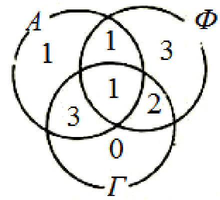
Сојузен натпревар 1971

Седмо одделение

1. Во соба се наоѓаат неколку луѓе кои знаат барем еден од трите јазици: англиски, француски и германски. Шестмина од нив знаат англиски, шестмина знаат германски, седуммина знаат француски, четворица знаат англиски и германски, тројца знаат германски и француски, двајца француски и англиски и еден ги знае сите три јазици. Колку луѓе има во собата? Колку од нив знаат само англиски?

   Решение. Задачата наједноставно се решава со Венов дијаграм. Ако со A, Φ и Γ ги означиме множествата ученици кои говорат англиски, француски и германски, тогаш од условот на задачата лесно го добиваме дијаграмот прикажан на цртежот десно. Според тоа, во собата имало



$$1+1+3+2+1+3+0=11$$

   луѓе кои кои знаат барем еден јазик, а во собата немало други луѓе заклучуваме дека во собата имало вкупно 11 луѓе, а само англиски знае еден човек.

2. Двоцифрен број собран со бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед, дава број кој е квадрат на некој природен број. Определи ги сите такви двоцифрени броеви?

   Решение. Даден број е $10a+b$, а бројот запишан со истите цифри но во обратен редосле е $10b+a$. Нивниот збир е еднаков на

$$10+b+10b+a=11(a+b)\,.$$

   Ако $11(a+b)$ е квадрат на некој број, тогаш $a+b=11k^2$ и како a и b се цифри, добиваме $a+b=11$. Можни се следниве случаи:

$$a=2,b=9;\ a=3,b=8;\ a=4,b=7;\ a=5,b=6;$$
$$a=6,b=5;\ a=7,b=4,\ a=8,b=3,\ a=9,b=2.$$

   Според тоа, бараните броеви се: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

3. Наставникот му дал на ученикот да подели еден број со друг број. Ученикот добил количник 74 и остаток 22. Потоа направил проверка: го помножил количникот со делителот и на добиениот производ го додал остатокот, па така добил 30214. Се покажало дека има грешка.

Ученикот при ова множење (при проверката) во делителот на местото на десетките една шестка прочитал како нула. Определи ги деленикот и делителот.

Решение. Да го означиме деленикот со x, а делителот со y. Според тоа, $x=74y+22$. При проверката, т.е. при пресметувањето $74y+22$ ученикот згрешил и добиениот број не е точен, што значид ека треба да се поправи. Како? Во множењето $74y$ во y земајќи на местото на десетките нула наместо шестка, ученикот како да не множел со 6 десетки, па затоа неговиот пробен резултат е помал за $74\cdot 60=4440$. Значи, резултатот треба да се зголеми за 4440, па е

$$74y+22=30214+4440\text{, т.е. } y-468.$$

Конечно, делителот е 468, а деленикот е 34654.

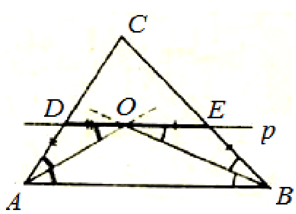
4. Даден е четириаголник $ABCD$. Конструиран е паралелограм $DBCM$. Докажи дека плоштината на триаголникот ACM е еднаква на плоштината на дадениот четириаголник $ABCD$.

Решение. Нека нормалата во A на правата CM ја сече CM во точката L, а правата BD ја сече во точката K (направи цртеж). Тогаш

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BCD}=\tfrac{1}{2}AK\cdot BD+\tfrac{1}{2}KL\cdot BD=\tfrac{1}{2}BD\cdot(AK+KL)$$
$$=\tfrac{1}{2}BD\cdot AL=\tfrac{1}{2}CM\cdot AL=P_{ACM}.$$

5. Даден е триаголник ABC. Конструирај права p паралелна со страната AB така што $AD+EB=DE$, каде D е пресечната точка на бараната права со AC, а E е пресечната точка на правата p со страната BC на триаголникот ABC.

Решение. *Анализа*. Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека $DE\parallel AB$ и $AD+EB=DE$. Нека O е точка од p таква што $DO=AD$ и $OE=EB$. Тогаш $\triangle ADO$ е рамнокрак, па затоа



$$\measuredangle DAO=\measuredangle DOA=\measuredangle OAB,$$

при што последното равенство следува од еднаквоста на агли со паралелни краци. Според тоа, AO е симетрала на $\measuredangle BAC$. Аналогно, BO е симетрала на $\measuredangle ABC$.

Конструкција:

1) Ги коструираме симетралите на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$, и ја определуваме пресечната точка O на овие симетрали,

2) Низ точката O повлекуваме права $p \parallel AB$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има едно и единствено решение.

Осмо одделение

1. Шест ученици, да ги наречеме A, B, C, D, E, F, решавале некоја задача. Задачата ја решиле двајца. На прашањето: Кој ја реши задачата?, тие дале пет одговори, т.е. изјавиле дека задачата ја решиле:

1) A и C,
2) B и F,
3) F и A,
4) B и E,
5) D и A.

Во четири од овие пет одговори еден дел е точен, а другиот е неточен, додека во еден одговор двата дела се неточни. Кои ученици ја решиле задачата?

Решение. Заради поедноставно запишување за исказот: Ученикот A ја решил задачата ќе пишуваме со $A=1$, а исказот: Ученикот A не ја решил задачата ќе пишуваме $A=0$. Слично пишуваме и за исказите за другите ученици.

