О ЈЕДНОЈ ДВОСТРУКОЈ НЕЈЕДНАКОСТИ Д. С. МИТРИНОВИЋА

Шефкет Арсланагић, Сарајево

У спомен на великог српског математичара
Драгослава С. Митриновића

Драгослав С. Митриновић је рођен у Смедереву 23. јуна 1908. године. Његов отац, познати судија, умро је када је Драгослав имао само седам година. Током година првог светског рата млади Драгослав је постао стуб породице, те је, као сасвим млад, научио је и схватио како се самостално треба пробијати кроз живот.

Основну школу и првих пет разреда гимназије завршио је у Врању. Био је немирног духа, због чега је био приморан да задња три разреда гимназије полаже као приватни ученик и то: VI у Лесковцу, VII у Нишу и VIII у Приштини, где је и матурирао 1928. године. Исте године уписује студије математике на Филозофском факултету Универзитета у Београду. Дипломирао је 1932. године. Врло брзо након тога, као врсни студент професора Михаила Петровића – Аласа, докторирао је 24. октобра 1933. године из области диференцијалних једначина првог реда. Теза је примљена за докторски испит на седници Филозофског факултета Универзитета у Београду 12. октобра 1933. године на основу позитивног реферата чланова испитне комисије у саставу: др Михаило Петровић, редовни професор, др Никола Салтиков, редовни професор и др Тадија Пејовић, ванредни професор.

Све до 1946. године Драгослав Митриновић је радио као професор гимназије. Иако строг, био је омиљен код својих ученика. Током тог периода објавио је око 50 научних радова, углавном из области диференцијалних једначина. Био је веома близак сарадник Михаила Петровића.

Од 1946. па до пензионисања 1978. године радио је као професор универзитета у Скопљу и Београду. Дао је велики допринос настави математике, као и математици уопште, како на Филозофском факултету у Скопљу, тако и на Електротехничком факултету у Београду. Био је члан Македонске академије наука и уметности од 1991. године.

Самостално или са коауторима објавио је велики број научних радова, књига и монографија из разних области математике. Укупна библиографија Драгослава Митриновића садржи 373 јединице. Од тога је 279 научних радова, 30 стручних радова, 17 монографија, 35 уџбеника и 12 других књига. Радове је објављивао у домаћим и међународним часописима, а књиге и монографије код домаћих, али и код познатих светских издавача.

Професор Митриновић је био веома комуникативна особа. Одржавао је везе са великим бројем угледних светских научника. Навођење имена свих оних с којима је сарађивао, заузело би превелики простор. Само коаутора има 45 и то из 15 држава. Основао је три математичка часописа у

СФР Југославији и покренуо издавање више математичких едиција у земљи и иностранству. Створио је, у свету познату, Београдску школу функционалних једначина.

Под његовим руководством израђено је преко 30 докторских дисертација на универзитетима у Скопљу, Београду, Нишу, Приштини, Крагујевцу и Сарајеву. За своју свеобухватну делатност добио је многа значајна признања и одликовања у Македонији и Србији.

Умро је у Београду, 2. априла 1995. године.

Овај мој чланак инспирисан је осећајем најискренијег поштовања према лику и делу професора Митриновића. Као млад професор математике у гимназији у родном граду Требињу, почетком седамдесетих година прошлог века, почео сам да се бавим алгебарским и геометријским неједнакостима. Детаљно сам проучавао књиге [1] - [7] чији је аутор или један од кооаутора био уважени професор Митриновић. Посебно сам поносан што су у некима цитирани и моји резултати; 14 пута у [6] и 4 пута у [7].

Ове књиге и многи научни радови објављени у часопису Публикације Електротехничког факултета Универзитета у Београду, Серија Математика-Физика, одиграли су изузетно важну улогу у мом образовању и напредовању у области неједнакости.

У даљем тексту користићемо следеће стандардне ознаке за елементе ΔABC:

a, b, c – странице; α, β, γ – углови CAB, ABC, BCA, редом;

$s = \frac{a+b+c}{2}$ – полуобим; P – површина;

R – полупречник описане кружнице; r – полупречник уписане кружнице;

$r_a,\ r_b,\ r_c$ – полупречници споља уписаних кружницу углове α, β, γ, редом.

Следећа двострука геометријска неједнакост, чији је аутор Д. С. Митриновић, објављена је у књизи [1].

Теорема 1. (Д. С. Митриновић, 1965) *У ΔABC важи неједнакост*

$$3\sqrt{3}r \leq s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R. \qquad (1)$$

Доказ аутора (преузет из [1]).

1^0 $s \geq 3\sqrt{3}r$. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине три позитивна броја, имамо

$$\frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{3} \geq \sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\ .$$

(Сваки од сабирака $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ је позитиван, јер је збир две странице троугла већи од треће.)

