ЈБМО 2005

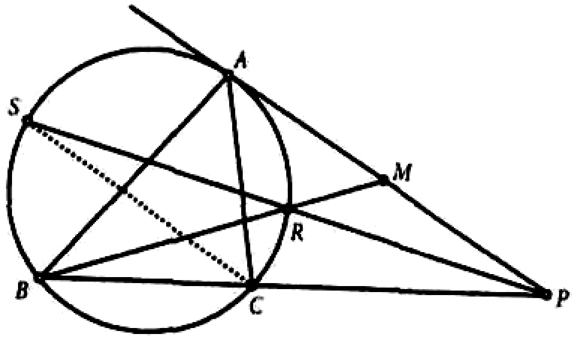
1. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$9(x^2+y^2+1)+2(3xy+2)=2005.$$
Решение. *Прв начин*. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$2(x+y)^2+(x-y)^2=664. \qquad (1)$$
Броевите $x+y$ и $x-y$ се со иста парност. Од (1) следува дека и двата се парни. Нека $x+y=2m$ и $x-y=2t$, каде m и t се цели броеви. Тогаш равенката (1) може да се запише во видот
$$2m^2+t^2=166, \qquad (2)$$
од каде заклучуваме дека t и t^2 се парни броеви, а m е непарен број. Имено, ако t и m се парни, тогаш левата страна на (2) е делива со 4, а десната не е делива со 4. Нека $t=2k$ и $m=2n+1$, каде k е цел, а n е ненегативен цел број. Од (2) следува
$$k^2=41-2n(n+1). \qquad (3)$$
Понатаму, $41-2n(n+1)\geq 0$. Последното неравенство е исполнето само за $n\in\{0,1,2,3,4\}$. Но, само за $n=4$ десната страна на (3) е точен квадрат $k^2=1$. Значи, $k=\pm 1$ и единствени решенија на дадената равенка се $(x,y)=(11,7)$ и $(x,y)=(7,11)$.

Втор начин. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$3(x+y)^2=4xy+664.$$
Нека $xy=p$, $x+y=s$, каде p и s се природни броеви. Добиваме $3s^2=4p+664$. Десната страна на последното равенство е парен број, па затоа s^2 е парен број. Ако $p=1$, тогаш s^2 не е природен број. Значи, $p\geq 2$ и $3s^2\geq 8+664=672$, од каде добиваме
$$s^2\geq 224. \qquad (4)$$
Од неравенството $(x+y)^2\geq 4xy$ следува $s^2\geq 4p$, од каде добиваме $3s^2-664\leq s^2$, т.е.
$$s^2\leq 332. \qquad (5)$$
Сега, од (4) и (5) следува дека $s^2\in\{256,324\}$. Ако $s^2=256$, тогаш $s=16$ и $p=26$, но тогаш x не е природен број. АКо $s^2=324$, тогаш

$s=18,\ p=77$. Во овој случај добиваме $(x,y)=(11,7)$ и $(x,y)=(7,11)$.

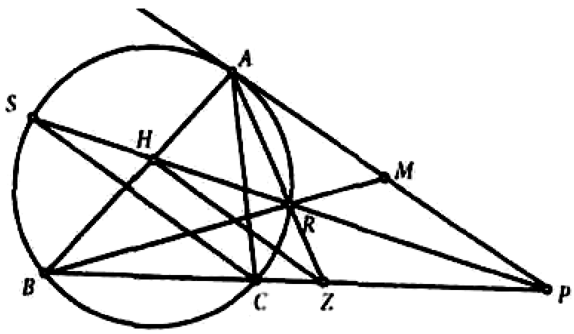
2. Нека ABC е остроаголен триаголник впишан во кружница k. Познато е дека тангентата на кружницата во точката A ја сече правата BC во точката P. Нека M е срединаа на отсечката AP, а R е другата пресечна точка на кружницата k и правата MB. Правата PR по втор пат ја сече кружницата k во точката S различна од R. Докажи дека правите AP и CS се паралелни.

Решение. *Прв начин*. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека точката C припаѓа на отсечката BP.



Сега, од степенот на точката M во однос на кружницата следува $\overline{MA}^2=\overline{MR}\cdot\overline{MB}$, па затоа и $\overline{MP}^2=\overline{MR}\cdot\overline{MB}$. Од последнот равенство следува дека $\triangle MRP\sim\triangle MPB$. Од оваа сличност следува $\measuredangle MPR=\measuredangle MBP$. Бидејќи и $\measuredangle PSC=\measuredangle MBP$ (периферискi агли над ист лак), добиваме $\measuredangle PSC=\measuredangle MPR$, од каде што следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Нека $H=AB\cap PS$ и $Z=AR\cap PB$. Од теоремата на Чева, применета на $\triangle ABP$ следува $\frac{\overline{AM}}{\overline{MP}}\cdot\frac{\overline{PZ}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{BH}}{\overline{HA}}=1$. Бидејќи $\frac{\overline{AM}}{\overline{MP}}=1$, добиваме $\frac{\overline{PZ}}{\overline{ZB}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$, па заклучуваме дека правите ZH и PA се паралелни.



