ABC i pišemo $P = (x, y, z)$. Očito je $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$.

Bilo koja tri broja x', y', z' proporcionalna s koordinatama x, y, z zovemo **relativnim baricentričkim koordinatama** točke P s obzirom na trokut ABC i pišemo $P = (x' : y' : z')$. Pritom pretpostavljamo da je $x' + y' + z' \neq 0$. Točka P je jednoznačno određena svojim relativnim baricentričkim koordinatama x', y', z' jer su njezine apsolutne baricentričke koordinate tada dane formulama

$$x = \frac{x'}{x' + y' + z'}, \quad y = \frac{y'}{x' + y' + z'}, \quad z = \frac{z'}{x' + y' + z'}. \tag{3}$$

Zbog jednakosti (3), jednakost (2) dobiva oblik $(x' + y' + z')\mathbf{P} = x'\mathbf{A} + y'\mathbf{B} + z'\mathbf{C}$. Ova jednakost fizikalnim jezikom izražava činjenicu da je točka P težište s masom $x' + y' + z'$ točaka A, B, C redom s masama x, y, z. Posebno, točke A, B, C redom s masama $1, 1, 1$ imaju za težište točku G, za koju vrijedi $3\mathbf{G} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, tj. $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ je točka, koju zovemo **težištem** trokuta ABC. Strana riječ baricentar za težište dala je i ime baricentričkim koordinatama.

Ako točka P dijeli dvije različite točke $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ u omjeru $(P_1 P_2 P) = \lambda$, tj. $\overrightarrow{P_1 P} = \lambda \cdot \overrightarrow{P_2 P}$, tada iz $\mathbf{P} - \mathbf{P_1} = \lambda \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P_2})$ uz $\mathbf{P_i} = x_i\mathbf{A} + y_i\mathbf{B} + z_i\mathbf{C}$ $(i = 1, 2)$ dobivamo

$$(1 - \lambda)\mathbf{P} = (x_1 - \lambda x_2)\mathbf{A} + (y_1 - \lambda y_2)\mathbf{B} + (z_1 - \lambda z_2)\mathbf{C}.$$

Zbog $x_i + y_i + z_i = 1$ $(i = 1, 2)$ slijedi

$$\frac{1}{1-\lambda}(x_1 - \lambda x_2 + y_1 - \lambda y_2 + z_1 - \lambda z_2) = 1$$

i zato imamo jednakosti

$$P = \left(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}, \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda}\right), \tag{4}$$

$$P = ((x_1 - \lambda x_2) : (y_1 - \lambda y_2) : (z_1 - \lambda z_2)). \tag{5}$$

Posebno, uz $\lambda = -1$, točka P je polovište točaka P_1 i P_2 i iz (4) slijedi $P = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$, tj. $\mathbf{2P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$. Tako npr. točke $B = (0, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 1)$ imaju polovište $D = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i to je polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Analogno su $E = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ i $F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ polovišta stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Za točke $A = (1, 0, 0)$, $D = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ vrijedi očito jednakost $\mathbf{A} + 2\mathbf{D} = 3\mathbf{G}$, što se može pisati i u obliku $\mathbf{G} - \mathbf{A} = -2(\mathbf{G} - \mathbf{D})$, tj. $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{DG}$. To znači da je djelišni omjer (ADG) jednak -2, tj. težište trokuta dijeli njegovu težišnicu $\overline{AD}$ u omjeru -2. Ista tvrdnja vrijedi i za težišnice $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ trokuta ABC.

Uz $\lambda = 1$ jednakost (4) nema smisla, dok jednakost (5) dobiva oblik

$$P = ((x_1 - x_2) : (y_1 - y_2) : (z_1 - z_2)) \tag{6}$$

i predstavlja beskonačno daleku točku P pravca P_1P_2, jer za te točke imamo jednakost $(P_1P_2P) = 1$. Relativne koordinate u (6) imaju zbroj jednak nuli, pa beskonačno daleke točke nemaju apsolutne koordinate. Zbog $P_1 \neq P_2$ beskonačno daleka točka P ne može biti oblika $(0 : 0 : 0)$. Posebno, pravci BC, CA, AB imaju beskonačno daleke točke $(0 : 1 : -1)$, $(-1 : 0 : 1)$, $(1 : -1 : 0)$.

