Регионален натпревар 2015

I година

1АБ. Ако $xyz=1$, докажи дека

$$(x+\tfrac{1}{x})^2+(y+\tfrac{1}{y})^2+(z+\tfrac{1}{z})^2-(x+\tfrac{1}{x})(y+\tfrac{1}{y})(z+\tfrac{1}{z})=4\,.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
&(x+\tfrac{1}{x})^2+(y+\tfrac{1}{y})^2+(z+\tfrac{1}{z})^2-(x+\tfrac{1}{x})(y+\tfrac{1}{y})(z+\tfrac{1}{z})=\\
&=(x+yz)^2+(y+xz)^2+(z+xy)^2-(x+yz)(y+xz)(z+xy)\\
&=x^2+2xyz+y^2z^2+y^2+2xyz+x^2z^2+z^2+2xyz+x^2y^2-\\
&\quad-(xyz+x^2y^2+x^2z^2+x^3yz+y^2z^2+xy^3z+z^2+xyz)\\
&=6+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2-(2+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)\\
&=4.
\end{aligned}$$

2АБ. Нека a и b се природни броеви такви што бројот 24 е делител на бројот $ab+1$. Докажи дека $a+b$ е делив со 24.

Решение. Броевите 3 и 8 се заемно прости. Доволно е да се докаже дека $a+b$ е делив со 3 и 8. Од условот на задачата бројот ab при делење со 3 има остаток 2. Тоа е можно ако бројот a при делење со 3 има остаток 2 а бројот b при делење со 3 има остаток 1 или обратно. Во секој случај добиваме дека $3\,|\,a+b$.

Исто така, од условот на задачата бројот ab при делење со 8 има остаток 7. Тоа е можно во два случаи.

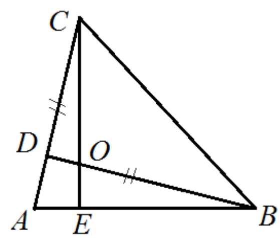
Случај 1. Бројот a при делење со 8 има остаток 1 а бројот b при делење со 8 има остаток 7 или обратно. Во двете можности $8\,|\,a+b$.

Случај 2. Бројот a при делење со 8 има остаток 3 а бројот b при делење со 8 има остаток 5 или обратно. Во двете можности $8\,|\,a+b$.

Конечно, од $3\,|\,a+b$, $8\,|\,a+b$ и $\mathrm{NZD}(3,8)=1$ следува $24\,|\,a+b$.

3А. Висините на остроаголниот триаголник ABC се сечат во точката O, при што $\overline{OC}=\overline{AB}$. Определи го аголот ACB ?

Решение. Нека подножјето на висината од B ја означиме со D, а на онаа од C со E. Тогаш триаголникот ABD е складен со триаголникот OCD (правоаголни, $\overline{OC}=\overline{AB}$ од условот на задачата, и $\measuredangle ABD=\measuredangle ACE$ како агли со нормални краци). Од овде следува $\overline{BD}=\overline{CD}$, па триаголникот BCD е рамнокрак право-



аголен. Така, $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB = \measuredangle CBD = 45^\circ$.

3Б. Бојан му вели на Павел: "Јас имам 2 пати повеќе години отколку што имаше ти кога јас имав толку години колку што имаш ти сега. Кога ти ќе имаш толку години колку јас сега, тогаш збирот на нашите години ќе е 63." Колку години има секој од нив?

Решение. Ако со x ги означиме годините на Бојан, а со y годините на Павел, тогаш од условите на задачата го составуваме следниов систем линеарни равенки:

$$\begin{cases} x = 2(y-(x-y)) \\ x+(x+(x-y)) = 63 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x-4y=0 \\ 3x-y=63 \end{cases}.$$

Ако го решиме овој систем, добиваме дека Бојан има 28, а Павел 21 година.

