Osječki matematički list 14 (2014), 35-50

Geršgorinova lokacija spektra i primjene

Jelena Kovačević* Joško Mandić† Tanja Vučičić‡

Sažetak

U članku razmatramo problem približnog lociranja područja u Gaussovoj ravnini unutar kojeg leži spektar kompleksne kvadratne matrice. Ukazujemo na mnogobrojne primjene dobivenih procjena u različitim područjima primijenjene matematike.

Ključne riječi: *spektar matrice, Geršgorinov krug, Geršgorinov skup, Cassinijevi ovali, Brauerov skup*

Geršgorin's location of the spectrum

Abstract

In the paper, we consider the problem of determining a subset of the complex plane which contains all eigenvalues of the given complex matrix. We point to several applications of the gained eigenvalue inclusion sets in different branches of applied mathematics.

Keywords: *spectrum of a matrix, Geršgorin's disk, Geršgorin set, ovals of Cassini, Brauer set*

*studentica, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu

†Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu, email: Josko.Mandic@pmfst.hr

‡Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu, email: vucicic@pmfst.hr

1 Uvod

Jedan od najvažnijih podataka o kvadratnoj matrici i najznačajnijih u primjeni su njezine svojstvene vrijednosti. Iz same matrice njih nije moguće razabrati. Trag matrice je tek podatak o njihovoj sumi, a ona može biti mala i za svojstvene vrijednosti koje su velike po apsolutnoj vrijednosti, ali suprotnih predznaka.

Računanje svojstvenih vrijednosti može biti vrlo zahtjevno, posebno kod matrica velikog reda. S druge strane, za riješiti pojedine probleme nekad će biti dostatno samo ih približno locirati. Primjerice, ako želimo zaključiti da je matrica regularna, dovoljno je utvrditi da spektar matrice ne sadrži nulu. Za neka druga pitanja dovoljno je saznati jesu li svojstvene vrijednosti po modulu manje od 1 ili imaju li negativan realni dio ili neko drugo potrebno svojstvo.

Semjon Aranovič Geršgorin (1901.–1933.)
Jedna od vodećih figura u sovjetskoj školi mehanike i primijenjene matematike.

Matematičarima je već odavno zanimljiv problem određivanja "inkluzivnog spektralnog skupa", odnosno, područja u Gaussovoj ravnini unutar kojeg se prostire spektar matrice. Prvi veliki doprinos njegovom rješavanju dao je ruski matematičar Semjon Aranovič Geršgorin poznatim teoremom o Geršgorinovom krugu objavljenim u [3] 1931. godine (poglavlje 2). U istom radu nalazimo i "jaku varijantu" navedenog teorema koja se odnosi na slučaj geometrijski zanimljive strukturiranosti inkluzivnog skupa u više komponenti povezanosti (poglavlje 4). Neke primjene saznanja o lokaciji spektra dajemo u poglavlju 3. Posljednje poglavlje posvećeno je poboljšanju Geršgorinovog rezultata temeljeno na generalizaciji ideje dokaza teorema o Geršgorinovom krugu. Opisano tako dobiveno poboljšanje je i konačno. Postoje brojne generalizacije druge vrste koje samo spominjemo unutar točke posvećene strogo dijagonalno dominantnim matricama, a više o njima se može naći u [9]. Da je Geršgorinov rezultat inspiracija aktualnim znanstvenim istraživanjima svjedoče brojni recentni članci kao što su [6], [7] i [8].

Za algebru kvadratnih matrica reda n nad poljem F koristit ćemo oznaku $M_n(F)$. U našem razmatranju F je uglavnom polje kompleksnih brojeva. Oznaka za skup svih svojstvenih vrijednosti tj. spektar matrice A nam je $\sigma(A)$. A^τ označuje transponiranu matricu matrice A.

2 Geršgorinovi krugovi

Neka je $A = [A_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$. Ovu oznaku za matrične elemente koristimo u cijelom tekstu. Za $1 \leq i \leq n$ s $\rho_i(A)$ označimo zbroj apsolutnih vrijednosti elemenata i-tog retka matrice A, odnosno

$$\rho_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|.$$

Slično, s $\nu_j(A)$ označimo zbroj apsolutnih vrijednosti elemenata j-tog stupca matrice A, odnosno

$$\nu_j(A) = \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Redčana suma matrice A, u oznaci $\rho(A)$, i **stupčana suma** matrice A, označena $\nu(A)$, definiraju se formulama

$$\rho(A) = \max\{\rho_i(A) \mid 1 \leq i \leq n\} \quad \text{i} \quad \nu(A) = \max\{\nu_j(A) \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