То је еквивалентно са

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\,,$$

односно са

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\,.$$

Множењем леве и десне стране са $27(a+b+c)$, добијамо

$$(a+b+c)^4 \geq 27(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Из тога даље следи

$$(2s)^4 \geq 27 \cdot 2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c),$$

$$s^4 \geq 27s(s-a)(s-b)(s-c).$$

По Хероновој формули је $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = P$, па имамо

$$s^4 \geq 27P^2.$$

Како је, такође, $P = rs$, следи

$$s^4 \geq 27r^2s^2,$$

$$s^2 \geq 27r^2$$

и коначно

$$s \geq 3\sqrt{3}r.$$

2^0 $s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$. На основу синусне теореме имамо

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma}{2}$$

$$= R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma). \qquad (2)$$

Како је $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (види 2.2.2 у [2], стр. 122 или 2.2 у [4], стр. 18), из (2) следи

$$s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R.$$

Овим је неједнакост (1) доказана.

□

Није тешко видети да у неједнакости (1) важи једнакост ако и само ако је $a = b = c$, односно $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$, тј. кад је ΔABC једнакостранични.

Сад ћемо представити још један доказ неједнакости (1).
Доказ неједнакости (1) (Ш. Арсланагић).

1^0 $s \geq 3\sqrt{3}r$. Користићемо познате формуле које повезују полупречнике уписаних кружница у троугао, његов полуобим и површину.

$$r_a = \frac{P}{s-a},\ r_b = \frac{P}{s-b},\ r_c = \frac{P}{s-c}. \qquad (3)$$

Одавде је

$$\frac{1}{r_a} = \frac{s-a}{P},\ \frac{1}{r_b} = \frac{s-b}{P},\ \frac{1}{r_c} = \frac{s-c}{P}.$$

С обзиром да је $P = rs$ и $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, добијамо

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{P} = \frac{s}{rs} = \frac{1}{r} \qquad (4)$$

и

$$\frac{1}{r_a r_b r_c} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{P^3} = \frac{\frac{P^2}{s}}{P^3} = \frac{1}{sP} = \frac{1}{rs^2} \qquad (5)$$

Користећи неједнакост аритметичке и геометријске средине три позитивна броја имамо да је

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{r_a r_b r_c}},$$

односно

$$\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right)^3 \geq 27\frac{1}{r_a r_b r_c}.$$

С обзиром на (4) и (5), то даје

$$\left(\frac{1}{r}\right)^3 \geq 27\frac{1}{rs^2},$$

$$\frac{1}{r^2} \geq \frac{27}{s^2},$$

$$s^2 \geq 27r^2$$

и коначно

$$s \geq 3\sqrt{3}r. \qquad (6)$$

$2^0 \;\; s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$. Из (3) и формуле $P = rs$ имамо

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{P}{s-a} + \frac{P}{s-b} + \frac{P}{s-c} - \frac{P}{s}$$

$$= P\left(\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)} + \frac{s-s+c}{s(s-c)}\right).$$

Како је $2s = a + b + c$, то се може трансформисати у

$$P\left(\frac{c}{(s-a)(s-b)} + \frac{c}{s(s-c)}\right) = Pc\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{s(s-c)}\right)$$

$$= Pc\ \frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= Pc\ \frac{2s^2-(a+b+c)s+ab}{P^2}$$

$$= Pc\ \frac{ab}{P^2} = \frac{abc}{P}\ .$$

По познатој фомули је $P = \frac{abc}{4R}$, те је

$$\frac{abc}{P} = \frac{4RP}{P} = 4R.$$

Тако је $r_a + r_b + r_c - r = 4R$ и према томе

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \tag{7}$$

С друге стране, из (3), $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ и $2s = a + b + c$ следи

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{P}{s-a}\cdot\frac{P}{s-b} + \frac{P}{s-b}\cdot\frac{P}{s-c} + \frac{P}{s-c}\cdot\frac{P}{s-a}$$

$$= P^2\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)}\right)$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)}\right)$$

$$= s(s-c) + s(s-a) + s(s-b)$$

$$= 3s^2 - (a+b+c)s = s^2,$$

односно

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = s^2. \tag{8}$$

Ако су x, y, z произвољни реални бројеви, очигледно је

$$\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\geq 0.$$

Након квадрирања, та се неједнакост једноставно преводи у

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx).$$

Стављајући $x=r_a$, $y=r_b$, $z=r_c$, добијамо

$$(r_a+r_b+r_c)^2 \geq 3(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a),$$

односно, због (7) и (8), у

$$(4R+r)^2 \geq 3s^2$$

и

$$4R+r \geq s\sqrt{3}\ .$$

Сабирајући последњу и неједнакост (6), написану у облику $\frac{s}{3\sqrt{3}} \geq r$, добијамо

$$4R+r+\frac{s}{3\sqrt{3}} \geq s\sqrt{3}+r\ ,$$

$$4R+\frac{s}{3\sqrt{3}} \geq s\sqrt{3}\ ,$$

$$4R \geq s\sqrt{3}-\frac{s}{3\sqrt{3}}\ ,$$

$$4R \geq \frac{8s}{3\sqrt{3}}$$

и најзад

$$s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R.$$

Тиме је доказ неједнакости (1) завршен.