4А. Најди го најголемиот природен број којшто е помал од збирот на квадратите на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{a_n ... a_1 a_0}$ е бараниот број, односно

$$a_n \cdot 10^n + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + ... + a_1^2 + a_0^2.$$

Тогаш $a_n(10^n - a_n) + ... + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) < 0$. Сите собирци освен последниот на левата страна се позитивни, а $a_0(1-a_0) \geq -72$. Ако барем една цифра a_k за $k \geq 2$ е различна од нула (бројот е барем трицифрен), тогаш $a_k(10^k - a_k) > 10^k - 9 > 90$, а тоа значи дека сумата од левата страна е позитивна. Според тоа, тој број мора да е помал од 100. Бидејќи $99 < 9^2 + 9^2$, бројот 99 е бараниоо број.

4Б Плоштината на основата на една права триаголна призма е еднаква на $4cm^2$, а плоштините на бочните површини се еднакви на 9, 10 и $17cm^2$. Определи го волуменот на призмата.

Решение: Нека a,b,c се должините на страните на основата на призмата, $s = \frac{a+b+c}{2}$ е полупериметарот на основата а h е нејзината висина. Од условот имаме

$$a = \frac{9}{h}, b = \frac{10}{h}, c = \frac{17}{h} \text{ и } \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4.$$

Со замена за a,b,c во последното равенство имаме

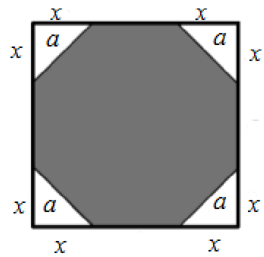
$$\sqrt{\frac{18}{h} \cdot \frac{9}{h} \cdot \frac{8}{h} \cdot \frac{1}{h}} = 4 \Rightarrow 16h^2 = 18 \cdot 9 \cdot 8 \Rightarrow \Rightarrow h = 9.$$

Конечно, $V = Bh = 4 \cdot 9 = 36cm^2$.

II година

1АБ. Правилен осумаголник со должина на страна a е вписан во квадрат со страна 1, како што е прикажано на цртежот. Докажи дека $a^2+2a=1$.

Решение. Квадратот е составен од осумаголник и четири рамнокраки правоаголни триаголници, со хипотенуза a и катети $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Според тоа, од страната на квадратот имаме



$$a+2\frac{a}{\sqrt{2}}=1,\ a(\sqrt{2}+1)=1,$$

т.е.

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1.$$

Сега,

$$a^2+2a=(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)$$
$$=2-2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-2=1,$$

што требаше да се докаже.

2А. Ако секој корен на равенката $x^2+px+q=0$ се зголеми за 1, се добиваат корените на равенката $x^2-p^2x+pq=0$. Определи ги p и q.

Решение. Од Виетовите формули за првата равенка имаме $\alpha+\beta=-p$ и $\alpha\beta=q$, а за втората $\alpha+\beta+2=p^2$ и $(\alpha+1)(\beta+1)=pq$. Значи, $p^2+p-2=0$ и $q+p^2-1=pq$. Од првата равенка добиваме $p_1=1, p_2=-2$, а втората е еквивалентна со $(p-1)q=p^2-1$. Ако $p=1$, тогаш q е произволен реален број. Ако $p=-2$ тогаш $q=-1$.

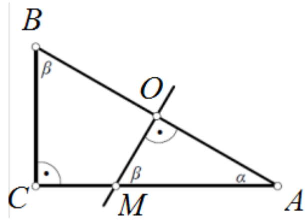
2Б. Ако секој корен на $x^2+3x-7=0$ се зголеми за реципрочната вредност на другиот корен, се добиваат корените на равенката $2x^2+ax+b=0$. Определи ги a и b.

Решение. Нека α и β се корените на $x^2+3x-7=0$. Тогаш за нив важи $\alpha+\beta=-3$ и $\alpha\beta=-7$. Според условот, корени на $2x^2+ax+b=0$ се $\alpha+\frac{1}{\beta}$ и $\beta+\frac{1}{\alpha}$. Тогаш:

$$a=-2(\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha})=2(-(-3)-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})=2(3-\frac{-3}{-7})=\frac{36}{7}\ \text{и}$$

$$b=2(\alpha+\frac{1}{\beta})(\beta+\frac{1}{\alpha})=2(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2)=2(-7-\frac{1}{7}+2)=-\frac{72}{7}.$$

3АБ. Во правоаголниот триаголник ABC на катетата AC е избрана точка M така што $\overline{AM} = 2\overline{MC}$. Определи го најмалиот агол на триаголникот ABC, ако M лежи на симетралата на хипотенузата AB.