Според тоа, $\measuredangle PAZ = \measuredangle HZA$. Од друга страна, аголот меѓу тетивата AR и тангентата AP е еднаков на периферискиот агол над тетивата AR, па важи $\measuredangle PAZ = \measuredangle ABR$. Значи, $\measuredangle RZH = \measuredangle RBH$, што значи дека четириаголникот $BZRH$ е тетивен и $\measuredangle ZHR = \measuredangle RBZ$. Бидејќи и $\measuredangle RBZ = \measuredangle RSC$ добиваме $\measuredangle RHZ = \measuredangle RSC$, па затоа правите ZH и CS се паралелни, што значи дека и правите PA и CS се паралелни.

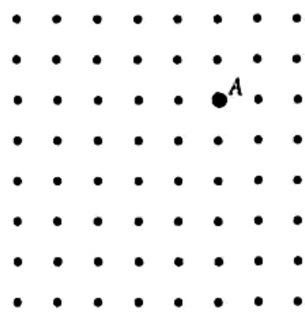
3. Докажи дека:

а) Постојат пет точки во рамнината такви што меѓу сите триаголници со темиња во овие точки постојат 8 правоаголни триаголници.

б) Постојат 64 точки во рамнината такви што меѓу сите триаголници со темиња во овие точки има најмалку 2005 правоаголни триаголници.

Решение. а) Такви точки се темињата на еден квадртат и неговиот центар (пресекот на неговите дијагонали).

б) *Прв начин*. Разгледуваме квадрат 7×7 поделен на единечни квадрати и 64 точки кои се темиња на овие квадрати (цртеж десно). На цртежот имаме $\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 784$ правоаголници со страни на линиите на мрежата. Секој од овие правоаголници определува 4 различни правоаголни триаголници (со темиња во темињата на правоаголникот). Различните правоаголници определуваат различни триаголници. На тој начин се добиваат $4 \cdot 784 = 3136 > 2005$ различни правоаголни триаголници со темиња во дадените точки. (Јасно е дека има и други правоаголни триаголници кои не се пребројани со оваа постапка.)



Втор начин. Ја разгледуваме истата конфигурација како погоре. Да земеме било која од дадените 64 точки. Нека тоа е точката A. Две точки, од кои едната е во ист ред, а другата во иста колона со точката A формираат правоаголен триаголник со прав агол во темето A. Бидејќи точката во ист ред со точката A може да се избере на 7 налчини, а на исто толку начини може да се избере и точката која е во иста колона со точката A, најдовме $7 \cdot 7 = 49$ различни правоаголни триаголници со теме на правиот агол во точката A. Бидејќи овој број е ист за секоја од дадените 64 точки, на овој начин добивме $49 \cdot 64 = 3136$ различни правоаголни триаголници со темиња во дадените точки.

4. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$ такви што $\overline{abc}=abc(a+b+c)$, каде $\overline{abc}$ е декадниот запис на бројот.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$9(11a+b)=(a+b+c)(abc-1),$$

каде a,b,c се едноцифрени позитивни броеви. Ако $a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$ и $abc-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$, тогаш $a\equiv b\equiv c\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ и $11a+b\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. Според тоа, $a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$, т.е. $11a+b\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$. Значи,

$$a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,9) \text{ или } abc-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,9).$$

1) Ако $abc-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$, тогаш $11a+b=(a+b+c)k$, каде k е природен број и $1<k<10$. Според тоа, треба да ги испитаме случаите $k\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ако $k\in\{2,4,5,6,8,9\}$, тогаш бројот $9k+1=abc$ има прост делител поголем од 9, што не е можно.
   Ако $k=3$, тогаш $8a=2b+3c$ и $abc=28$. Јасно, c е парен број, $c=2c_1$ и важи $4a+b=3c_1$ и $abc_1=14$. Лесно се гледа дека b и c_1 се непарни, па постојат две можности: $a=2, b=7, c_1=1$ и $a=2, b=1,$ $c_1=7$. Во ниту еден од овие два случаи немаме решение на задачата.
   Ако $k=7$, тогаш $4a=6b+7c$ и $abc=64$. Јасно, Јасно, c е парен број, $c=2c_1$ и важи $2a=3b+7c_1$ и $abc_1=32$. Лесно се гледа дека b и c_1 мора да се парни броеви. Но, тоа не е можно бидејќи во тој случај $a>9$. Значи, и во овој случај задачата нема решение.
2) Нека $a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$, т.е. $a+b+c=9l$, каде l е природен број. Ако $l\geq 2$, тогаш $a+b+c\geq 18$ и $\max\{a,b,c\}\geq 6$ и лесно се гледа дека $abc\geq 72$ и $abc(a+b+c)>1000$, па затоа случајот $l\geq 2$ не е можен. Ако $l=1$, тогаш $11a+b=abc-1$, па затоа

$$11a+b+1=abc\geq(\tfrac{a+b+c}{3})^3=27.$$

   Сега постојат две можности: $a=1$ и $a=2$. Ако $a=2$, тогаш добиваме $b(2c-1)=23$, што не е можно. Ако $a=1$, тогаш $b+c=8$ и $11+b=bc-1$. Значи, $b+(c-1)=7$ и $b(c-1)=12$ и решенија се $(a,b,c)=(1,3,5)$ и $(a,b,c)=(1,4,4)$. Конечно, бараните трицифрени броеви се 144 и 135.