Definicija 2.1. *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ te prirodni broj $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiramo i-ti Geršgorinov krug $C_i(A)$ kao krug u kompleksnoj ravnini sa središtem u A_{ii} i radijusom $r_i(A) = \rho_i(A) - |A_{ii}|$.*

Koristeći za $r_i(A)$ skraćenu oznaku r_i možemo pisati

$$C_i(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \leq r_i\}.$$

Primjerice, za matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$$

imamo $\rho_1(A) = 1 + \sqrt{5}$, $\rho_2(A) = 5$, odakle slijedi $\rho(A) = 5$. Iz $\nu_1(A) = 2 + \sqrt{5}$ i $\nu_2(A) = 4$ slijedi $\nu(A) = 2 + \sqrt{5}$. $C_1(A)$ je krug sa središtem u $1 + 2i$ i radijusom 1, a $C_2(A)$ je krug sa središtem u -3 radijusa 2. Teorem o Geršgorinovom krugu će nam reći da su sve svojstvene vrijednosti dane matrice A sadržane u uniji ova dva kruga. Kako $C_1(A) \cup C_2(A)$ ne sadrži ishodište, zaključujemo da 0 nije svojstvena vrijednost od A i da je A invertibilna.

Teorem 2.1. *(Teorem o Geršgorinovom krugu) Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tada je svaka svojstvena vrijednost matrice A sadržana u nekom Geršgorinovom krugu.*

Dokaz. Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A s odgovarajućim svojstvenim vektorom $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^\tau$. Tada v zadovoljava matričnu jednadžbu $Av = \lambda v$, koja se može raspisati u obliku

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j = \lambda v_i \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Pretpostavimo da je v_k koordinata vektora v koja je po apsolutnoj vrijednosti najveća. Kako je v svojstveni vektor, to vrijedi $v_k \neq 0$.

Pokažimo da λ leži u $C_k(A)$, odnosno da vrijedi $|\lambda - A_{kk}| \leq r_k$. Za $i = k$ iz (1) slijedi:

$$\begin{aligned} |\lambda v_k - A_{kk} v_k| &= \left| \sum_{j=1}^{n} A_{kj} v_j - A_{kk} v_k \right| = \left| \sum_{j \neq k} A_{kj} v_j \right| \\ &\leq \sum_{j \neq k} \left| A_{kj} \right| |v_j| \leq \sum_{j \neq k} \left| A_{kj} \right| |v_k| \\ &= |v_k| \sum_{j \neq k} \left| A_{kj} \right| = |v_k| \, r_k. \end{aligned}$$

Dakle je

$$|v_k| \, |\lambda - A_{kk}| \leq |v_k| \, r_k$$

i konačno imamo $|\lambda - A_{kk}| \leq r_k$. □

Primjer 2.1. Za matricu

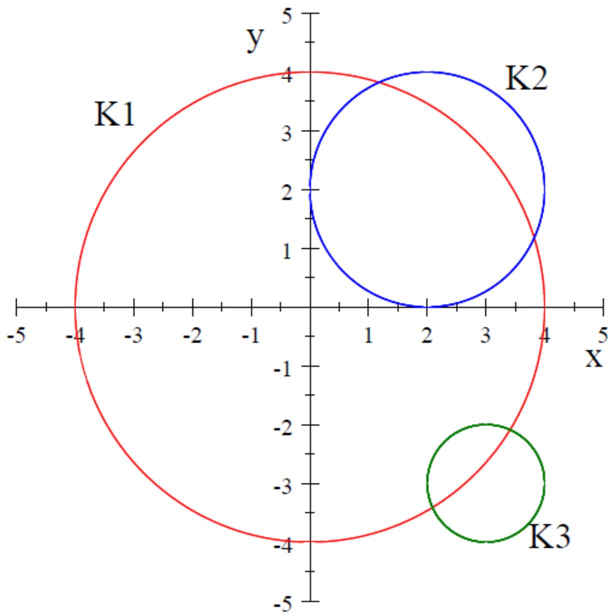
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 2 \\ \frac{i+\sqrt{3}}{2} & 2+2i & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} & 3-3i \end{pmatrix}$$

je $r_1(A) = 4$, $r_2(A) = 2$ i $r_3(A) = 1$. Nadalje, $C_1(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 4\}$, $C_2(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - 2i| \leq 2\}$ i $C_3(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3 + 3i| \leq 1\}$. Iz teorema 2.1 slijedi da je spektar matrice $\sigma(A)$ sadržan u uniji $C_1(A) \cup C_2(A) \cup C_3(A)$ koja je na donjoj slici naznačena rubnim kružnicama K1, K2 i K3. Na isti način ćemo Geršgorinove krugove predočavati i u nastavku teksta.