Решение. Со O ќе ја означиме средината на хипотенузата AB. Од условот на задачата правата OM е симетрала на AB. Јасно е дека триаголникот OMA е сличен со триаголникот BCA (имаат исти агли). Ќе воведеме стандардни ознаки $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$. Тогаш, повторно од условот на задачата, $\overline{OA} = \frac{1}{2}c$ и $\overline{AM} = \frac{2}{3}b$. Заради горната сличност имаме

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}b}{c} = \frac{\frac{1}{2}c}{b} \Rightarrow \frac{1}{2}c^2 = \frac{2}{3}b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{3}{4}.$$

Бидејќи триаголникот ABC е правоаголен, имаме $\cos^2\alpha = \frac{b^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \alpha = 30^\circ$. Значи, аглите во триаголникот се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, а најмалиот меѓу нив има 30°.

4А. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} xyz = x + y + z \\ yzt = y + z + t \\ ztu = z + t + u \\ tux = t + u + x \end{cases} \text{в.}$$

Решение. Од првата равенка ја одземаме втората и добиваме $yz(x-t) = x-t$, односно $(yz-1)(x-t) = 0$. Можни случаи се $yz-1=0$ или $x-t=0$. Ако $yz-1=0$ со замена во првата равенка добиваме $0 = y+z$. Тогаш, од $yz-1=0$ и $y+z=0$ следува дека $y^2 = -1$, па во овој случај немаме решение. Затоа, важи $x-t=0$, т.е. $x=t$. Ако се повтори постапката со втората и третата равенка, како и со третата и четвртата добиваме $x=t=y=z$. Тогаш, $x^3 = 3x$, $x(x^2-3)=0$ и оттука множеството решенија на системот е $\{(0,0,0,0),(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})\}$.

4Б. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} \frac{3xy}{x+y} = 5 \\ \frac{2xz}{x+z} = 3 \\ \frac{yz}{y+z} = 4 \end{cases}.$$

Решение. Бидејќи $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, дадениот систем е еквивалентен со

$$\begin{cases} \frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 5 \\ \frac{2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} = 3 \\ \frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 4 \end{cases}, \text{ односно со } \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x} = \frac{3}{5} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Тогаш, ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{15}$. Од $\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$ добиваме $\frac{1}{y}=\frac{11}{120}$ и $\frac{1}{z}=\frac{19}{120}$. Тогаш $\frac{1}{x}=\frac{3}{5}-\frac{11}{120}=\frac{61}{120}$. Конечно, $x=\frac{120}{61}$, $y=\frac{120}{11}$ и $z=\frac{120}{19}$.

III година

1АБ. За реалните броеви $x,\ y \in (0,\pi)$ е исполнето равенството

$$\cos 2x \cos y - \cos 2y \cos x = \cos y - \cos x .$$

Докажи дека $x = y$.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$\cos y(1-\cos 2x) - \cos x(1-\cos 2y) = 0 .$$

Заради равенствата $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ и $1-\cos 2y = 2\sin^2 y$, последното равенство го добива обликот

$$\cos y \sin^2 x - \cos x \sin^2 y = 0 ,$$

а заради основната тригонометриска релација, обликот

$$\cos y \cos^2 x - \cos x \cos^2 y = \cos y - \cos x$$
$$\cos y \cos x(\cos x - \cos y) = \cos y - \cos x.$$

Конечно тоа може да се запише во облик

$$(\cos y - \cos x)(\cos x \cos y + 1) = 0 .$$

Но, $x, y \in (0,\pi)$, па $\cos x \cos y + 1 > 0$, и според тоа

$$\cos y - \cos x = 0 , \qquad (1)$$

т.е. $\cos x = \cos y$. Функцијата $f(t) = \cos t$ на интервалот $(0,\pi)$ е монотоно опаѓачка, па равенството $\cos x = \cos y$ е можно само ако $x = y$.

