Vječni kalendar

Ljubica Baćić Đuračković[1], *Vojislav Đuračković*[2]

Možda ste se pitali kojeg ste dana u tjednu rođeni. Ili npr. koji je bio dan kad je obavljen prvi telefonski poziv. Puno je važnih događaja u životu koji su se dogodili na određeni dan u tjednu. Kako se isti dan ponavlja svaki sedmi dan, prirodno se javlja ideja korisititi kongruencije modulo 7. Stoga ćemo primjenom kongruencija vidjeti kako odrediti dan u tjednu za bilo koji datum u bilo kojoj godini. No, pogledajmo prvo nekoliko povijesnih detalja o razvoju kalendara.

Povijesni detalji

Oko 738. godine prije Krista osnivač Rima, Romul, uveo je kalendar koji se sastojao od 10 mjeseci ili 304 dana. Naime, godina je započinjala s ožujkom, šest mjeseci imali su po 30 dana, četiri mjeseca po 31 dan dok 61 zimski dan između prosinca i ožujka nisu bili dodijeljeni niti jednom mjesecu. Godišnja doba razlikovala su se svake godine pa je ovaj kalendar bio u upotrebi do 713. godine prije Krista. Tada je nasljednik Romula, Numa Pompilias, dodao kalendaru dva mjeseca (siječanj i veljaču) čime je godinu produžio na 355 dana. Ta je promjena popraćena pomakom u preostalim mjesecima te se ovaj kalendar upotrebljavao do 46. godine prije Krista kada je car Julije Cezar uveo novi kalendar, po njemu nazvan Julijanski kalendar. Da bi smanjio razliku između solarnog kalendara i rimske godine, Cezar je predstavio kalendar koji se sastojao od 12 mjeseci (neparni mjeseci imaju po 31 dan, a parni po 30), osim veljače, koja je imala 29 dana, a svake četvrte godine 30 dana. Prva Julijanska godina počela je 1. siječnja 45. godina prije Krista, imala je 365.25 dana, te je za 11 minuta i 14 sekundi bila duža od solarne godine. Stoga je svaka četvrta godina postala prijestupna godina i imala je 366 dana. Julijanski kalendar nije savršen i njegova greška se povećavala svakih 128 godina za jedan dan te se do 16. stoljeća povećala na 10 dana. U listopadu 1582. godine astronomi Christopher Clavius i Aloysius Giglio su na zahtjev pape Grgura XIII. uveli gregorijanski kalendar, kako bi se ispravile pogreške Julijanskog kalendara. Akumulirana pogreška od 10 dana ispravljena je izbacivanjem 10 dana u listopadu 1582. godine (5. listopada postao je 15. listopada). Po gregorijanskom kalendaru stoljetne godine su prijestupne ako su djeljive s 400, dok su obične godine prijestupne ako su djeljive s 4 (npr. 1800. godina nije prijestupna, dok je 2000. godina prijestupna). Gregorijanski kalendar, koji se sada koristi diljem svijeta, vrlo je precizan te se od solarne godine razlikuje samo za oko 24.5376 sekundi. To je zato što gregorijanska godina ima oko 365.2425 dana, dok solarna godina ima 365.242216 dana što rezultira pogreškom od 3 dana svakih 10 000 godina.

Određivanje dana u tjednu

Cilj ovog članka je vidjeti kako odrediti dan d u tjednu za r-ti dan u zadanom mjesecu m bilo koje godine y u gregorijanskom kalendaru. Prva stoljetna prijestupna

[1] Učiteljica matematike u Osnovnoj školi Nikole Andrića, Vukovar; e-pošta ljubica.bacic@skole.hr

[2] Učitelj matematike u Osnovnoj školi Negoslavci, Negoslavci; e-pošta vojislav.djurackovic@gmail.com

godina bila je 1600. Stoga ćemo ovdje pokazati formulu koja vrijedi za godine poslije 1600. Kako se u prijestupnoj godini dodaje dan u veljači, računat ćemo da nova godina započinje s 1. ožujkom. Stoga ćemo brojevima od 1 do 12 označiti mjesece u godini od ožujka do veljače, brojevima od 0 do 6 dane u tjednu od nedjelje do subote, te brojevima od 1 do 31 dane u mjesecu što kraće zapisujemo $1 \leq m \leq 12$, $0 \leq d \leq 6$ i $1 \leq r \leq 31$. Da bi došli do željene formule, uvedimo još neke oznake. S d_y označimo dan u tjednu koji je bio 1. ožujka u godini y, pri čemu je $y \geq 1600$. Za godinu koja ima 365 dana vrijedi $365 \equiv 1 \pmod 7$ dok za prijestupnu godinu od 366 dana vrijedi $366 \equiv 2 \pmod 7$. Stoga se dan d_y razlikuje od dana d_{y-1} za jedan ako nije prijestupna ili za dva ako je prijestupna, što kraće zapisujemo:

$$d_y = \begin{cases} d_{y-1} + 1 & \text{ako } y \text{ nije prijestupna godina} \\ d_{y-1} + 2 & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako bi izračunali d_y iz d_{1600} treba vidjeti koliko je prijestupnih godina bilo nakon 1600. godine. Ako s l označimo broj prijestupnih godina nakon 1600. godine, onda iz [1, Primjer 2.5] imamo formulu

$$l = \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor - 388. \tag{1}$$

Iz teorema o dijeljenju s ostatkom je

$$y = 100C + D, \tag{2}$$

pri čemu je C broj stoljeća u godini y i $0 \leq D < 100$ je ostatak te vrijedi

$$C = \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor \quad \text{i} \quad D \equiv y \pmod{100}.$$

Ako (2) uvrstimo u (1), dobivamo

$$\begin{aligned} l &= \left\lfloor \frac{100C + D}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100C + D}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100C + D}{400} \right\rfloor - 388 \\ &= \left\lfloor 25C + \frac{D}{4} \right\rfloor - \left\lfloor C + \frac{D}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} + \frac{D}{400} \right\rfloor - 388 \\ &= 25C + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor - C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - 388, \quad \text{jer je } D < 100 \\ &= 24C + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - 388 \equiv 3C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor - 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} d_y &\equiv d_{1600} + \begin{pmatrix} \text{1 dan za svaku godinu} \\ \text{poslije 1600. godine} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{1 dan za svaku prijestupnu} \\ \text{godinu poslije 1600. godine} \end{pmatrix} \pmod 7 \\ &\equiv d_{1600} + (y - 1600) + l \pmod 7. \end{aligned}$$

Ako uvrstimo izraze za y i l imamo

$$\begin{aligned} d_y &\equiv d_{1600} + (100C + D - 1600) + 3C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor - 3 \pmod 7 \\ &\equiv d_{1600} + 103C + D - 1603 + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv d_{1600} + 5C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv d_{1600} - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo formulu za d_y

$$d_y \equiv d_{1600} - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \tag{3}$$

Da bi izračunali d_y potrebno je znati d_{1600} koji ćemo pronaći iz kongruencije

$$d_{1600} \equiv d_y + 2C - D - \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \tag{4}$$

U tu svrhu ćemo iskoristiti podatak da je 1. ožujka 2017. godine bila srijeda tj. $d_y = 3$. Za $y = 2017$ je

$$C = \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2017}{100} \right\rfloor = 20$$

i

$$\begin{aligned} D &\equiv y \pmod{100} \\ &\equiv 2017 \pmod{100} \\ &\equiv 17 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Ako to sve uvrstimo u (4) imamo

$$\begin{aligned} d_{1600} &\equiv 3 + 2 \cdot 20 - 17 - \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv 3 + 40 - 17 - 5 - 4 \pmod 7 \\ &\equiv 17 \pmod 7 \\ &\equiv 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

To znači da je 1. ožujak 1600. godine bila srijeda pa uvrštavanjem u izraz za d_y dobivamo

$$d_y \equiv 3 - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \tag{5}$$

Pomoću prethodne formule može se odrediti koji je bio dan 1. ožujka bilo koje godine. Još ćemo je proširiti kako bi odredili koji dan u tjednu je bilo koji dan u zadanom mjesecu godine y. Stoga treba znati za koliko se dana prvi dan u mjesecu pomiče u odnosu na prethodni mjesec modulo 7 što ovisi o tome ima li mjesec 30 ili 31 dan. Za mjesec koji ima 30 dana vrijedi $30 \equiv 2 \pmod 7$ pa se prvi dan u mjesecu u odnosu na prvi dan u mjesecu prethodnog mjeseca pomiče za 2 dana. U slučaju da mjesec ima 31 dan vrijedi $31 \equiv 3 \pmod 7$ pa se prvi dan u mjesecu u odnosu na prvi dan u mjesecu prethodnog mjeseca pomiče za 3 dana unaprijed. Stoga imamo sljedećih jedanaest mjesečnih povećanja:

1. travanj u odnosu na 1. ožujak:	3 dana
1. svibanj u odnosu na 1. travanj:	2 dana
1. lipanj u odnosu na 1. svibanj:	3 dana
1. srpanj u odnosu na 1. lipanj:	2 dana
1. kolovoz u odnosu na 1. srpanj:	3 dana
1. rujan u odnosu na 1. kolovoz:	3 dana
1. listopad u odnosu na 1. rujan:	2 dana
1. studeni u odnosu na 1. listopad:	3 dana

$$
\begin{aligned}
\text{1. prosinac u odnosu na 1. studeni:} &\quad \text{2 dana}\\
\text{1. siječanj u odnosu na 1. prosinac:} &\quad \text{3 dana}\\
\text{1. veljača u odnosu na 1. siječanj:} &\quad \text{3 dana.}
\end{aligned}
$$