Korolar 2.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tada za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice A postoji i, $1 \leq i \leq n$, sa svojstvom da λ leži u krugu*

$$C_i'(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \leq r_i' \right\}$$

u kompleksnoj ravnini čiji je radijus $r_i' = \nu_i(A) - |A_{ii}|$.



Slika 1.

Dokaz. Svaka svojstvena vrijednost λ matrice A je ujedno svojstvena vrijednost matrice A^τ. Primjenom teorema 2.1 na matricu A^τ zaključujemo da postoji i, $1 \leq i \leq n$, sa svojstvom da λ leži u krugu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \leq r_i\}$, gdje je $r_i = \rho_i(A^\tau) - |A_{ii}|$. Kako su redci matrice A^τ upravo stupci matrice A, to vrijedi $\rho_i(A^\tau) = \nu_i(A)$ i $r_i = r_i'$. $\square$

Za uniju $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i(A)$, koja je očigledno omeđen i zatvoren podskup Gaussove ravnine, koristi se naziv Geršgorinov skup. Prethodnim korolarom je, dakle, ocjena $\sigma(A) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i(A)$ iz teorema 2.1 poboljšana do oblika

$$\sigma(A) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i(A)\right) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i'(A)\right).$$

U primjeru 2.1 na ovaj način možemo utvrditi, između ostalog, da realni dio svojstvenih vrijednosti matrice A nije manji od $-\frac{3}{2}$. Jasno je da dobivenu procjenu možemo dalje poboljšavati presijecanjem s drugim područjima Gaussove ravnine na koja nam ukazuju druge eventualno poznate informacije o spektru.

Kod dijagonalne matrice Geršgorinovi krugovi su točke jer su im radijusi jednaki 0. Vrijedi i obratno: ako su za neku matricu svi Geršgorinovi krugovi radijusa 0, onda je ta matrica dijagonalna.

Korolar 2.2. *Neka je λ svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tada je $|\lambda| \leq \rho(A)$.*

Dokaz. Prema teoremu 2.1 imamo $|\lambda - A_{kk}| \leq r_k$ za neki k. Dakle

$$\begin{aligned} |\lambda| &= |(\lambda - A_{kk}) + A_{kk}| \leq |\lambda - A_{kk}| + |A_{kk}| \\ &\leq r_k + |A_{kk}| = \rho_k(A) \leq \rho(A). \end{aligned}$$

□

Korolar 2.3. *Neka je λ svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tada je*

$$|\lambda| \leq \min\{\rho(A), \nu(A)\}.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz činjenice da je $\sigma(A) = \sigma(A^\tau)$ i korolara 2.2 prema kojemu imamo $|\lambda| \leq \rho(A)$ i $|\lambda| \leq \rho(A^\tau) = \nu(A)$. □

Na temelju korolara 2.3 zaključujemo, primjerice, da svojstvene vrijednosti matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3-4i \\ -2+i & 0 & 6 \\ 3 & 2 & i \end{pmatrix}$$

po modulu ne premašuju broj $6+\sqrt{5}$. Naime, lako se vidi da vrijedi $\rho_1(A) = 7$, $\rho_2(A) = 6+\sqrt{5}$, $\rho_3(A) = 6$, $\nu_1(A) = 4+\sqrt{5}$, $\nu_2(A) = 3$ i $\nu_3(A) = 12$.

Teorem o Geršgorinovom krugu može nekad dati bolje procjene lokacije spektra matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ ako ga se primijeni na prikladno po sličnosti transformiranu matricu $T^{-1}AT$. Pritom koristimo činjenicu da slične matrice imaju isti spektar. Transformacija je posebno jednostavna ako za T odaberemo dijagonalnu (regularnu) matricu. U tom slučaju transformirana matrica ima dijagonalu jednaku polaznoj i vrijedi sljedeći rezultat tzv. skaliranja Geršgorinovih krugova.