Забелешка. Решението од (1) може да продолжи со примена на равенството

$$\cos y - \cos x = -2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{y-x}{2} .$$

2А. Нека важи $0 < x < 1$ и $a,b > 0$. Докажи дека

$$a^x b^{1-x} < a + b . \qquad (1)$$

Решение. Нека препоставиме дека $b \le a$. Ако го поделиме неравенството (1) со a, добиваме $(\frac{b}{a})^{1-x} < 1+\frac{b}{a}$, односно

$$(\frac{b}{a})^{1-x}(1-(\frac{b}{a})^{x}) < 1. \qquad (2)$$

Бидејќи $0 < \frac{b}{a} \le 1$ и $0 \le 1-(\frac{b}{a})^{x} < 1$, неравенството (2) е точно, а со тоа и еквивалентното неравенство (1) во случај кога $b \le a$. Нека сега $a < b$. Го делиме неравенството (1) со b и добиваме $(\frac{a}{b})^{x} < 1+\frac{a}{b}$. Нека $y = 1-x$. Тогаш $0 < y < 1$ и последното неравенство го добива видот $(\frac{a}{b})^{1-y} < 1+\frac{a}{b}$, каде $a < b$, за кое веќе покажавме дека е точно.

3А. Реши ја равенката

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x = 2 .$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во обликот $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$. Да забележиме дека $\cos^5 x \le \cos^2 x,\ \sin^5 x \le \sin^2 x$. Оттука добиваме дека за левата страна на последното равенство важи

$$\sin^5 x + \cos^5 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Од друга страна, за десната страна имаме $2-\sin^4 x \ge 1$, па затоа дадената равенка е еквивалентна на системот равенки:

$$\begin{cases} \sin^5 x + \cos^5 x = 1 \\ 2 - \sin^4 x = 1 \end{cases}.$$

Од втората равенка имаме $\sin x = \pm 1$, па затоа

$$\cos^5 x = 0 \text{ или } \cos^5 x = 2 .$$

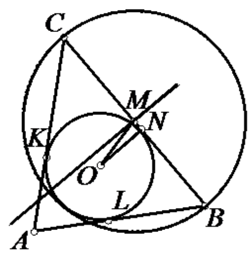
Од последниве равенки ги добиваме бараните решенија во облик

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z} .$$

4АБ. Страната BC на триаголникот ABC има должина a а радиусот на впишаната кружница r. Определи ја плоштината на триаголникот, ако впишаната кружница ја допира кружницата со дијаметар BC.

Решение. Нека O е центар на впишаната кружница, а M е средина на отсечката BC. Нека кружницата k впишана во триаголникот ABC ги допира страните AC, AB и BC во точките K, L и N соодветно. Ќе воведеме ознаки

$$\overline{AK} = \overline{AL} = x,\ \overline{CK} = \overline{CN} = y \text{ и } \overline{BL} = \overline{BN} = z .$$



Притоа, од условот на задачата имаме $\overline{OM} = \frac{a}{2} - r$ и

$y+z=a$. Но тогаш

$$\overline{NM}=\sqrt{\overline{OM}^2-\overline{ON}^2}=\sqrt{(\tfrac{a}{2}-r)^2-r^2}=\sqrt{\tfrac{a^2}{4}-ar}\,,$$

од каде што следува дека едната од отсечките y и z има должина $\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$ а другата $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$.