□

Показаћемо, даље, да се "лева" страна Митриновићеве неједнакости (1) може незнатно поправити. У ту сврху, доказаћемо следеће тврђење.

Теорема 2. (Ш. Арсланагић, 2017) *У ΔABC важи неједнакост*

$$s^2 \geq \frac{27}{2}Rr. \tag{9}$$

Доказ. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине три позитивна броја и чињеница да је $2s=a+b+c$ и $P=rs=\frac{abc}{4R}$, добијамо

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}\ ,$$

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc,$$

$$(2s)^3 \geq 27 \cdot 4RP,$$

$$8s^3 \geq 27 \cdot 4R \cdot rs$$

и коначно

$$s^2 \geq \frac{27}{2}Rr.$$

□

Као раније, у (9) важи једнакост ако и само ако је $a = b = c$, тј. ако и само ако је ΔABC једнакостранични.

Међутим, неједнакост (9) је боља од Митриновићеве $s \geq 3\sqrt{3}r$. Објашњење је следеће. Из (9) следи

$$s \geq 3\sqrt{\frac{3}{2}Rr}\ .$$

На основу Ојлерове неједнакости $R \geq 2r$ (једнакост важи ако и само ако је ΔABC једнакостранични) добијамо

$$3\sqrt{\frac{3}{2}Rr} \geq 3\sqrt{\frac{3}{2}2r \cdot r} = 3\sqrt{3}r.$$

То значи да се доње границе у неједнакостима (9) и (1) поклапају само у случају једнакостраничног ΔABC. У свим осталим је $3\sqrt{\frac{3}{2}Rr} > 3\sqrt{3}r$, те је неједнакост (9) боља од неједнакости (1).

На крају ћемо показати још једну неједнакост о полуобиму троугла.

Теорема 3. (Ш. Арсланагић, 2017) *У* ΔABC *важи неједнакост*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} > 3r. \qquad (10)$$

Доказ. Користећи познату неједнакост

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

која директно следи из $\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \geq 0$, добијамо

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{ab+bc+ca}{2s}\ .$$

Како је $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = rs$, имамо

$$\frac{ab+bc+ca}{2s} = \frac{\frac{2P}{\sin\alpha}+\frac{2P}{\sin\beta}+\frac{2P}{\sin\gamma}}{2s}$$
$$= \frac{P}{s}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)$$
$$> \frac{rs}{s}(1+1+1) = 3r.$$

Отуда је $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} > 3r.$

□

Пошто је у (10) строга неједнакост, поставља се оправдано питање да ли се неједнакост (10) може побољшати, тј. да ли се доња граница $3r$ може повећати. Показаћемо да може.

Користећи неједнакост квадратне и аритметичке средине за три позитивна броја имамо

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3},$$

одакле је

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3},$$

односно

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

С обзиром да је $a + b + c = 2s$ и, због (1), $s \geq 3\sqrt{3}r$, даље имамо

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{2s}{3} \geq \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}r. \tag{11}$$

Како је $2\sqrt{3} > 3$ и према томе $2\sqrt{3}r > 3r$, неједнакост (11) је боља (јача) од неједнакости (10).

Како у (11) важи једнакост ако и само ако је $a = b = c$, тј. ΔABC једнакостраничан, неједнакост (11) је најбоља могућа.

Литература

[1] Д. С. Митриновић, П. М. Васић, Р. Ж. Ђорђевић, Р. Р. Јанић, *Приручник за такмичења средњошколаца у математици*, II Геометријске неједнакости, Математичка библиотека, Свеска 32, Завод за издавање уџбеника, СР Србија, Београд, 1966.

[2] Д. С. Митриновић, *Неједнакости*, ИП Грађевинска књига, Београд, 1965.

[3] Д. С. Митриновић, П. М. Васић, *Средине*, Математичка библиотека, Свеска 40, Завод за издавање уџбеника, СР Србија, Београд, 1969.

[4] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[5] Д. С. Митриновић, (сарадник П. М. Васић), *Аналитичке неједнакости*, ИП Грађевинска књига, Београд, 1970.

[6] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht /Boston/London, 1989. (резултати Ш. Арсланагића цитирани 14 пута)

[7] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht /Boston/London, 1993. (резултати Ш. Арсланагића цитирани 4 пута)

[8] Ш. Арсланагић, , *Математика за надарене*, Босанска ријеч, Сарајево, 2005.

[9] M. Chirciu, *Inegalitati Geometrice*, Editura Paralela 45, Pitesti (Romania), 2015.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2017/18 година