Korolar 2.4. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ i neka su $d_1, d_2, \ldots, d_n$ pozitivni realni brojevi. Tada za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice A postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sa svojstvom da je λ element skupa $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j \neq i, j=1}^{n} d_j |A_{ij}| \right\}$.*

Dokaz. Ako je $T = diag[d_1, d_2, \ldots, d_n]$, onda je $\left(T^{-1}AT\right)_{ij} = \frac{d_j}{d_i}A_{ij}$, pa tvrdnja slijedi primjenom teorema 2.1 na matricu $T^{-1}AT$. $\square$

3 Primjene

3.1 Strogo dijagonalno dominantne matrice

Dijagonalno dominantne matrice su zanimljive za različite vidove matematičke primjene. Primjerice, u praksi se direktno rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi često zamijeni iterativnim postupkom rješavanja. Pritom su bitna pitanja postojanja i jedinstvenosti rješenja, a za brzinu samog postupka i njegovu konvergenciju važno je i moguće svojstvo dijagonalne dominantnosti matrice sustava.

Definicija 3.1. *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je strogo dijagonalno dominantna po redcima ako je $r_i(A) < |A_{ii}|$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je strogo dijagonalno dominantna po stupcima ako je $r'_i(A) < |A_{ii}|$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Propozicija 3.1. *Ako je matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ strogo dijagonalno dominantna po redcima (stupcima), onda je ona regularna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je matrica A strogo dijagonalno dominantna po redcima i da nije regularna. Iz neregularnosti slijedi da joj je 0 svojstvena vrijednost. Tada po teoremu 2.1 postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ i krug

$$C_i(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \leq r_i\}$$

koji sadrži nulu. Slijedi $|A_{ii}| \leq r_i$, što je kontradikcija. Dakle je A regularna matrica.

Ako je matrica A strogo dijagonalno dominantna po stupcima, onda je A^τ strogo dijagonalno dominantna po redcima. Prema prethodno dokazanom je A^τ regularna matrica, a odatle slijedi da je i A regularna. $\square$

Transformacija po sličnosti i ovdje nekad može osigurati proširenje područja primjene.

Primjer 3.1. Matrica $A = \begin{bmatrix} 3+4i & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & i & 2 \end{bmatrix}$ nije strogo dijagonalno dominantna po redcima (ni stupcima). Neka je $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tada je matrica $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3+4i & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & i & 2 \end{bmatrix}$ strogo dijagonalno dominantna po redcima, pa odatle i regularna. Prema tome je regularna i matrica A.

Tvrdnja iz propozicije 3.1 dokazana je prije osnovnog Geršgorinovog rezultata. Međutim, pokazuje se ne samo da iz teorema 2.1 slijedi regularnost strogo dijagonalno dominantne matrice, već da vrijedi i obratno, tj. da su tvrdnje propozicije 3.1 i teorema 2.1 ekvivalentne. Brojne korisne generalizacije Geršgorinovog teorema temelje se na njegovoj ekvivalentnosti s regularnošću strogo dijagonalno dominantnih matrica. U njima se dovode u vezu različite potklase regularnih matrica definirane poopćenjem pojma dijagonalne dominantnosti s odgovarajućom lokalizacijom skupa svojstvenih vrijednosti. Više o tome može se naći u [9].

3.2 Prijelazne matrice

Razne prirodne i društvene pojave odvijaju se na slučajan način. Modeliranjem evolucije slučajnih pojava kroz vrijeme bavi se teorija slučajnih procesa. Jedni od takvih su npr. Markovljevi procesi nazvani po ruskom matematičaru Andreju Andrejeviču Markovu (1856.–1922.). Posebno, tzv. Markovljevi lanci spadaju među najvažnije (a ujedno i najjednostavnije) modele slučajne evolucije. Markovljev lanac karakterizira prijelazna (stohastička) matrica, a za njegovu analizu bitne su svojstvene vrijednosti.

Definicija 3.2. *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{R})$ kažemo da je prijelazna ili stohastička matrica ako su svi elementi matrice nenegativni brojevi i zbroj elemenata po stupcima iznosi* 1.

Propozicija 3.2. *Ako je λ svojstvena vrijednost prijelazne matrice onda je $|\lambda| \leq 1$.*

Dokaz. Za prijelaznu matricu $A \in M_n(\mathbb{R})$ vrijedi $\nu_j(A) = \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} = 1$, pa je $\nu(A) = 1$, a iz korolara 2.3 slijedi $|\lambda| \leq 1$. □

3.3 Hermitske matrice

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ za koju vrijedi da je jednaka svojoj hermitski adjungiranoj matrici $A^* = \overline{A^\tau}$ naziva se hermitskom matricom. Dijagonalni elementi i svojstvene vrijednosti hermitske matrice su realni brojevi.