Za bilo koji vektor $\mathbf{v}$ jednoznačno su određeni brojevi y i z tako da je $\mathbf{v} = y \cdot \overrightarrow{AB} + z \cdot \overrightarrow{AC}$, tj. $\mathbf{v} = y(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + z(\mathbf{C} - \mathbf{A})$. Ako stavimo $x = -y - z$, tj.

$$x + y + z = 0, \tag{7}$$

tada imamo

$$\mathbf{v} = x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C}. \tag{8}$$

Brojevi x, y, z, takvi da vrijede jednakosti (7) i (8), su jednoznačno određeni vektorom $\mathbf{v}$ i trokutom ABC i zovemo ih **baricentričkim koordinatama** vektora $\mathbf{v}$ s obzirom na trokut ABC i pišemo $\mathbf{v} = [x, y, z]$.

Za dvije točke $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ imamo $\mathbf{P_i} = x_i\mathbf{A} + y_i\mathbf{B} + z_i\mathbf{C}$ $(i = 1, 2)$ i zato

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} &= (x_2 - x_1)\mathbf{A} + (y_2 - y_1)\mathbf{B} + (z_2 - z_1)\mathbf{C} \\ &= [x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1].\end{aligned}$$

Uspoređivanjem ovog rezultata s jednakošću (6) zaključujemo da su (relativne) baricentričke koordinate beskonačno daleke točke nekog pravca proporcionalne s baricentričkim koordinatama bilo kojeg vektora paralelnog s tim pravcem. Zato paralelni pravci imaju istu beskonačno daleku točku. Posebno imamo $\overrightarrow{BC} = [0, -1, 1]$, $\overrightarrow{CA} = [1, 0, -1]$, $\overrightarrow{AB} = [-1, 1, 0]$.

Točka $P = (x, y, z)$ je kolinearna s dvije različite točke $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ako i samo ako postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$, tj. $\mathbf{P} - \mathbf{P_1} = \lambda(\mathbf{P_2} - \mathbf{P_1})$ ili $\mathbf{P} = (1 - \lambda)\mathbf{P_1} + \lambda\mathbf{P_2}$. Stavimo li $\kappa = 1 - \lambda$, tada zaključujemo da točka P leži na pravcu P_1P_2 ako i samo ako postoje brojevi κ i λ takvi da je $\kappa + \lambda = 1$ i

$$x = \kappa x_1 + \lambda x_2, \quad y = \kappa y_1 + \lambda y_2, \quad z = \kappa z_1 + \lambda z_2. \tag{9}$$

Jednakosti (9) ćemo kratko zapisivati u obliku $P = \kappa P_1 + \lambda P_2$. Brojevi, dani sa (9) zadovoljavaju jednadžbu

$$Xx + Yy + Zz = 0, \tag{10}$$

gdje je

$$X = k(y_1z_2 - z_1y_2), \quad Y = k(z_1x_2 - x_1z_2), \quad Z = k(x_1y_2 - y_1x_2) \tag{11}$$

i $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Doista, dobivamo očitu jednakost

$$(y_1z_2 - z_1y_2)(\kappa x_1 + \lambda x_2) + (z_1x_2 - x_1z_2)(\kappa y_1 + \lambda y_2) + (x_1y_2 - y_1x_2)(\kappa z_1 + \lambda z_2) = 0.$$

Obrnuto, ako brojevi x, y, z zadovoljavaju jednadžbu (10), pri čemu vrijede jednakosti (11), tada se ta jednadžba može pisati u obliku

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Zato postoje brojevi κ i λ takvi da vrijede jednakosti (9). Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$x + y + z = \kappa(x_1 + y_1 + z_1) + \lambda(x_2 + y_2 + z_2),$$

pa ako vrijede jednakosti $x_1 + y_1 + z_1 = 1$ i $x_2 + y_2 + z_2 = 1$, tada će vrijediti i jednakost $x + y + z = 1$ ako i samo ako vrijedi jednakost $\kappa + \lambda = 1$. Dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 1. *Točka $P = (x : y : z)$ je kolinearna s dvije različite točke $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$ i $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$ ako i samo ako vrijedi jednakost* (10)*, gdje su brojevi X, Y, Z dani jednakostima* (11)*, pri čemu je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posebno je točka $P = (x, y, z)$ kolinearna s dvije različite točke $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ako i samo ako vrijedi jednakost* (10)*, gdje su brojevi X, Y, Z dani jednakostima* (11), pri čemu je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\kappa + \lambda = 1$.