Според условот на задачата во еден од петте одговори двата искази се неточни, т.е. двете букви се еднакви на 0, а во пресотанатите четири едната е еднаква на 0, а другата на 1.

1) Нека претпоставиме дека двата искази во првиот одговор се неточни, т.е. $A=0$ и $C=0$. Тогаш од третиот и петтиот одговор имаме $F=1$ и $D=1$. Сега, од вториот одговор имаме $B=0$, а од четвртиот одговор имаме $E=1$. Така добивме дека три ученици точни ја решиле задачата (F, D, E), што противречи на условот дека задачата ја решиле двајца.
2) Нека претпоставиме дека двата искази во вториот одговор се неточни, т.е. $B=0$ и $F=0$. Сега од третиот и четвртиот осговор добиваме $A=1$ и $E=1$, па од првиот одговор следува $C=0$, а од петтиот $D=0$. Значи, задачата ја решиле учениците A и E.

Сите други претпоставки доведуваат до противречност дека двајца ученици ја решиле задачата.

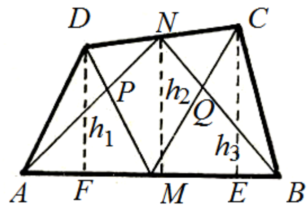
Конечно, задачата точно ја решиле учениците A и E .

2. Ученик замислил еден број, од десно му допишал 2 и на така добиениот број му додал 14. На бројот кој така го добил од десно му допишал 3 и така добиениот број го собрал со 52. Кога вака добиениот број го поделил со 60, добил количник кој е за 6 поголем од замислениот број, а остатокот од делењето бил двоцифрен број запишан со исти цифри и тоа такви што бројот на десетките бил еднаков на замислениот број. Определи го замислениот број.
Решение. Нека x е замислениот број. Ученикот прво го добил бројот $10x+2$, потоа го добил бројот $10x+16$, па бројот $10(10x+16)+3$ и на крјот го добил бројот $10(10x+16)+3+52=10(10x+16)+55$. Кога последниот број го поделил со 60 добил количник $x+6$ и остаток $10x+x=11x$. Според тоа,
$$10(10x+16)+55=60(x+6)+11x,$$
од каде добиваме $x=5$.

3. Висината на рамнокрак трапез е еднаква на h, а неговата плоштина е еднаква на h^2. Определи го аголот меѓу дијагоналите на овој трапез.
Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез ($AD=BC$), CE е нормалата повлечена од C кон основата AB, т.е. $CE=h$ (направи цртеж). Од условот на задачата следува $\frac{a+b}{2}h=h^2$, од каде добиваме дека $\frac{a+b}{2}=h$ е средната линија на трапезот. Тогаш
$$AE=AB-BE=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}=h,$$
па затоа $\measuredangle EAC=\measuredangle ABD=45^\circ$. Аголот меѓу дијагоналите како трет агол на $\triangle ABO$, O е пресек на дијагоналите, е еднаков на 90°, што значи дека дијагоналите се сечат под прав агол.

4. Во четириаголникот $ABCD$ точките M и N се соодветно средини на спротивните страни AB и DC. Отсечките MD и AN се сечат во точката P, а отсечките MC и CN се сечат во точката Q. Докажи дека плоштината на четириаголникот $MQNP$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците APD и BCQ.

Решение. Нека h_1, h_2, h_3 се висините на триаголниците AMD, ABN, MBC (види цртеж). Тогаш $h_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_3)$, како средна линија во правоаголниот трапез $ECDF$. Нека $AB = a$. Имаме



$$\begin{aligned} P_{MQNP} &= P_{ABN} - P_{AMP} - P_{MBQ} \\ &= P_{ABN} - (P_{AMD} - P_{APD}) - (P_{BMC} - P_{BCQ}) \\ &= \frac{1}{2}ah_2 - \frac{1}{2}\frac{a}{2}h_1 + P_{APD} - \frac{1}{2}\frac{a}{2}h_3 + P_{BCQ} \\ &= \frac{a}{2}(h_2 - \frac{1}{2}(h_1 + h_3)) + P_{APD} + P_{BCQ} \\ &= P_{APD} + P_{BCQ}. \end{aligned}$$

5. Основата на права призма е правоаголник со страни $5\,cm$ и $8\,cm$, а плоштината на омотачот на оваа призма е еднаква на $408,2\,cm^2$. Определи ја плоштината на омотачот на оној цилиндар чиј радиус на основата е $4\,cm$, ако волуменот на тој цилиндар е 64% од волуменот на дадената призма. (Да се земи $\pi \approx 3.14$.)

Решение. Нека M_p е плоштината на омотачот, O е периметарот на основата на призмата и H е нејзината висина. Имаме $M_p = O \cdot H$, па затоа $408,2 = 26H$, т.е. $H = \frac{408,2}{26}\,cm$. Според тоа, волуменот на призмата е $V_p = B \cdot H = 8 \cdot 5 \cdot \frac{408,2}{26}\,cm^3$, па волуменот на цилиндарот е $V_c = \frac{64}{100}V_p = \frac{64 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 408,2}{100 \cdot 26}\,cm^3$. Но, $V_c = \pi r^2 H_c = 16\pi H_c$, па затоа важи $16\pi H_c = \frac{64 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 408,2}{100 \cdot 26}$, т.е. $H_c = \frac{64 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 408,2}{100 \cdot 26 \cdot 16\pi}\,cm$. Плоштината на омотачот на цилиндарот е:

$$M_c = 2\pi r H_c = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{64 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 408,2}{100 \cdot 26 \cdot 16\pi} = 200,96\,cm^2.$$