БРОЈ РЕШЕЊА ДИОФАНТСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ $x^2 - y^2 = n$

Војислав Андрић, Ваљево

Диофантска једначина $x^2 - y^2 = n$, где су x, y и n природни бројеви, лако се решава методом производа. Веома је интересантно извршити анализу броја решења ове једначине, чиме ћемо се позабавити у овом чланку. Пре општег разматрања, задржимо се на неколико конкретних примера.

Пример 1. Одредити број решења следећих једначина у скупу природних бројева: (а) $x^2 - y^2 = 24$; (б) $x^2 - y^2 = 18$; (в) $x^2 - y^2 = 25$.

Решење. (а) Како је

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6,$$

при чему су бројеви $x-y$ и $x+y$ исте парности, у обзир долазе само комбинације $x+y = 12$, $x-y = 2$ и $x+y = 6$, $x-y = 4$, одакле добијамо два решења: $x = 7, y = 5$ и $x = 5, y = 1$.

(б) Из $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ следи да једначина нема решења, јер ни за једну од три комбинације бројеви $x+y$ и $x-y$ нису исте парности.

(в) Како је

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 25 = 1 \cdot 25 = 5 \cdot 5,$$

у обзир долазе комбинације $x+y = 25$, $x-y = 1$ и $x+y = 5$, $x-y = 5$ (у оба случаја су $x+y$ и $x-y$ бројеви исте парности). Прва комбинација даје једино решење једначине $x = 13, y = 12$. Решење на основу друге комбинације $(x = 5, y = 0)$ не одговара условима задатка, јер y није природан број.

Посматрајмо број n у канонском облику

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot p_1^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где су $p_1, p_2, \ldots, p_k$ различити непарни прости бројеви. Једначина

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 2^{\alpha_1} \cdot p_1^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

има решења само у случајевима кад су $x-y$ и $x+y$ бројеви исте парности.

Број

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot p_1^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

има укупно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ делилаца. Међу њима је

$$N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

непарних, и према томе,

$$P = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) - (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = \alpha_1(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

парних.

Испитаћемо сада шта се дешава са решењима једначине за разне вредности броја α_1. Разликујемо три случаја:

(1) Ако је $\alpha_1 = 0$, онда је број n непаран, па је $P = 0$; сви делиоци броја n су непарни и има их тачно n. Тада је број решења једначине једнак броју парова $(x-y, x+y)$, за које је $x - y < x + y$, тј. сваком делиоцу мањем од $\sqrt{n}$ одговара једно решење. Како N може бити паран (ако n није потпун квадрат), или непаран (ако је n потпун квадрат), број решења у овом случају једнак је

$$r = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)}{2} \right\rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ означава највећи цео број који није већи од x. Наиме, ако је $n = m^2$, решење које одговара комбинацији $x + y = x - y = m$ отпада, јер је у том случају $y = 0$.

(2) Ако је $\alpha_1 = 1$, онда је n број облика $2(2m+1)$, тј. n је паран број, али није дељив са 4. Тада је $P = N = (\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)$ и сваком парном делиоцу одговара њему комплементаран непаран делилац и обрнуто (њихов производ је n). То значи да бројеви $x + y$ и $x - y$ никад нису исте парности; дакле, у овом случају једначина нема решења ($r = 0$).

(3) Ако је $\alpha_1 \geq 2$, број n је дељив са 4 и

$$P = \alpha_1(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1) \geq N = (\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

Сваки непаран делилац има свој комплементаран паран делилац, и у тим случајевима једначина нема решења ($x + y$ и $x - y$ су различите парности). Једначина има решења само ако су и $x+y$ и $x-y$ парни бројеви; број одговарајућих парова делилаца, тј. број решења једначине је $r = \lfloor \frac{P-N}{2} \rfloor$. Како је

$$P-N = \alpha_1(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)-(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1) = (\alpha_1-1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1),$$

следи да је

$$r = \left\lfloor \frac{(\alpha_1-1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)}{2} \right\rfloor.$$

(И овде се узима цео део, јер број делилаца може бити паран (ако n није потпун квадрат), али и непаран (ако је n потпун квадрат).)

Сва три разматрана случаја могу се објединити у једну формулу. Непосредном провером за $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_1 \geq 2$, лако се проверава да важи следеће тврђење.

ТЕОРЕМА. Ако је $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где су $p_2, \ldots, p_k$ различити непарни прости бројеви, онда је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у скупу природних бројева једнак

$$\left\lfloor \frac{|\alpha_1 - 1|(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)}{2} \right\rfloor.$$

Доказану теорему илустроваћемо сада са неколико примера.

Пример 2. Одредити број решења у скупу природних бројева једначине: (а) $x^2 - y^2 = 45$; (б) $x^2 - y^2 = 225$; (в) $x^2 - y^2 = 34$; (г) $x^2 - y^2 = 144$; (д) $x^2 - y^2 = 60$; (ђ) $x^2 - y^2 = 1998$.

Решење. (а) Како је $45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, број решења је

$$r = \left\lfloor \frac{|0-1|(2+1)(1+1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3;$$

(б) 4; (в) Како је $34 = 2^1 \cdot 17^1$, број решења је

$$r = \left\lfloor \frac{|1-1|(1+1)}{2} \right\rfloor = 0;$$

(г) 4; (д) 2; (ђ) 0.

Следећа два тврђења су непосредне последице доказане теореме.

Последица 1. Ако је k природан број, онда једначина $x^2 - y^2 = 2^k$ има $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ решења у скупу природних бројева.

Последица 2. Ако је k природан број и p непаран прост број, онда једначина $x^2 - y^2 = p^k$ има $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ решења у скупу природних бројева.

Специјално, за $k = 1$ добијамо да једначина $x^2 - y^2 = p$ има тачно једно решење у скупу природних бројева.

ЗАДАЦИ

1. Одредити природан број n тако да једначина $x^2 - y^2 = 2^k$ има 1999 решења у скупу природних бројева.

2. Постоји ли природан број n, такав да једначина $x^2 - y^2 = 36^n$ има: (а) 49; (б) 100; (в) 157 решења у скупу природних бројева.

3. Доказати да за сваки природан број n, једначина $x^2 - y^2 = 1999^n$ има више решења у скупу природних бројева него једначина $x^2 - y^2 = 2^n$.

4. Одредити природан број n, такав да једначине $x^2 - y^2 = 200$ и $x^2 - y^2 = 4^n$ имају подједнако решења у скупу природних бројева.

5. Одредити природан број n, такав да за дати природан број m, једначине $x^2 - y^2 = 16^m$ и $x^2 - y^2 = 17^{2n+1}$ имају исти број решења у скупу природних бројева.

6. Постоје ли природни бројеви m и n, такви да једначине $x^2 - y^2 = 100^m$ и $x^2 - y^2 = 441^n$ имају исти број решења у скупу природних бројева?

7. Одредити најмањи природан број n за који једначина $x^2 - y^2 = n$ има тачно 11 решења у скупу природних бројева.

8. Доказати да за сваки природан број n, једначина $x^2 - y^2 = 1999^{4n}$ има мање решења у скупу природних бројева него једначина $x^2 - y^2 = 72^n$.

9. Одредити скуп тачака у координатној равни xOy, са целобројним координатама (x, y), таквих да једначине $m^2 - n^2 = 2^x$ и $m^2 - n^2 = 2 \cdot 5^y$ имају исти број решења (по m и n) у скупу природних бројева.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1998/99 година