Po teoremu 1 koordinate bilo koje točke danog pravca $\mathcal{P}$ zadovoljavaju jednadžbu oblika (10), jednadžbu tog pravca $\mathcal{P}$, pri čemu su brojevi X, Y, Z određeni do na proporcionalnost. Te brojeve zovemo **baricentričkim koordinatama** pravca $\mathcal{P}$ i pišemo $\mathcal{P} = (X : Y : Z)$. Kako je $P_1 \neq P_2$, to iz (11) slijedi $(X : Y : Z) \neq (0 : 0 : 0)$.

Korolar 1. *Jednadžba pravca kroz različite točke $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$ i $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$ ima oblik* (12).

Jednakost (10) je uvjet da točka $P = (x : y : z)$ leži na pravcu $\mathcal{P} = (X : Y : Z)$, tj. da pravac $\mathcal{P}$ prolazi kroz točku P, a kažemo tada da su točka P i pravac $\mathcal{P}$ **incidentni**, pa je jednakost (10) uvjet incidentnosti točke $P = (x : y : z)$ i pravca $\mathcal{P} = (X : Y : Z)$.

Jednakost $x + y + z = 0$ karakterizira beskonačno daleke točke $(x : y : z)$, pa kako je ta jednakost oblika (10) uz $X = Y = Z = 1$, to smatramo da sve beskonačno daleke točke leže na jednom pravcu, **beskonačno dalekom pravcu** $\mathcal{N}$, s jednadžbom $x + y + z = 0$, pa je dakle $\mathcal{N} = (1 : 1 : 1)$.

Ako determinantu u jednadžbi (12) razvijemo po elementima prvog retka, tada dobivamo:

Korolar 2. *Spojnica različitih točaka $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$ i $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$ je pravac*

$$P_1P_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{13}$$

Iz $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$, $P = (x : y : z)$ primjenom korolara 2 dobivamo

$$\begin{array}{ccc} BC = (1,0,0), & CA = (0,1,0), & AB = (0,0,1), \\ AP = (0 : -z : y), & BP = (z : 0 : -x), & CP = (-y : x : 0), \end{array} \tag{14}$$

tj. pravci BC, CA, AB imaju redom jednadžbe $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Teorem 2. *Tri točke $P_i = (x_i : y_i : z_i)$ $(i = 1,2,3)$ su kolinearne ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Posebno, točke $P_i = (x_i : y_i : z_i)(i = 1,2)$ su kolinearne s točkom A pod uvjetom da je $y_1 : z_1 = y_2 : z_2$, s točkom B pod uvjetom $z_1 : x_1 = z_2 : x_2$, a s točkom C pod uvjetom $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$.

Dokaz. U dokazu teorema 1 smo tvrdnju teorema 2 dokazali za tri konačne točke i to u slučaju kada su točke P_1 i P_2 različite i $P_3 = P$. Tvrdnja je očigledna ako među točkama P_1, P_2, P_3 ima jednakih. Tri beskonačno daleke točke $P_i = (x_i : y_i : z_i)$ $(i = 1,2,3)$ očito zadovoljavaju jednadžbu (15) jer je $x_i + y_i + z_i = 0$ $(i = 1,2,3)$. Obrnuto, npr. iz (15) i $x_i + y_i + z_i = 0$ $(i = 1,2)$ slijedi i $x_3 + y_3 + z_3 = 0$. Moramo tvrdnju teorema dokazati još samo za slučaj kada imamo dvije različite konačne točke $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1,2)$ i beskonačno daleku točku $P_3 = (x_3 : y_3 : z_3)$. Beskonačno daleka točka pravca P_1P_2 je točka $(x_3 : y_3 : z_3) = ((x_1 - x_2) : (y_1 - y_2) : (z_1 - z_2))$ i zadovoljava jednakost (15). Obrnuto, neka beskonačno daleka točka $P_3 = (x_3 : y_3 : z_3)$ zadovoljava jednakost (15). Tada postoje brojevi κ i λ takvi da vrijede jednakosti