Propozicija 3.3. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska matrica. Tada za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice A postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je λ element intervala $[A_{ii} - r_i(A), A_{ii} + r_i(A)]$.*

Dokaz. Kako je A hermitska, vrijedi $\rho_i(A) = \nu_i(A)$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Po teoremu 2.1 za $\lambda \in \sigma(A)$ postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tako da vrijedi $-r_i(A) \leq \lambda - A_{ii} \leq r_i(A)$, to jest $A_{ii} - r_i(A) \leq \lambda \leq A_{ii} + r_i(A)$. □

Propozicija 3.4. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska matrica i neka vrijedi $r_i(A) < A_{ii}$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je A pozitivno definitna matrica.*

Dokaz. Neka je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A. Iz prethodne propozicije slijedi da postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $\lambda \geq A_{ii} - r_i(A)$, što je po pretpostavci veće od nule. Zaključujemo da su u ovom slučaju sve svojstvene vrijednosti od A pozitivni realni brojevi pa je matrica pozitivno definitna. □

Matrica koja ispunjava uvjet iz prethodne propozicije je očigledno strogo dijagonalno dominantna po redcima.

Primjer 3.2. Iz prethodne propozicije slijedi da je matrica

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & i \\ 1 & 3 & 1-i \\ -i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna.

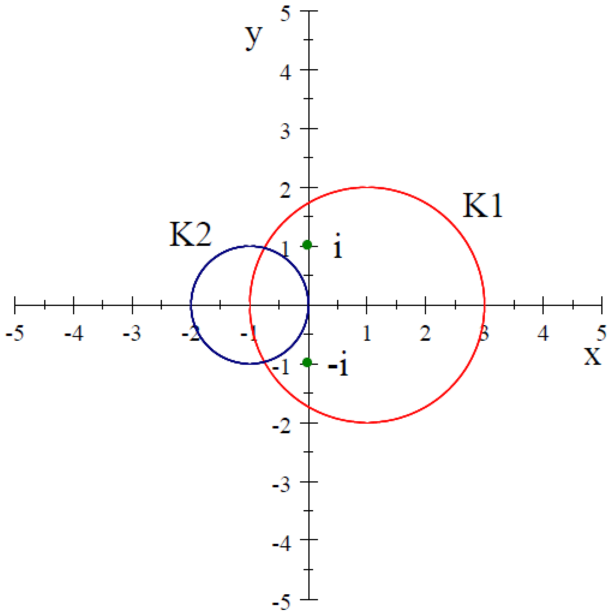
4 Jaki teorem o Geršgorinovom krugu

Teorem 4.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ i $C(A) = \bigcup_{j=1}^{k} C_{i_j}(A)$ unija nekih k Geršgorinovih krugova disjunktna s unijom preostalih $n-k$ krugova. Tada se u $C(A)$ nalazi točno k svojstvenih vrijednosti matrice A (računato s algebarskom kratnošću).*

Dokaz teorema je podući i matematički zahtjevan te ga ovdje ne navodimo.

Primjer 4.1. Teorem 4.1 se ne može poopćiti na slučaj kada krugovi nisu disjunktni. Na slici 2 vidimo da se Geršgorinovi krugovi
$C_1(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 2\}$ i $C_2(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq 1\}$ matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$



Slika 2.

presijecaju; $\sigma(A) = \{-i, i\}$ i nijedna svojstvena vrijednost ne leži u krugu $C_2(A)$.

Primjer 4.2. Za matricu

$$A = \begin{pmatrix} -2+2i & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}-1 & 1+2i & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3}-1 & -3-3i & 0 \\ 0 & \frac{i+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 2-2i \end{pmatrix}$$

vrijedi

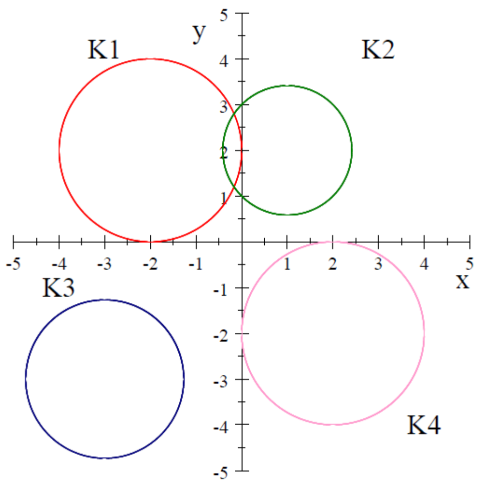
$$\rho_1(A) = 2+2\sqrt{2}, \qquad \rho_2(A) = \sqrt{2}+\sqrt{5}$$
$$\rho_3(A) = \sqrt{3}+3\sqrt{2}, \qquad \rho_4(A) = 2+2\sqrt{2}$$