Од Хероновата формула имаме $P=\sqrt{(x+y+z)xyz}$, а од формулата $P=sr$, каде $s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$, имаме $P=(x+y+z)r$. Според тоа

$$\sqrt{(x+y+z)xyz}=(x+y+z)r\,, \qquad xyz=(x+a)r^2, \qquad arx=(x+a)r^2$$

Од последното равенство имаме $x=\frac{ar}{a-r}$, па за плоштината добиваме

$$P=(x+y+z)r=(x+a)r=(\tfrac{ar}{a-r}+a)r=\tfrac{a^2r}{a-r}\,.$$

2Б. Реши ја равенката:

$$\log_{\frac{1}{8}}(2x)-4\log_{\frac{1}{4}}x\cdot\log_8 x=0\,.$$

Решение. Имајќи во предвид дека

$$\log_{\frac{1}{8}}(2x)=\log_{\frac{1}{8}}2+\log_{\frac{1}{8}}x=-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}x\,,\ \log_{\frac{1}{4}}x=\tfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x \text{ и } \log_8 x=-\tfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}x\,,$$

равенката ја запишуваме во обликот: $2\log^2_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}x-1=0$. Решенијата на последната равенка се $\log_{\frac{1}{2}}x_1=\frac{1}{2}$ и $\log_{\frac{1}{2}}x_2=-1$, од каде добиваме $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2=2$.

3Б. Реши ја неравенката:

$$\frac{1}{2^{2x}+3}\geq\frac{1}{2^{x+2}-1}\,.$$

Решение. Левата страна на неравенката е дефинирана и позитивна за секој реален број x, додека десната страна е дефинирана за секој број $x\neq-2$, при што изразот може да добие и негативни вредности. Тогаш

1) Ако десната страна е негативна односно ако $2^{x+2}<1$, неравенството е исполнето за секое $x<-2$.

2) Ако $x>-2$ тогаш равенката е еквивалентна со неравенка $2^{2x}+3\leq2^{x+2}-1$, односно со неравенската $2^{2x}-4\cdot2^x+4\leq0$. Воцедуваме смена $2^{2x}=t$, со која неравенката го добива обликот $t^2-4t+4\leq0$ или $(t-2)^2\leq0$. Нејзино единствено решение е $t=2$ односно $x=1$.

Конечно, решението на почетната неравенка е $x\in(-\infty,-2)\cup\{1\}$.

IV година

1А. Одреди го 2015-от член во низата $1,2,-2,3,-3,3,4,-4,4,-4,5,-5,5,-5,5,\ldots$

Решение. Нека 2015-от член во низата е бројот k. Да забележиме дека последното појавување во низата на број со апсолутна вредност 2 има реден број 3; на број со апсолутна вредност 3 има реден број 6; на број со апсолутна вредност 4 има реден број 10 итн. Лесно се докажува дека последното појавување на број чија апсолутна вредност е k има реден број $\frac{k(k+1)}{2}$. Бидејќи $\frac{62\cdot63}{2}=1953$ и $\frac{63\cdot64}{2}=2016$, следува дека на 2015-та позиција во низата е бројот

$$(-1)^{2015-1953+1}63=-63.$$

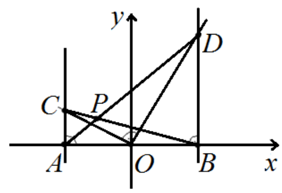
1Б. Пресметај го производот

$$P=(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{2^2})(1+\tfrac{1}{2^4})(1+\tfrac{1}{2^8})\cdot\ldots\cdot(1+\tfrac{1}{2^{2^n}}).$$

Решение. Множејќи ги двете страни на равенството со $1-\frac{1}{2}$ и користејќи ја формулата за разлика на квадрати, добиваме $(1-\frac{1}{2})P=1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$. Оттука следува дека $P=2(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})$.

2А. Дадени се точките $A(-2,0)$ и $B(2,0)$. Точките C и D припаѓаат на нормалите на отсечката AB во точките A и B соодветно, при што $\measuredangle COD$ е прав. Одреди го геометриското место на точки на пресекот на правите AD и BC.

Решение. Нека точката C има координати $C(-2,c)$. Равенката на правата OC е $y=-\frac{c}{2}x$. Бидејќи $\measuredangle COD$ е прав, равенката на правата OD е $y=\frac{2}{c}x$ и точката D има координати $D(2,\frac{4}{c})$. Равенката на правата AD е $y=\frac{1}{c}(x+2)$, додека на правата BC е $y=-\frac{c}{4}(x-2)$.