$$x_3 = \kappa x_1 + \lambda x_2, \quad y_3 = \kappa y_1 + \lambda y_2, \quad z_3 = \kappa z_1 + \lambda z_2. \tag{16}$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo jednakost

$$x_3 + y_3 + z_3 = \kappa(x_1 + y_1 + z_1) + \lambda(x_2 + y_2 + z_2),$$

odakle zbog $x_1 + y_1 + z_1 = 1$, $x_2 + y_2 + z_2 = 1$, $x_3 + y_3 + z_3 = 0$ slijedi $\kappa + \lambda = 0$. Zato je $\lambda = -\kappa$ i jednakosti (16) dobivaju oblik $x_3 = \kappa(x_1 - x_2)$, $y_3 = \kappa(y_1 - y_2)$, $z_3 = \kappa(z_1 - z_2)$, tj. P_3 je beskonačno daleka točka pravca P_1P_2. □

Teorem 3. *Ako točke $P_i = (x_i : y_i : z_i)$ $(i = 1,2)$ imaju zbrojeve koordinata $s_i = x_i + y_i + z_i$ $(i = 1,2)$ i ako točka P zadovoljava jednakost*

$$P = \kappa P_1 + \lambda P_2, \tag{17}$$

tada ove tri točke imaju djelišni omjer

$$(P_1P_2P) = -\frac{\lambda}{\kappa} \cdot \frac{s_2}{s_1}. \tag{18}$$

Dokaz. Prijeđemo li na apsolutne koordinate, tada desna strana jednakosti (17) dobiva oblik $\kappa s_1 P_1 + \lambda s_2 P_2$ i zbog jednakosti zbrojeva koordinata na obje strane jednakosti moramo na lijevoj strani pisati $(\kappa s_1 + \lambda s_2)P$. Zato ta jednakost dobiva vektorski oblik $(\kappa s_1 + \lambda s_2)\mathbf{P} = \kappa s_1 \mathbf{P_1} + \lambda s_2 \mathbf{P_2}$, tj. $\kappa s_1(\mathbf{P} - \mathbf{P_1}) = -\lambda s_2(\mathbf{P} - \mathbf{P_2})$ ili $\kappa s_1 \cdot \overrightarrow{P_1P} = -\lambda s_2 \cdot \overrightarrow{P_2P}$, a to dokazuje jednakost (18). □

Jednadžba (10) je simetrična u varijablama x, y, z i X, Y, Z. Zato za skupove točaka i pravaca (konačnih i beskonačno dalekih) vrijedi tzv. **princip dualiteta**, po kojem svakoj tvrdnji o točkama i pravcima odgovara njoj **dualna** tvrdnja o pravcima i točkama. Zato te dualne tvrdnje nije potrebno dokazivati. Tako su npr. tvrdnjama teorema 1 i 2 dualne tvrdnje sljedećih teorema 4 i 5, a korolaru 2 dualan je korolar 3.

Teorem 4. *Pravac $\mathcal{P} = (X : Y : Z)$ je incidentan sa sjecištem različitih pravaca $\mathcal{P}_1 = (X_1 : Y_1 : Z_1)$ i $\mathcal{P}_2 = (X_2 : Y_2 : Z_2)$ ako i samo ako vrijedi jednakost (10), gdje su brojevi x, y, z dani formulama*

$$x = K(Y_1Z_2 - Z_1Y_2),\ y = K(Z_1X_2 - X_1Z_2),\ z = K(X_1Y_2 - Y_1X_2) \tag{19}$$

i gdje je $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teorem 5. *Tri pravca $\mathcal{P}_i = (X_i : Y_i : Z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ prolaze kroz jednu točku ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Korolar 3. *Sjecište različitih pravaca $\mathcal{P}_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$ i $\mathcal{P}_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$ je točka*

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{21}$$

Primjenom korolara 3 na parove pravaca iz formule (14) dobivamo lako jednakosti

$$AP \cap BC = (0 : y : z),\ BP \cap CA = (x : 0 : z),\ CP \cap AB = (x : y : 0), \tag{22}$$

gdje je $P = (x : y : z)$.