pa je

$$C_1(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2-2i| \leq 2\}, \qquad C_2(A) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1-2i| \leq \sqrt{2}\right\},$$
$$C_3(A) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z+3+3i| \leq \sqrt{3}\right\}, \quad C_4(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2+2i| \leq 2\} \qquad .$$

Koristeći teorem 4.1 i sliku 3 lako zaključujemo da unutar krugova $C_3(A)$ i $C_4(A)$ postoje dvije svojstvene vrijednosti i to u svakom krugu točno jedna. Umjesto $C_4(A)$ možemo koristiti i bolju ocjenu

$$C_4'(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + 2i| \leq \frac{3}{2} \right\}.$$



Slika 3.

Propozicija 4.1. *Ako je $A \in M_n(\mathbb{R})$, onda svaki izolirani Geršgorinov krug (onaj koji je disjunktan sa svima ostalima) sadrži točno jednu i to realnu svojstvenu vrijednost.*

Dokaz. Prema teoremu 4.1 izolirani Geršgorinov krug sadrži točno jednu svojstvenu vrijednost, recimo λ. Središte kruga u ovom slučaju je na osi apscisa. Ukoliko bi vrijedilo $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, onda bi u istom krugu bio i broj $\overline{\lambda}$ koji je također svojstvena vrijednost. Na temelju dobivene kontradikcije zaključujemo da je λ realan broj. $\square$

Navedeno svojstvo izoliranih Geršgorinovih krugova realnih matrica ima značajnu primjenu u teoriji stabilnosti dinamičkih sustava.

5 Cassinijevi ovali

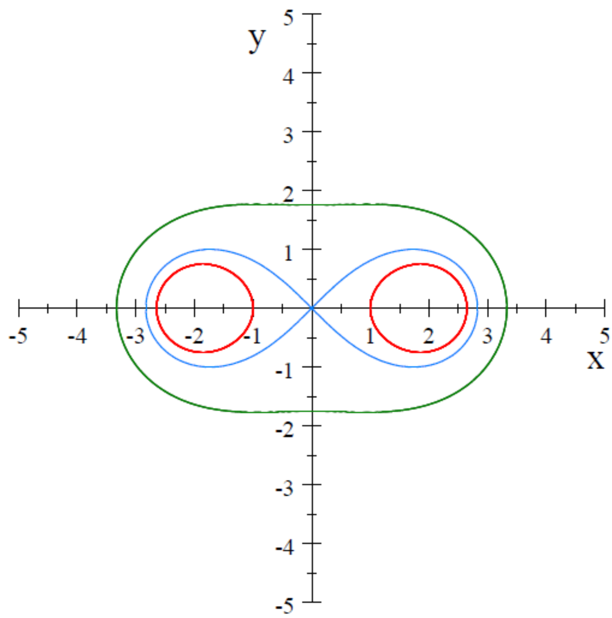
Definicija 5.1. *Cassinijev oval je geometrijsko mjesto točaka u ravnini kojima je produkt udaljenosti od dviju čvrstih točaka, koje nazivamo fokusima ovala, konstantan. Unutrašnjost Cassinijevog ovala čine one ravninske točke za koje je taj produkt manji od dotične konstante.*

Za konstantu iz prethodne definicije, koja je pozitivan realan broj, standardno se koristi oznaka r. U kompleksnoj ravnini Cassinijev oval ima jednadžbu $|z-a|\,|z-b| = r$, gdje su točke $a, b \in \mathbb{C}$ fokusi.

Primjer 5.1. Na donjoj slici prikazani su Cassinijevi ovali s jednadžbom

$$\left((x-2)^2+y^2\right)\left((x+2)^2+y^2\right) = r$$

i to za $r = 50$ (zelena krivulja), $r = 16$ (plava krivulja) i $r = 9$ (crvene krivulje).



Slika 4.