Координатите на пресечната точка P, на правите AD и BC, се решение на системот

$$\begin{cases} y=\frac{1}{c}(x+2) \\ y=-\frac{c}{4}(x-2). \end{cases}$$

Со елиминација на параметарот c од равенките, се добива равенката $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Конечно, од произволноста на $\boldsymbol{c}$, следува дека геометриското место е елипсата

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

2Б. Дадена е аритметичка прогресија. Нека S_n, S_{2n}, S_{3n} се збировите на првите $n, 2n, 3n$ членови на оваа прогресија, соодветно. Докажи, дека $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$

Решение. Имаме

$$a_{2n}=a_1+(2n-1)d=a_1+(n-1)d+nd=a_n+nd$$

$$a_{3n}=a_1+(3n-1)d=a_1+(n-1)d+2nd=a_n+2nd,$$

па затоа

$$S_n=\tfrac{n}{2}(a_1+a_n),$$

$$S_{2n}=\tfrac{2n}{2}(a_1+a_{2n})=n(a_1+a_n+nd)=n(\tfrac{2S_n}{n}+nd)=2S_n+n^2d,$$

$$S_{3n}=\tfrac{3n}{2}(a_1+a_{3n})=\tfrac{3n}{2}(a_1+a_n+2nd)=\tfrac{3n}{2}(\tfrac{2S_n}{n}+2nd)=3S_n+3n^2d,$$

од каде следува

$$3(S_{2n}-S_n)=3(2S_n+n^2d-S_n)=3(S_n+n^2d)=S_{3n}.$$

3АВ. Докажи дека за секој природен број $n\ge 2$, постојат различни природни броеви $x_1, x_2, ..., x_n$, такви што

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2013}.$$

Решение. Задачата ќе ја докажеме со математичка индукција. Имаме

$$\frac{1}{2013}=\frac{1}{3\cdot 671}=\frac{1}{674}(\frac{1}{3}+\frac{1}{671})=\frac{1}{3\cdot 674}+\frac{1}{671\cdot 674},$$

равенството важи за $n=2$. Нека тврдењето важи за $n=k$, односно постојат различни природни броеви $x_1, x_2, ..., x_k$, такви што

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_k}=\frac{1}{2013}.$$

Тогаш

$$\frac{1}{2013}=\frac{1}{4026}+\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+...+\frac{1}{2x_k}.$$

Јасно $x_i\ne 2013$ односно $2x_i\ne 4026$ за $i=1,2..,n$ и $2x_1$, $2x_2$, ..., $2x_k$ се различни природни броеви. Значи, тврдењето важи и за $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број $n\in\mathbb{N}$.

4АБ . Нека a,b,c се по парови различни реални броеви. Докажи дека барем две од равенките

$$(x-a)(x-b)=x-c$$

$$(x-b)(x-c)=x-a$$

$$(x-c)(x-a)=x-b$$

имаат реални решенија.

Решение. Да ги разгледаме квадратните функции

$$f_1(x)=(x-a)(x-b)-(x-c)$$
$$f_2(x)=(x-b)(x-c)-(x-a)$$
$$f_3(x)=(x-c)(x-a)-(x-b).$$

Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ немаат реални корени. Тогаш, бидејќи коефициентите пред квадратните членови се еднакви на 1, добиваме дека $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$, па затоа $f_1(x)+f_2(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Од друга страна

$$\begin{aligned} f_1(x)+f_2(x) &= (x-a)(x-b)-(x-c)+(x-b)(x-c)-(x-a) \\ &= (x-b)[(x-a)+(x-c)]-[(x-a)+(x-c)] \\ &= [2x-(a+c)](x-b-1) \end{aligned}$$

има реални корени $x_{\circ 1}=b+1$ и $x_{\circ 2}=\frac{a+c}{2}$. Последното значи, дека не е исполнето $f_1(x_{\circ 1})>0$ и $f_2(x_{\circ 1})>0$, односно $f_1(x_{\circ 2})>0$ и $f_2(x_{\circ 2})>0$. Од добиената противречност следува дека најамалку две од дадените равенки имаат реален корен.