Beskonačno daleka točka nekog pravca je njegovo sjecište s beskonačno dalekim pravcem $\mathcal{N} = (1 : 1 : 1)$. Zato iz korolara 3 slijedi odmah:

Korolar 4. *Pravac* $\mathcal{P} = (X : Y : Z)$ *ima beskonačno daleku točku* $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = ((Y - Z) : (Z - X) : (X - Y))$.

Dva su pravca paralelna ako imaju isto sjecište s beskonačno dalekim pravcem $\mathcal{N}$. Zato iz teorema 5 slijedi:

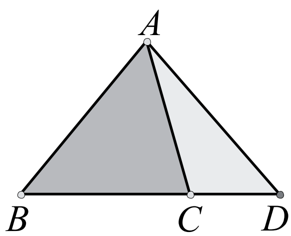
Korolar 5. *Pravci* $\mathcal{P}_i = (X_i : Y_i : Z_i)$ $(i = 1, 2)$ *su paralelni ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Bilo koji pravac paralelan s pravcem $\mathcal{P} = (X : Y : Z)$ *ima oblik* $((X + K) : (Y + K) : (Z + K))$ *za neko* $K \in \mathbb{R}$.

Za tri kolinearne točke B, C, D i bilo koju točku A (slika 1) djelišni omjer (DCB) je jednak omjeru orijentiranih površina $p(ABD)$ i $p(ABC)$ trokuta ABD i ABC. Zato je

$$p(ABD) = (DCB) \cdot p(ABC). \tag{24}$$



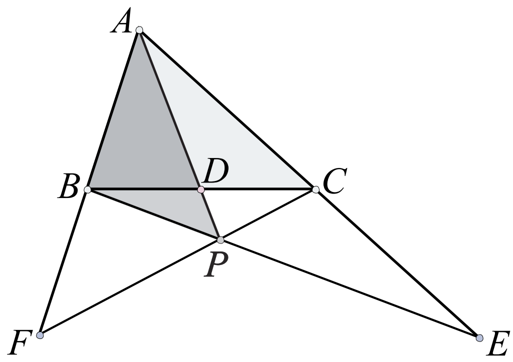
Slika 1.

Ako je $P = (x, y, z)$, tada je točka $D = AP \cap BC$ (slika 2) dana sa (22), tj. imamo $D = (0 : y : z)$ sa zbrojem koordinata $y + z$. Imamo jednakosti $xA = P - D$ i $yB = D - zC$. Zato po teoremu 3 dobivamo jednakosti

$$(PDA) = y + z, \quad (DCB) = \frac{z}{y + z}.$$

Koristeći jednakost (23) i analognu jednakost $p(ABP) = (PDA) \cdot p(ABD)$ dobivamo

$$p(ABD) = \frac{z}{y + z} \cdot \triangle, \quad p(ABP) = (PDA) \cdot p(ABD) = \triangle z,$$



Slika 2.

gdje smo sa $\triangle$ označili površinu trokuta ABC, pri čemu smatramo da je taj trokut pozitivno orijentiran. Analogne rezultate imamo za druge vrhove trokuta ABC, tj. vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 6. *Za bilo koju točku $P = (x, y, z)$ trokuti BCP, CAP, ABP imaju orijentirane površine $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$, gdje je $\triangle$ površina trokuta ABC.*

Korolar 6. *Za bilo koji trokut ABC i bilo koju točku P vrijedi jednakost*

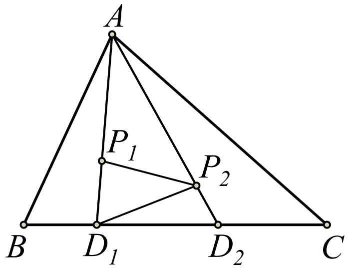
$$p(ABC) = p(BCP) + p(CAP) + p(ABP).$$

Po teoremu 6 zaključujemo da su baricentričke koordinate točke P zapravo omjeri orijentiranih površina trokuta BCP, CAP, ABP s površinom trokuta ABC. Zato se te koordinate često zovu i **arealnim koordinatama** točke P.