Ukupno povećanje je 29 dana pa se lako vidi da je prosječno mjesečno povećanje $29/11 \approx 2.6$ dana. Ovim se bavio Christian Zeller i pritom uočio da se funkcija $f(m) = \lfloor 2.6m - 0.2 \rfloor - 2$ može upotrijebiti da se postignu gornja povećanja za mjesece m od 2 do 12. Npr.

$$
\begin{aligned}
f(4) - f(3) &= \big(\lfloor 10.4 - 0.2 \rfloor - 2 \big) - \big(\lfloor 7.8 - 0.2 \rfloor - 2 \big)\\
&= (10 - 2) - (7 - 2)\\
&= 3,
\end{aligned}
$$

što znači da imamo povećanje od 3 dana od mjeseca 3 (1. svibanj) do mjeseca 4 (1. lipanj). Stoga po formuli (5) prvi dan d' mjeseca m dan je s

$$d' \equiv d_y + f(m) \pmod 7$$

tj.

$$
\begin{aligned}
d' &\equiv 3 - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor + \lfloor 2.6m - 0.2 \rfloor - 2 \pmod 7\\
&\equiv 1 + \lfloor 2.6m - 0.2 \rfloor - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor .
\end{aligned}
$$

Konačno, r-ti dan mjeseca m računamo po formuli

$$d \equiv d' + (r - 1) \pmod 7$$

odnosno

$$d \equiv r + \lfloor 2.6m - 0.2 \rfloor - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \tag{6}$$

Formula (6) omogućuje nam da odredimo dan u tjednu bilo kojeg zadanog datuma u gregorijanskom kalendaru što se može vidjeti u sljedećim primjerima.

Primjer 1. *Švicarski matematičar i fizičar Leonhard Euler rođen je 15. travnja 1707. godine. Koji je to bio dan u tjednu?*

Rješenje. Kako je prvi dan u godini 1. ožujak, to je travanj drugi mjesec 1707. godine. Dakle, $y = 1707$, $r = 15$, $m = 2$, $C = \lfloor y/100 \rfloor = \lfloor 1707/100 \rfloor = 17$ i

$$
\begin{aligned}
D &\equiv y \pmod{100}\\
&\equiv 1707 \pmod{100}\\
&\equiv 7 \pmod{100}.
\end{aligned}
$$

Ako to sve uvrstimo u (6), imamo

$$
\begin{aligned}
d &\equiv 15 + \lfloor 2.6 \cdot 2 - 0.2 \rfloor - 2 \cdot 17 + 7 + \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{4} \right\rfloor \pmod 7\\
&\equiv 15 + 5 - 34 + 12 \pmod 7\\
&\equiv -2 \pmod 7\\
&\equiv 5 \pmod 7.
\end{aligned}
$$

To znači da je Leonhard Euler rođen u petak. □

Primjer 2. *Koji će dan u tjednu biti 27. siječnja 2345. godine?*

Rješenje. Ožujak je prvi mjesec u godini pa je siječanj 2345. godine zapravo jedanaesti mjesec 2344. godine. Dakle, $y = 2344$, $r = 27$, $m = 11$, $C = \lfloor y/100 \rfloor = \lfloor 2344/100 \rfloor = 23$ i

$$\begin{aligned} D &\equiv y \pmod{100} \\ &\equiv 2344 \pmod{100} \\ &\equiv 44 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (6) dobivamo

$$\begin{aligned} d &\equiv 27 + \lfloor 2.6 \cdot 11 - 0.2 \rfloor - 2 \cdot 23 + 44 + \left\lfloor \frac{23}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{44}{4} \right\rfloor \pmod{7} \\ &\equiv 27 + 28 - 46 + 60 \pmod{7} \\ &\equiv 70 \pmod{7} \\ &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Dakle, 27. siječnja 2345. godine bit će nedjelja. □

Zadatci za vježbu

Za kraj čitatelju ostavljamo nekoliko zadataka za vježbu.

1. Njemački matematičar i astronom Johann Carl Friedrich Gauss rođen je 30. travnja 1777. godine. Koji je to bio dan u tjednu?

2. Koji će dan u tjednu biti 15. srpnja 2137. godine?

3. Braća Wright izveli su prvi dokumentirani let 17. prosinca 1903. godine sa svojim avionom na vlastiti pogon Flyer I. Koji je to bio dan u tjednu?

4. Izračunajte kojeg ste dana u tjednu rođeni i kojeg dana slavite rođendan ove godine.

Literatura

[1] T. Koshy, *Elementary Number Theory with Applications*, Second Edition, Elsevier, 2007.

[2] K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and lts Applications*, AT&T Information Systems Laboratories, Addison-Wesley, 1984.

[3] `https://www.biography.com/people/leonhard-euler-21342391`

[4] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Gauss.html`

[5] `https://www.timeanddate.de/kalender/roemischer-kalender`

[6] `https://hr.wikipedia.org/wiki/Avion`