Teorem 5.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tada za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice A postoje $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, takvi da λ pripada skupu*

$$C_{ij}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \left|z - A_{jj}\right| \leq r_i(A) \cdot r_j(A) \right\}. \tag{2}$$

Dokaz. Neka svojstvenoj vrijednosti λ matrice A odgovara svojstveni vektor $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^\tau$. Tada v zadovoljava matričnu jednadžbu $Av = \lambda v$. Pretpostavimo da je ispunjeno $\left|v_j\right| \geq |v_i| \geq |v_l|$ za sve $l \neq j, i$. Ako je $v_i = 0$, onda je $v = v_j e_j$ i $\lambda = A_{jj} \in C_{ij}(A)$, odnosno, tvrdnja vrijedi. Sada pretpostavimo da je $v_i \neq 0$.

Iz

$$\begin{aligned} |\lambda v_i - A_{ii} v_i| &= \left| \sum_{k=1}^{n} A_{ik} v_k - A_{ii} v_i \right| = \left| \sum_{k=1, k\neq i}^{n} A_{ik} v_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |A_{ik}| \, |v_k| \leq \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |A_{ik}| \left|v_j\right| \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \left|\lambda v_j - A_{jj} v_j\right| &= \left| \sum_{k=1}^{n} A_{jk} v_k - A_{jj} v_j \right| = \left| \sum_{k=1, k\neq j}^{n} A_{jk} v_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \left|A_{jk}\right| |v_k| \leq \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \left|A_{jk}\right| |v_i| \end{aligned}$$

slijedi $|\lambda - A_{ii}| \leq \frac{|v_j|}{|v_i|} \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |A_{ik}|$ i $\left|\lambda - A_{jj}\right| \leq \frac{|v_i|}{|v_j|} \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \left|A_{jk}\right|$, a produkt ove dvije nejednakosti daje $|\lambda - A_{ii}| \left|\lambda - A_{jj}\right| \leq r_i(A) \cdot r_j(A)$, pa smo tvrdnju dokazali i u slučaju $v_i \neq 0$. $\square$

Rezultat $\sigma(A) \subseteq \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C_{ij}(A)$ je dokazan 1947. u radu [1]. Skupovi $C_{ij}(A)$ su očito Cassinijevi ovali zajedno sa svojom unutrašnjošću. U literaturi se za njih koristi naziv Brauerovi Cassinijevi ovali (Brauer ovals of Cassini), a unija $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C_{ij}(A)$ se naziva Brauerovim skupom matrice A.

Postupanjem kao u poglavlju 2 lako se dokaže da vrijedi ocjena
$\sigma(A) \subseteq \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C_{ij}(A) \right) \cap \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C'_{ij}(A) \right)$, gdje je

$$C'_{ij}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \left|z - A_{jj}\right| \leq (\nu_i(A) - |A_{ii}|) \left(\nu_j(A) - \left|A_{jj}\right|\right) \right\}.$$

Propozicija 5.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tada za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, vrijedi $C_{ij}(A) \subseteq C_i(A)$ ili $C_{ij}(A) \subseteq C_j(A)$. Unija $\bigcup\limits_{1\le i<j\le n} C_{ij}(A)$ sadržana je u uniji $\bigcup\limits_{1\le i\le n} C_i(A)$ svih Geršgorinovih krugova matrice A.*

Dokaz. Neka je $z \in C_{ij}(A)$ i pretpostavimo da $z \notin C_i(A)$. Nadalje, iz $|z - A_{ii}|\,|z - A_{jj}| \le r_i(A) \cdot r_j(A)$ i $|z - A_{ii}| > r_i(A)$ slijedi $|z - A_{ii}|\,|z - A_{jj}| < |z - A_{ii}| \cdot r_j(A)$, tj. $|z - A_{jj}| < r_j(A)$, pa je $z \in C_j(A)$ i prva tvrdnja propozicije je dokazana. Druga tvrdnja očigledno slijedi iz prve. □