Na slici točka P ima prvu koordinatu x negativnu, dok su koordinate y i z pozitivne. Općenito, koordinata x točke P je pozitivna ili negativna već prema tome da li su točke A i P s iste ili s različitih strana pravca BC, a slično pravilo vrijedi i za koordinate y i z.

Neka su sada dane bilo koje dvije točke $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2)$. Tada za točke $D_i = AP_i \cap BC$ (slika 3) imamo na temelju dokaza teorema 6 jednakosti

$$(P_i D_i A) = y_i + z_i, \quad p(ABD_i) = \frac{z_i}{y_i + z_i} \cdot \triangle \ (i = 1, 2).$$



Slika 3.

Zato dobivamo redom

$$\begin{aligned} p(AD_1D_2) &= p(ABD_2) - p(ABD_1) = \triangle\left(\frac{z_2}{y_2+z_2} - \frac{z_1}{y_1+z_1}\right) \\ &= \triangle\frac{y_1z_2 - z_1y_2}{(y_1+z_1)(y_2+z_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(AP_1P_2) &= (P_1D_1A)\cdot p(AD_1P_2) = (P_1D_1A)\cdot(P_2D_2A)\cdot p(AD_1D_2) \\ &= (y_1+z_1)(y_2+z_2)\cdot p(AD_1D_2) = \triangle(y_1z_2 - z_1y_2). \end{aligned}$$

Teorem 7. *Orijentirana površina trokuta s vrhovima $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1,2,3)$ dana je formulom*

$$p(P_1P_2P_3) = \triangle\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Dokaz. Uz dokazanu formulu $p(AP_1P_2) = \triangle(y_1z_2 - z_1y_2)$ vrijede i njoj analogne formule $p(AP_2P_3) = \triangle(y_2z_3 - z_2y_3)$ i $p(AP_3P_1) = \triangle(y_3z_1 - z_3y_1)$. Zato po korolaru 6 dobivamo redom

$$\begin{aligned} p(P_1P_2P_3) &= p(AP_2P_3) + p(AP_3P_1) + p(AP_1P_2) \\ &= \triangle(y_2z_3 - z_2y_3 + y_3z_1 - z_3y_1 + y_1z_2 - z_1y_2) \\ &= \triangle\cdot\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

odakle slijedi formula (25) zbog jednakosti $1 - y_i - z_i = x_i$ $(i = 1,2,3)$. Ovdje smo korolar 6 smjeli koristiti samo u slučaju kada točke P_1, P_2, P_3 tvore trokut. U slučaju kada su te točke kolinearne tvrdnja našeg teorema vrijedi po teoremu 2. □

Napomenimo na kraju da su baricentričke koordinate korištene pri rješavanju velikog broja zadataka iz geometrije trokuta u časopisima poput American Mathematical Monthly, Mathematical Magazine, Elemente der Mathematik, Crux Mathematicorum, Matematika v Škole i Kvant. Međutim, u poznatoj "Encyclopedia of triangle centers" Clarka Kimberlinga, dostupnoj na Internetu, i na njegovoj osobnoj stranici, te npr. u njegovom članku pod [1], koriste se tzv. **trilinearne koordinate**. Za bilo koju točku P trilinearne koordinate s obzirom na temeljni trokut ABC su orijentirane udaljenosti te točke od pravaca BC, CA i AB, pri čemu vrijede ista pravila o predznacima kao i kod baricentričkih koordinata.

Trilinearne koordinate su u uskoj vezi s baricentričkim koordinatama. Ako je ABC temeljni trokut i ako je $P = (x, y, z)$ bilo koja točka prikazana svojim baricentričkim koordinatama x, y, z, i ako su u, v, w njezine trilinearne koordinate, tada je

$$u = 2\triangle \cdot \frac{x}{a}, \quad v = 2\triangle \cdot \frac{y}{b}, \quad w = 2\triangle \cdot \frac{z}{c},$$

jer je npr. $au = 2p(BCP) = 2\triangle x$.

Literatura

[1] C. Kimberling, *Central points and central lines in the plane of a triangle*, Math. Mag. **67**(1994), 163–187.

[2] V. Volenec, *Metrical relations in barycentric coordinates*, Math. Communications **8**(2003), 55–68.