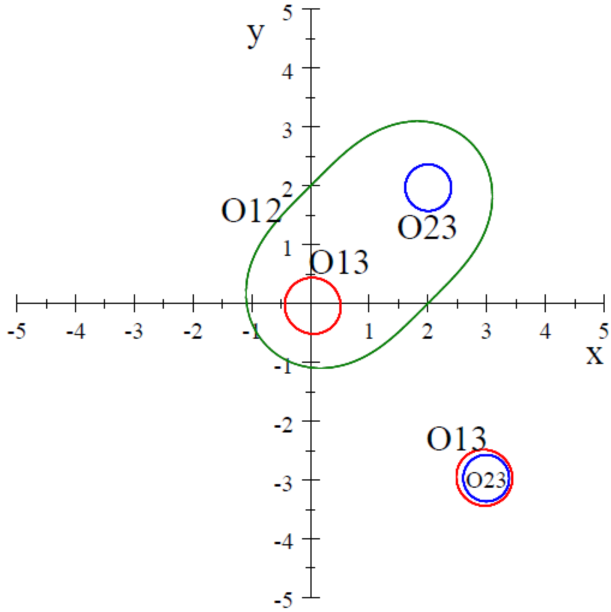
U dokazanoj inkluziji $C_{ij}(A) \subseteq C_i(A) \cup C_j(A)$ za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, jednakost može nastupiti samo u slučaju $r_i(A) = r_j(A) = 0$ ili ako vrijedi $r_i(A) = r_j(A) > 0$ i $A_{ii} = A_{jj}$.

Primjer 5.2. Skupovi $C_{ij}(A)$ za matricu A iz primjera 2.1 su na slici 5 naznačeni rubnim Cassinijevim ovalima O12, O13 i O23. Usporedba sa slikom Geršgorinovih krugova u tom primjeru zorno pokazuje da za danu matricu Cassinijevi ovali daju znatno bolju ocjenu lokacije spektra $\sigma(A)$ od one koju daje $\bigcup\limits_{1\le i\le n} C_i(A)$. U ovom slučaju se radi o pravom podskupu $\bigcup\limits_{1\le i<j\le n} C_{ij}(A) \subset \bigcup\limits_{1\le i\le n} C_i(A)$.

Zbog jednostavnosti primjene Geršgorinovom skupu se često daje prednost pred Brauerovim skupom u postupku lociranja spektra. Geršgorinov skup je unija n krugova čiji se radijusi određuju jednostavnim aritmetičkim operacijama. S druge strane, Brauerov skup uključuje $\binom{n}{2}$ skupova danih formulom (2) koja je nešto kompliciranija, a broj $\binom{n}{2}$ premašuje n čim je $n > 3$.

Zanimljivo je da nije moguće postići bolju lokalizaciju spektra nego što je Brauerov skup ako bi se, razvojem ideje dane teoremom 5.1, u razmatranje uvelo više od dva različita retka matrice. Naime, ako za $3 \le m \le n$ odaberemo različite prirodne brojeve $i_1, i_2, \ldots, i_m$ iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ i definiramo $\binom{n}{m}$ skupova $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(A)$ formulom

$$C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \prod_{k=1}^{m} |z - A_{i_k i_k}| \le \prod_{k=1}^{m} r_{i_k}(A) \right\},$$



Slika 5.

pokazuje se da njihova unija $C_{(m)}(A) = \bigcup_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq n} C_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(A)$ ne mora sadržavati spektar $\sigma(A)$. Kontraprimjer (Morris Newman, [9]) daje matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

za koju vrijedi $\sigma(A) = \{0, 1, 2\}$ i $r_1(A) = r_2(A) = 1, r_3(A) = r_4(A) = 0$; svojstvena vrijednost 1 je dvostruka. Stavljajući $m = 3$ imat ćemo da za bar jedan odabrani indeks i_k vrijedi $r_{i_k}(A) = 0$, odakle slijedi da se unija $C_{(m)}(A)$ reducira na točku $z = 1$ koja očito ne pokriva spektar. Ovaj kontraprimjer se može proširiti na sve $m \geq 3$.

Članak je nastao pri izradi završnog preddiplomskog rada Jelene Kovačević na studiju Matematike i informatike PMF-a u Splitu.

Literatura

[1] A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix. II*, Duke Math. J., **1**4(1947), 21–26.

[2] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall, Pearson Education Inc., N.J. 2003.

[3] S. A. Geršgorin, *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Izv. Akad. Nauk. USSR Otd. Fiz.-Mat. Nauk, 7(1931), 749-754.

[4] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Tehnička knjiga, Zagreb 1998.

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/Gershgorin_Circle_Theorem` (18.2.2014.)

[6] R. Marsli and F. J. Hall, *Geometric Multiplicities and Geršgorin Discs*, The American Mathematical Monthly, **120(**2013), 452–455.

[7] R. Marsli and F.J. Hall, *Further Results on Geršgorin Discs*, Linear Algebra and Its Applications, 439(2013), 189–195.

[8] R. Marsli and F.J. Hall, *Some Refinements of Geršgorin Discs*, International Journal of Algebra, 7(2013), no. 12, 573–580.

[9] R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 36, 2004.